ENSI CAEN
ÉCOLE PUBLIQUE D'INGÉNIEURS
CENTRE DE RECHERCHE

Année universitaire 2022–2023

$1^{\text{ère}}$ année
Matériaux et Chimie

Examen de Mathématiques

Semestre 5 – lundi 9 janvier 2023

Durée : 1h 30min

Documents et calculatrices interdits.
Les réponses non justifiées ne vaudront pas de point.

Les exercices sont indépendants et le barème n'est donné qu'à titre indicatif.

Exercice 1. *(8 points)*

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^2$ par $f(x,y) = (x+2)(y-2)$. On souhaite trouver les extrema de f sous la contrainte $x^2 + y^2 - 1 = 0$, avec la méthode des multiplicateurs de Lagrange.

a) Démontrer que les points critiques du lagrangien L du problème d'optimisation sous contrainte sont $(x_1, y_1, \lambda_1) = \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{2\sqrt{2}-1}{2}\right)$ et $(x_2, y_2, \lambda_2) = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1+2\sqrt{2}}{2}\right)$.

b) Déterminer s'il s'agit de maximum ou de minimum sous contrainte.

Exercice 2. *(5 points)*

Soit $\mathscr{D}$ le triangle de sommets $A(0,0)$, $B(\pi,\pi)$ et $C\left(\frac{3\pi}{2}, 0\right)$.

a) Déterminer les équations cartésiennes des droites (AB) et (BC).

b) Calculer $I = \iint_{\mathscr{D}} \sin(y)\, dx\, dy$ en intégrant par piles.

c) Evaluer I en intégrant par tranches.

Exercice 3. *(3 points + 2 points bonus)*

Soit le domaine $\mathscr{D} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 |\ x \geq 0,\ y \geq 0,\ x + y \geq 1,\ x^2 + y^2 \leq 1\}$.

a) Dessiner $\mathscr{D}$.

b) Dans $\mathscr{D}$, les points d'angle polaire θ ont leurs rayons compris entre $r_{\min}(\theta) = \dfrac{1}{\cos\theta + \sin\theta}$ et $r_{\max}(\theta) = 1$. Evaluer l'intégrale $I = \displaystyle\iint_{\mathscr{D}} \frac{dx\, dy}{(x^2 + y^2)^2}$ en passant en coordonnées polaires.

c) *Question bonus :* Démontrer que $r_{\min}(\theta) = \dfrac{1}{\cos\theta + \sin\theta}$.

Exercice 4. *(4 points + 2 points bonus)*

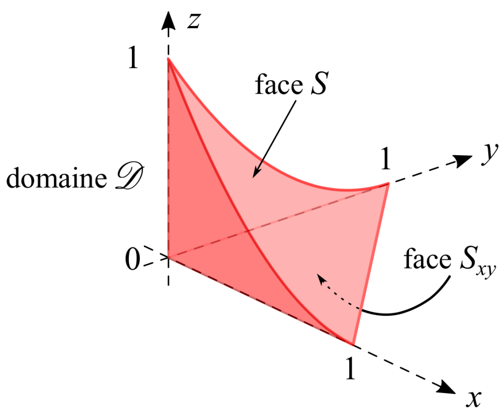
Soit $\mathscr{D}$ le domaine inclus dans la partie de $\mathbb{R}^3$ des points de coordonnées positives, défini par

$$\mathscr{D} = \{(x, y, z) \in (\mathbb{R}_+)^3 |\ x + y \leq 1,\ z \leq (x + y - 1)^2\}.$$

Sa projection orthogonale sur le plan Oxy est le domaine triangulaire

$$S_{xy} = \{(x, y) \in (\mathbb{R}_+)^2 |\ x + y \leq 1\}.$$

Remarque : sa face oblique S n'est pas plane et ses faces verticales ne sont pas des triangles.



a) Quelles sont les cotes minimale $z_{\min}(x, y)$ et maximale $z_{\max}(x, y)$ de la pile de $\mathscr{D}$ à l'abscisse x et l'ordonnée y ?

b) Evaluer $I = \displaystyle\iiint_{\mathscr{D}} x\, dx\, dy\, dz$ en intégrant par piles.

c) *Question bonus :* Evaluer $J = \displaystyle\iiint_{\mathscr{D}} z\, dx\, dy\, dz$ en intégrant par tranches.