ENSICAEN - 1A Matériaux et Chimie FISE

TD2 – Variations de fonctions à plusieurs variables

Exercice 1. *Intégration d'équations aux dérivées partielles*

Soit f une fonction de deux variables et de classe C^2. Résoudre les équations aux dérivées partielles suivantes :

$$(i)\ \frac{\partial f}{\partial x} = 0 \qquad (ii)\ \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 0 \qquad (iii)\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 0$$

Exercice 2. *Règle de dérivation en chaîne*

Soit F une fonction de classe $C^2(\mathrm{R}^2, \mathrm{R})$. Pour la fonction définie par $f(x) = F(3x+1, -x)$, vérifier que :

a. $f'(x) = 3\frac{\partial F}{\partial u}(3x+1, -x) - \frac{\partial F}{\partial v}(3x+1, -x)$

b. $f''(x) = 9\frac{\partial^2 F}{\partial u^2}(3x+1, -x) - 6\frac{\partial^2 F}{\partial u\, \partial v}(3x+1, -x) + \frac{\partial^2 F}{\partial v^2}(3x+1, -x)$

Exercice 3. *EDP résolue par changement linéaire de variables*

Soient f et F deux fonctions à valeurs réelles, de de classe C^2 sur R^2. Les variables de f sont notées (x, y) et celles de F sont (u,v). Ces fonctions sont reliées par le changement de variables $f(x,y) = F(U(x,y), V(x,y))$, où $U(x,y) = x + ay$ et $V(x,y) = x + by$, avec a et b des constantes.

a. Quelle condition doivent vérifier a et b pour que l'application $\emptyset$ définie par $\emptyset(x,y) = (U(x,y), V(x,y))$ soit bijective de R^2 vers R^2, et donc inversible ?

b. Exprimer les dérivées partielles premières et secondes de f à l'aide de celles de F.

c. Résoudre l'équation aux dérivées partielles : $\frac{\partial f}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial y} = 0$.

d. Résoudre l'équation aux dérivées partielles : $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0$.

e. Résoudre l'équation aux dérivées partielles : $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - 2\frac{\partial^2 f}{\partial x\, \partial y} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0$.

Exercice 4. *EDP résolue par changement de variables*

Soit f une fonction de deux variables x et y, de classe C^2 sur l'ouvert U de R^2. L'ouvert U est défini par $U = \{(x,y) \in R^2 / x - y > 0\}$. On suppose que f est solution de l'équation aux dérivées partielles

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) - \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) + 7(x-y)f(x,y) = 0$$

a. On cherche la solution sous la forme $f(x,y) = g(u,v)$, où $u = x.y$ et $v = x + y$, et g est une fonction de classe C^2 sur un ouvert que l'on ne déterminera pas. Exprimer les dérivées partielles premières de f à l'aide de celles de g.

b. En déduire l'équation différentielle aux dérivées partielles associée à g.

c. En déduire les solutions f de l'équation initiale.

Exercice 5. *Recherche d'extremum, nature des points critiques*

1) Soit la fonction $f(x,y,z)$ de classe C^2: $f(x,y,z) = (x-1)^2 + 3(y+1)^2 + 2(y+1)\,z\ + 3z^2$.

a. Calculer les dérivées partielles premières de f sur R^3. Y-a-t-il des points critiques ?

b. Déterminer la matrice Hessienne de f. Préciser la nature du ou des points critique(s).

2) Soit la fonction $g(x,y)$ définie par : $g(x,y) = \cos(x) + \cos(y)$, cette fonction est 2π-périodique pour chacune des variables. On l'étudiera donc sur l'ouvert U = [0, 2π[x [0, 2π[

a. Calculer les dérivées partielles premières de g. Y-a-t-il des points critiques ?

b. Déterminer la matrice Hessienne de g. Préciser la nature du ou des points critique(s).