ENSICAEN – 1ère année Matériaux Chimie
Année 2022-2023 – Semestre 5

Mathématiques

8 novembre 2022 – 1h30 – Patricia Jouannot-Chesney
Aucun document autorisé
Calculatrice interdite

Le barème est donné à titre indicatif

EXERCICE 1 (7-8 points environ)

On cherche la solution du système différentiel : $\begin{cases} x'(t) = 2x(t) + 3y(t) + exp(2t) \\ y'(t) = kx(t) + 2y(t) - exp(2t) \end{cases}$, où k désigne un réel positif ou nul ($k \geq 0$).

1) a) Pour k=3, déterminer la solution $X_h(t) = (x_h(t), y_h(t))$ du système homogène associé.

b) Pour k=0, déterminer la solution $X_h(t) = (x_h(t), y_h(t))$ du système homogène associé.

2) a) Pour k=3, déterminer une solution particulière $X_p(t) = (x_p(t), y_p(t))$ et la solution générale.

b) Pour k=0, déterminer une solution particulière $X_p(t) = (x_p(t), y_p(t))$ et la solution générale.

EXERCICE 2 (5-6 points environ)

Trouver les solutions réelles f(t) de l'équation différentielle linéaire d'ordre 3 :

$$f^{(3)}(t) - 2f''(t) - f'(t) + 2f(t) = 4t^2 + 4t + 2$$

1) On pose $X(t) = \begin{pmatrix} f(t) \\ f'(t) \\ f''(t) \end{pmatrix}$. Ecrire le système différentiel d'ordre 1 associé, en précisant les matrices A et B(t) vérifiant $X'(t) = AX(t) + B(t)$.

2) Déterminer la solution générale de l'équation homogène $X_h(t)$.

3) Trouver une solution particulière $X_p(t)$ puis la solution générale f(t) de l'équation différentielle linéaire d'ordre 3.

EXERCICE 3 (4 points environ)

Soient f et F deux fonctions à valeurs réelles, de classe C ^{2} sur R^2. Les variables de f sont (x, y) et celles de F s'appellent (u, v). Le lien entre f et F est $f(x, y) = F(u, v)$, où $u = U(x, y) = x + ay$ et $v = V(x, y) = x + by$, avec a et b des constantes réelles.

1) Quelle est la condition que doit vérifier le couple (a, b) pour que l'application ∅ définie par $\emptyset(x, y) = (u, v)$ soit bijective de R^2 vers R^2, et donc inversible ?

2) Exprimer les dérivées partielles premières de f à l'aide de celles de F.

3) On choisit les valeurs a=1 et b=-1. Montrer qu'alors la résolution de l'équation aux dérivées partielles $\frac{\partial f}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial y} = 2$ se ramène à la résolution de $\frac{\partial F}{\partial v} = c$ où c est une constante à déterminer.

4) En déduire la solution générale $f(x, y)$ de $\frac{\partial f}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial y} = 2$.

EXERCICE 4 (4 points environ)

Soit la fonction $f(x, y)$ de classe C^2, définie sur R^2 : $f(x, y) = (x - 1)^2 + (2 - y)^3 + 2$.

1) Calculer les dérivées partielles premières et secondes de f sur R^2.

2) Déterminer le (ou les) point(s) critique(s) de f sur R^2. Préciser la nature de ce (ou ces) point(s).

3) On considère le rectangle défini par $-2 \leq x \leq 0$ et $3 \leq y \leq 4$, existe-t-il des extrema ? Si oui, donner les valeurs de x et y associées ainsi que la valeur du minimum/maximum.