ENSICAEN – 1ère année Matériaux Chimie
Année 2026-2027 – Semestre 5

Mathématiques

3 novembre 2026 – 1h30 – Patricia Jouannot-Chesney
Aucun document autorisé
Calculatrice et objets connectés interdits

Le barème est donné à titre indicatif
La qualité de la rédaction et la justification des résultats
seront pris en compte dans la correction

Le sujet comporte 4 exercices,
ils peuvent être traités dans l'ordre que vous souhaitez.

EXERCICE 1 (9 points environ) *(les questions 1 et 2 peuvent être traitées indépendamment)*

On cherche à résoudre le système différentiel homogène suivant : $\begin{cases} x_1'(t) = 4x_1(t) + kx_2(t) \\ x_2'(t) = x_1(t) + 2x_2(t) \end{cases}$, pour certaines valeurs de *k* (*k* désigne un réel).

1) a) Calculer le polynôme caractéristique de la matrice A associée au système. Pour quelle valeur de k, le polynôme caractéristique admet-il une racine double ? Cette valeur sera notée k_1.

b) Pour $\mathrm{k} = \mathrm{k}_1$. (valeur définie au a), résoudre le système homogène :

$$\begin{cases} x_1'(t) = 4x_1(t) + k_1x_2(t) \\ x_2'(t) = x_1(t) + 2x_2(t) \end{cases}$$

c) Résoudre ensuite le système $\begin{cases} x_1'(t) = 4x_1(t) + k_1x_2(t) + 3exp(3t) \\ x_2'(t) = x_1(t) + 2x_2(t) + exp(3t) \end{cases}$.

2) a) Pour $\mathrm{k} = \mathrm{k}_2 = -5$, donner les solutions **réelles** du système différentiel homogène :

$$\begin{cases} x_1'(t) = 4x_1(t) - 5x_2(t) \\ x_2'(t) = x_1(t) + 2x_2(t) \end{cases}$$

b) Résoudre ensuite le système différentiel $\begin{cases} x_1'(t) = 4x_1(t) - 5x_2(t) - \exp(-2t) + t - 2 \\ x_2'(t) = x_1(t) + 2x_2(t) - 5\exp(-2t) - 3t - 3 \end{cases}$

EXERCICE 2 (3-4 points environ)

Soit la fonction $f(x, y)$ de classe C^2, définie sur R^2 : $f(x, y) = y^2 - x^2 + \frac{x^4}{2} + 2y + 2$.

1) Calculer les dérivées partielles premières et secondes de f sur R^2.

2) Déterminer le (ou les) point(s) critique(s) de f sur R^2. Préciser la nature de ce (ou ces) point(s).

© Ce document est la propriété de l'ENSICAEN, il ne peut être ni communiqué, ni reproduit sans son autorisation.

EXERCICE 3 (3-4 points environ)

Soient f et F deux fonctions à valeurs réelles, de classe C ^{2} sur R^2. Les variables de f sont (x, y) et celles de F s'appellent (u, v). Le lien existant entre les deux fonctions f et F est $f(x, y) = F(u, v)$, où $u = U(x, y) = x + ay$ et $v = V(x, y) = x + by$, avec a et b des constantes réelles.

1) Quelle est la condition que doit vérifier le couple (a, b) pour que l'application $\emptyset$ définie par $\emptyset(x, y) = (u, v)$ soit bijective de R^2 vers R^2, et donc inversible ?

2) Exprimer les dérivées partielles premières de f à l'aide de celles de F.

3) On choisit les valeurs a=1 et b=-1. Montrer qu'alors la résolution de l'équation aux dérivées partielles $\frac{\partial f}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial y} = 2$ se ramène à la résolution de $\frac{\partial F}{\partial v} = c$ où c est une constante à déterminer.

4) En déduire la solution générale $f(x, y)$ de $\frac{\partial f}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial y} = 2$.

EXERCICE 4 (4 points environ)

On cherche à résoudre l'équation différentielle linéaire d'ordre 3 :

$$f^{(3)}(t) - 2f''(t) - f'(t) + 2f(t) = -4exp(t) \quad (E)$$

1) En posant $X(t) = \begin{pmatrix} f(t) \\ f'(t) \\ f''(t) \end{pmatrix}$, écrire le système différentiel d'ordre 1 : $X'(t) = AX(t) + B(t)$ associé à l'équation différentielle (E). On fournira explicitement les éléments A et B(t).

2) Déterminer la solution générale de l'équation homogène $X_h(t)$.

3) Trouver une solution particulière $X_p(t)$ et la solution générale $X(t)$. En déduire la solution générale $f(t)$ de l'équation (E).

© Ce document est la propriété de l'ENSICAEN, il ne peut être ni communiqué, ni reproduit sans son autorisation.