# Corrigé de l'examen de Mathématiques

Semestre 5 – lundi 10 janvier 2022

**Exercice 1.**

Le plan est muni du repère cartésien orthonormal direct $(O, \vec{u}_x, \vec{u}_y)$. Soit le point $A\left(0, \frac{1}{2}\right)$ et l'ellipse $\Omega$ d'équation $g(x, y) = 0$ où la fonction $g$ est définie par $g(x, y) = 3x^2 + y^2 - 1$.

**a)** Soit $P(x_0, y_0)$ un point de $\Omega$. Calculer le gradient $\vec{\nabla} g(x_0, y_0)$, puis en déduire un vecteur directeur $\vec{v}(x_0, y_0)$ de la droite tangente à l'ellipse au point $P$.

**b)** Le carré de la distance entre le point $A$ et un point $M$ de cordonnées $(x, y)$ est donné par la fonction

$$f(x, y) = x^2 + \left(y - \frac{1}{2}\right)^2.$$

En utilisant la méthode des multiplicateurs de Lagrange, déterminer les extrema de $f$ pour $M$ restreint à l'ellipse $\Omega$, et préciser leurs natures (maximum ou minimum).

**Solution 1.**

**a)** Le gradient de $g$ au point $P(x_0, y_0) \in \Omega$ est

$$\vec{\nabla} g(x_0, y_0) = \begin{pmatrix} \frac{\partial g}{\partial x}(x_0, y_0) \\ \frac{\partial g}{\partial y}(x_0, y_0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6x_0 \\ 2y_0 \end{pmatrix}.$$

Ce vecteur est non nul (car l'origine n'appartient pas à l'ellipse $\Omega$) et il est normal à la droite tangente à l'ellipse au point $P$. En d'autres termes, un vecteur directeur $\vec{v}(x_0, y_0)$ de la tangente est orthogonal au gradient. Cela équivaut à ce que leur produit scalaire est nul : $\vec{v}(x_0, y_0) \cdot \vec{\nabla} g(x_0, y_0) = 0$. Avec $\vec{v}(x_0, y_0) = \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \end{pmatrix}$, l'égalité s'écrit $v_x \times 6x_0 + v_y \times 2y_0 = 0$. Une solution possible est alors de prendre prendre $v_x = -y_0$ et $v_y = 3x_0$, ce qui donne

$$\vec{v}(x_0, y_0) = \begin{pmatrix} -y_0 \\ 3x_0 \end{pmatrix}.$$

**b)**
- *Points critiques :*
  On définit le lagrangien du problème d'optimisation sous contrainte par

$$L(x, y, \lambda) = f(x, y) - \lambda g(x, y) = x^2 + \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 - \lambda(3x^2 + y^2 - 1).$$

  Ses points critiques vérifient

$$\vec{\nabla} L(x_0, y_0, \lambda_0) = \vec{0} \iff \begin{cases} \frac{\partial L}{\partial x}(x_0, y_0, \lambda_0) = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial y}(x_0, y_0, \lambda_0) = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial \lambda}(x_0, y_0, \lambda_0) = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x_0(1 - 3\lambda_0) = 0 \\ y_0(1 - \lambda_0) = \frac{1}{2} \\ 3x_0^2 + y_0^2 = 1 \end{cases}.$$

Par conséquent, $x_0 = 0$ ou $\lambda_0 = \frac{1}{3}$.
Si $x_0 = 0$, alors $y_0 = \pm 1$ avec $\lambda_0 = 1 \mp \frac{1}{2}$.
Si $\lambda_0 = \frac{1}{3}$, alors $y_0 = \frac{3}{4}$ avec $x_0 = \pm\frac{1}{4}\sqrt{\frac{7}{3}}$.
Et donc les points critiques de $L$ sont :

* $(x_1, y_1, \lambda_1) = \left(0, -1, \frac{3}{2}\right)$,
* $(x_2, y_2, \lambda_2) = \left(0, 1, \frac{1}{2}\right)$,
* $(x_3, y_3, \lambda_3) = \left(-\frac{1}{4}\sqrt{\frac{7}{3}}, \frac{3}{4}, \frac{1}{3}\right)$,
* $(x_4, y_4, \lambda_4) = \left(\frac{1}{4}\sqrt{\frac{7}{3}}, \frac{3}{4}, \frac{1}{3}\right)$.

- *Caractérisation faible des points critiques :*
  Pour chaque point $P_i(x_i, y_i)$ avec $i \in [\![1, 4]\!]$, on définit la fonction $L_i : (x, y) \mapsto f(x, y) - \lambda_i g(x, y)$. La matrice hessienne $H_i$ de $L_i$ est constante :

$$H_i(x, y) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 L_i}{\partial x^2}(x, y) & \frac{\partial^2 L_i}{\partial x \partial y}(x, y) \\ \frac{\partial^2 L_i}{\partial y \partial x}(x, y) & \frac{\partial^2 L_i}{\partial y^2}(x, y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2(1 - 3\lambda_i) & 0 \\ 0 & 2(1 - \lambda_i) \end{pmatrix}.$$

  Les valeurs propres $2(1 - 3\lambda_i)$ et $2(1 - \lambda_i)$ valent :

  * $-7$ et $-1$ pour $H_1$,
  * $-1$ et $1$ pour $H_2$,
  * $0$ et $\frac{4}{3}$ pour $H_3$, et de même pour $H_4$.

  Par conséquent, on ne peut tirer une conclusion que pour le point $P_1$ : les valeurs propres étant toutes négatives, on en déduit qu'il y a un maximum local sous contrainte en $(0, -1)$.

- *Caractérisation forte des autres points critiques :*
  D'après la question **a)**, la droite tangente à la contrainte $\Omega$ au point $P_i(x_i, y_i)$ est dirigée par le vecteur $\vec{v_i} = \begin{pmatrix} -y_i \\ 3x_i \end{pmatrix}$. Par conséquent, si $(x, y) \in \Omega$ au voisinage de $P_i$,

$$\begin{cases} x = x_i - y_i s + o(s) \\ y = y_i + 3x_i s + o(s) \end{cases} \qquad \text{avec } \; s \in \mathbb{R}$$

  et

$$\begin{aligned} f(x, y) &= L_i(x, y) \\ &= L_i(x_i, y_i) + \frac{s^2}{2} \vec{v_i} \cdot H_i \vec{v_i} + o\left(s^2\right) \\ &= f(x_i, y_i) + q_i s^2 + o\left(s^2\right) \qquad \text{avec } \; q_i = (1 - 3\lambda_i) y_i^2 + 9(1 - \lambda_i) x_i^2 \end{aligned}$$

  Ainsi :

  * pour $P_2$, $q_2 = -1 \times 1^2 + 1 \times 0^2 = -1 < 0$ donc il y a un maximum local sous contrainte en $(0, 1)$.
  * pour $P_3$, $q_3 = 0 \times \left(\frac{3}{4}\right)^2 + \frac{4}{3} \times \left(-\frac{1}{4}\sqrt{\frac{7}{3}}\right)^2 = \frac{7}{36} > 0$ donc il y a un minimum local sous contrainte en $\left(-\frac{1}{4}\sqrt{\frac{7}{3}}, \frac{3}{4}\right)$.
  * pour $P_4$, $q_4 = 0 \times \left(\frac{3}{4}\right)^2 + \frac{4}{3} \times \left(\frac{1}{4}\sqrt{\frac{7}{3}}\right)^2 = \frac{7}{36} > 0$ donc il y a un minimum local sous contrainte en $\left(\frac{1}{4}\sqrt{\frac{7}{3}}, \frac{3}{4}\right)$.

**Exercice 2.**

Soit la boule $\mathscr{B} = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2+z^2 \leq 1\}$ et le cube $\mathscr{K} = [-1,1]^3$. Le domaine $\mathscr{D} = \mathscr{K} \setminus \mathscr{B} = \{(x,y,z) \in \mathscr{K} \mid x^2+y^2+z^2 > 1\}$ est la partie du cube $\mathscr{K}$ privé de $\mathscr{B}$. Calculer les intégrales $I = \iiint_{\mathscr{B}} (x^2+y^2)\,dx\,dy\,dz$ et $J = \iiint_{\mathscr{D}} (x^2+y^2)\,dx\,dy\,dz$.

**Solution 2.**

- Le domaine $\mathscr{B}$ possède la symétrie sphérique. Il est alors judicieux d'évaluer l'intégrale en passant en coordonnées sphériques.

$$\begin{aligned}
I &= \int_{r=0}^{r=1}\int_{\theta=0}^{\theta=\pi}\int_{\varphi=0}^{\varphi=2\pi} \Big(\big(r\cos(\varphi)\sin(\theta)\big)^2 + \big(r\sin(\varphi)\sin(\theta)\big)^2\Big)\, r^2\sin(\theta)\,dr\,d\theta\,d\varphi \\
&= \int_0^1 r^4\,dr \times \int_0^\pi \sin^3(\theta)\,d\theta \times \int_0^{2\pi} d\varphi = \left[\frac{r^5}{5}\right]_0^1 \times \int_0^\pi \sin(\theta)\left(1-\cos^2(\theta)\right)\,d\theta \times \Big[\varphi\Big]_0^{2\pi} \\
&= \frac{2\pi}{5}\left[-\cos(\theta) + \frac{\cos^3(\theta)}{3}\right]_0^\pi = \frac{2\pi}{5} \times \left(1 - \frac{1}{3} + 1 - \frac{1}{3}\right) = \frac{8\pi}{15}.
\end{aligned}$$

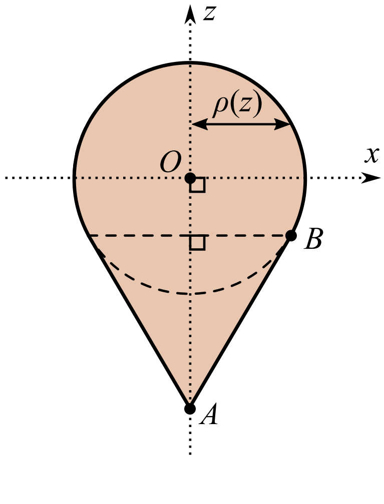
- Calculons d'abord $K = \iiint_{\mathscr{K}} (x^2+y^2)\,dx\,dy\,dz$ :

$$\begin{aligned}
K &= \int_{-1}^1\int_{-1}^1\int_{-1}^1 x^2\,dx\,dy\,dz \;+\; \int_{-1}^1\int_{-1}^1\int_{-1}^1 y^2\,dx\,dy\,dz \\
&= \int_{-1}^1 x^2\,dx \int_{-1}^1 dy \int_{-1}^1 dz \;+\; \int_{-1}^1 dx \int_{-1}^1 y^2\,dy \int_{-1}^1 dz \\
&= \left[\frac{x^3}{3}\right]_{-1}^1 \times \Big[y\Big]_{-1}^1 \times \Big[z\Big]_{-1}^1 \;+\; \Big[x\Big]_{-1}^1 \times \left[\frac{y^3}{3}\right]_{-1}^1 \times \Big[z\Big]_{-1}^1 \\
&= \frac{2}{3} \times 2 \times 2 \;+\; 2 \times \frac{2}{3} \times 2 = \frac{16}{3}.
\end{aligned}$$

  Puisque la boule $\mathscr{B}$ est incluse dans le cube $\mathscr{K}$, l'union de $\mathscr{B}$ et de $\mathscr{D} = \mathscr{K} \setminus \mathscr{B}$ est égale $\mathscr{K}$. Les domaines $\mathscr{B}$ et $\mathscr{D}$ étant disjoints par définition, on a alors $I + J = K$, et donc $J = K - I = \dfrac{16}{3} - \dfrac{8\pi}{15} = \dfrac{8(10-\pi)}{15}$.

**Exercice 3.**

L'espace est muni du repère cartésien orthonormal direct $(O, \vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z)$. Soit $\mathscr{D}$ un domaine qui possède la symétrie de révolution autour de l'axe $Oz$. Sa tranche $S_z$ à la cote $z$ est un disque horizontal, centré sur l'axe $Oz$. L'intersection de $\mathscr{D}$ avec le plan $Oxz$ est représentée sur la figure ci-contre. Le haut de $\mathscr{D}$ est délimité par une sphère de centre $O$ et de rayon $R = 2$. Le bas de $\mathscr{D}$ est délimité par un cône droit d'axe $Oz$ et de sommet situé en $A(0,0,-4)$.

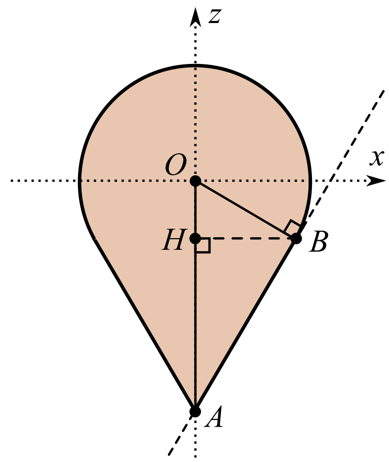


**a)** Le cône et la sphère sont tangents au point $B(x_B, 0, z_B)$. Montrer que $x_B = \sqrt{3}$ et $z_B = -1$.

**b)** Déterminer le rayon $\rho(z)$ de la tranche $S_z$ pour la cote $z \in [-4, -1]$, et pour $z \in [-1, 2]$.

**c)** Calculer le volume $V$ du domaine $\mathscr{D}$.

**Solution 3.**




**a)** Le cône et la sphère sont tangents au point $B$, donc la droite $(AB)$ et le rayon $[OB]$ sont perpendiculaires. Ainsi le triangle $ABO$ est rectangle en $B$. Alors, d'après le théorème de Pythagore, $AB^2 + OB^2 = OA^2$. Et donc $AB^2 = OA^2 - OB^2 = 4^2 - 2^2 = 12$.
Soit $H$ le projeté orthogonal du point $B$ sur l'axe $Oz$. Alors $z_B = -OH$. De plus, le triangle $BHO$ étant rectangle en $H$, on a $BH^2 + OH^2 = OB^2$. De même pour le triangle $ABH$, on obtient $BH^2 + AH^2 = AB^2$. Par conséquent,

$$\begin{array}{rrcl} & OB^2 - OH^2 & = & AB^2 - AH^2 \\ \iff & 2^2 - z_B^2 & = & 12 - (-4 - z_B)^2 \\ \iff & 4 - z_B^2 & = & 12 - 16 - 8z_B - z_B^2 \\ \iff & z_B & = & -1. \end{array}$$

Enfin, $x_B = BH = \sqrt{OB^2 - OH^2} = \sqrt{4-1} = \sqrt{3}$.

**b)**
- Pour $z \in [-4, -1]$, le rayon $\rho$ est une fonction affine de $z$ qui vérifie $\rho(z_A) = x_A$ et $\rho(z_B) = x_B$. Posons $\rho(z) = \alpha z + \beta$. Alors

$$\left\{ \begin{array}{l} \alpha z_A + \beta = x_A \\ \alpha z_B + \beta = x_B \end{array} \right. \iff \left\{ \begin{array}{l} -4\alpha + \beta = 0 \\ -\alpha + \beta = \sqrt{3} \end{array} \right. \iff \left\{ \begin{array}{l} \beta = 4\alpha \\ 3\alpha = \sqrt{3} \end{array} \right. \iff \left\{ \begin{array}{l} \alpha = \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \beta = \frac{4}{\sqrt{3}} \end{array} \right. .$$

  Donc $\rho(z) = \dfrac{z+4}{\sqrt{3}}$ pour $z \in [-4, -1]$.
- Pour $z \in [-1, 2]$, le bord de la tranche à la cote $z$ se situe sur la sphère de rayon $R$. Donc $z^2 + \rho(z)^2 = R^2$, et donc $\rho(z) = \sqrt{R^2 - z^2} = \sqrt{4 - z^2}$.

**c)** Le domaine $\mathscr{D}$ possède la symétrie de révolution autour de l'axe $Oz$. On peut tirer avantage des coordonnées cylindriques pour calculer son volume $V$.

$$\begin{aligned} V &= \iiint_{\mathscr{D}} dV = \int_{z=-4}^{z=2} \int_{\theta=0}^{\theta=2\pi} \int_{r=0}^{r=\rho(z)} r\,dr\,d\theta\,dz = \int_0^{2\pi} d\theta \times \int_{-4}^{2} \left( \int_0^{\rho(z)} r\,dr \right) dz \\ &= 2\pi \int_{-4}^{2} \left[ \frac{r^2}{2} \right]_{r=0}^{r=\rho(z)} dz = \pi \int_{-4}^{2} \rho(z)^2 dz = \pi \left( \int_{-4}^{-1} \frac{(z+4)^2}{3} dz + \int_{-1}^{2} \left( 4 - z^2 \right) dz \right) \\ &= \pi \left( \left[ \frac{(z+4)^3}{9} \right]_{-4}^{-1} + \left[ 4z - \frac{z^3}{3} \right]_{-1}^{2} \right) = \pi \left( \frac{3^3}{9} - 0 + \left( 8 - \frac{8}{3} \right) - \left( -4 + \frac{1}{3} \right) \right) \\ &= \pi \left( 3 + 8 - \frac{8}{3} + 4 - \frac{1}{3} \right) = 12\pi. \end{aligned}$$

**Exercice 4.**

Soit le domaine carré $\mathscr{D} = [1,2]^2$.

**a)** Calculer $I = \displaystyle\int_1^2 \left( \int_1^2 y\,\mathrm{e}^{xy}\,dx \right) dy$ .

**b)** Montrer que $\displaystyle\iint_{\mathscr{D}} x\,\mathrm{e}^{xy}\,dx\,dy = I$, puis en déduire la valeur de $J = \displaystyle\iint_{\mathscr{D}} (x+y)\,\mathrm{e}^{xy}\,dx\,dy$.

**c)** Soit l'application $\Phi : (x,y) \mapsto \left(\frac{y^2}{x}, \frac{x^2}{y}\right)$. On admettra sans démonstration que c'est un $\mathscr{C}^1$-difféomorphisme de $\left(\mathbb{R}_+^*\right)^2$ sur $\left(\mathbb{R}_+^*\right)^2$. Calculer son jacobien $\det J_\Phi(x,y)$.

**d)** Soit le domaine $\Delta = \{(x,y) \in (\mathbb{R}_+)^2 \mid \sqrt{x} \leq y \leq \sqrt{2x},\ \frac{x^2}{2} \leq y \leq x^2\}$.
Calculer l'intégrale $K = \displaystyle\iint_{\Delta} \frac{x^3+y^3}{xy}\,\mathrm{e}^{xy}\,dx\,dy$.

**Solution 4.**

**a)**

$$\begin{aligned} I &= \int_1^2 \left( \int_1^2 y\,\mathrm{e}^{xy}\,dx \right) dy = \int_1^2 \left[\mathrm{e}^{xy}\right]_{x=1}^{x=2} dy = \int_1^2 \left(\mathrm{e}^{2y} - \mathrm{e}^{y}\right) dy = \left[\frac{\mathrm{e}^{2y}}{2} - \mathrm{e}^{y}\right]_1^2 \\ &= \left(\frac{\mathrm{e}^4}{2} - \mathrm{e}^2\right) - \left(\frac{\mathrm{e}^2}{2} - \mathrm{e}\right) = \frac{\mathrm{e}^4}{2} - \frac{3\mathrm{e}^2}{2} + \mathrm{e}\,. \end{aligned}$$

**b)** D'après le théorème de Fubini,

$$\iint_{\mathscr{D}} x\,\mathrm{e}^{xy}\,dx\,dy = \int_1^2 \left( \int_1^2 x\,\mathrm{e}^{xy}\,dy \right) dx.$$

Les variables d'intégration étant des variables muettes, on peut échanger les symboles $x$ et $y$ sans changer la valeur de l'intégrale :

$$\int_1^2 \left( \int_1^2 x\mathrm{e}^{xy}\,dy \right) dx = \int_1^2 \left( \int_1^2 y\mathrm{e}^{yx}\,dx \right) dy = I.$$

Et donc

$$\begin{aligned} J &= \iint_{\mathscr{D}} (x+y)\,\mathrm{e}^{xy}\,dx\,dy = \iint_{\mathscr{D}} x\,\mathrm{e}^{xy}\,dx\,dy + \iint_{\mathscr{D}} y\,\mathrm{e}^{xy}\,dx\,dy \\ &= \int_1^2 \left( \int_1^2 x\mathrm{e}^{xy}\,dy \right) dx + \int_1^2 \left( \int_1^2 y\mathrm{e}^{xy}\,dx \right) dy \\ &= I + I = \mathrm{e}^4 - 3\mathrm{e}^2 + 2\mathrm{e}\,. \end{aligned}$$

**c)**

$$\det J_\Phi(x,y) = \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{y^2}{x}\right) & \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{y^2}{x}\right) \\ \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x^2}{y}\right) & \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{x^2}{y}\right) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -\frac{y^2}{x^2} & \frac{2y}{x} \\ \frac{2x}{y} & -\frac{x^2}{y^2} \end{vmatrix} = \left(-\frac{y^2}{x^2}\right)\left(-\frac{x^2}{y^2}\right) - \frac{2x}{y}\frac{2y}{x} = 1 - 4 = -3.$$

**d)** • Etablissons d'abord que l'ensemble image de $\Delta$ par l'application $\Phi$ est $\mathscr{D} = [1,2]^2$.

Pour cela, remarquons que pour tout $(x,y) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$,

$$\left\{\begin{array}{l} \sqrt{x} \leq y \leq \sqrt{2x} \\ \frac{x^2}{2} \leq y \leq x^2 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{l} \sqrt{x} \leq y \\ y \leq \sqrt{2x} \\ \frac{x^2}{2} \leq y \\ y \leq x^2 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{l} 1 \leq \frac{y^2}{x} \\ \frac{y^2}{x} \leq 2 \\ \frac{x^2}{y} \leq 2 \\ 1 \leq \frac{x^2}{y} \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{l} 1 \leq \frac{y^2}{x} \leq 2 \\ 1 \leq \frac{x^2}{y} \leq 2 \end{array}\right.$$

donc on a l'équivalence $(x,y) \in \Delta \iff \Phi(x,y) \in \mathscr{D}$.
Cela montre en premier lieu que l'image de tout point de $\Delta$ appartient à $\mathscr{D}$. Pour obtenir l'égalité $\Phi(\Delta) = \mathscr{D}$, il reste encore à vérifier que tout point de $\mathscr{D}$ est bien l'image d'un point de $\Delta$. Or l'application $\Phi$ est un $\mathscr{C}^1$-difféomorphisme de $(\mathbb{R}_+^*)^2$ sur lui-même, donc $\forall (u,v) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$, il existe $(x,y) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$ tel que $(u,v) = \Phi(x,y)$. Et si $(u,v) \in \mathscr{D}$, donc $\Phi(x,y) \in \mathscr{D}$, alors $(x,y) \in \Delta$ d'après l'équivalence. Ceci achève la démonstration.

- On remarque que

$$\begin{aligned} K &= \iint_\Delta \frac{x^3+y^3}{xy} \mathrm{e}^{xy}\, dx\, dy \\ &= \iint_\Delta \left(\frac{x^2}{y} + \frac{y^2}{x}\right) \mathrm{e}^{\frac{y^2}{x} \times \frac{x^2}{y}} \times \frac{|-3|}{3}\, dx\, dy \\ &= \frac{1}{3} \iint_\Delta f\left(\frac{y^2}{x}, \frac{x^2}{y}\right) \times |-3|\, dx\, dy \qquad \text{avec } f(u,v) = (u+v)\,\mathrm{e}^{uv} \\ &= \frac{1}{3} \iint_\Delta f(\Phi(x,y)) \times \left|\det J_\Phi(x,y)\right|\, dx\, dy \end{aligned}$$

et donc, d'après le théorème de changement de variables dans l'intégrale multiple,

$$K = \frac{1}{3} \iint_{\Phi(\Delta)} f(u,v)\, du\, dv = \frac{1}{3} \iint_{\mathscr{D}} (u+v)\,\mathrm{e}^{uv}\, du\, dv = \frac{J}{3} = \frac{\mathrm{e}^4 - 3\mathrm{e}^2 + 2\mathrm{e}}{3}.$$