ENSICAEN - 1A Matériaux et Chimie - FISE

TD2 – Variations de fonctions à plusieurs variables

Exercice 1. *Intégration d'équations aux dérivées partielles*

Soit f une fonction de deux variables et de classe C^2. Résoudre les équations aux dérivées partielles suivantes :

$$(i)\ \frac{\partial f}{\partial x}=0 \qquad (ii)\ \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}=0 \qquad (iii)\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}=0$$

Exercice 2. *Règle de dérivation en chaîne*

Soit F une fonction de classe C^2(R^2, R). Pour la fonction définie par $f(x)=F(3x+1,-x)$, vérifier que :

a. $f'(x)=3\frac{\partial F}{\partial u}(3x+1,-x)-\frac{\partial F}{\partial v}(3x+1,-x)$

b. $f''(x)=9\frac{\partial^2 F}{\partial u^2}(3x+1,-x)-6\frac{\partial^2 F}{\partial u\,\partial v}(3x+1,-x)+\frac{\partial^2 F}{\partial v^2}(3x+1,-x)$

Exercice 3. *EDP résolue par changement linéaire de variables*

Soient f et F deux fonctions à valeurs réelles, de de classe C^2 sur R^2. Les variables de f sont notées (x,y) et celles de F sont (u,v). Ces fonctions sont reliées par le changement de variables $f(x,y)=F(U(x,y),V(x,y))$, où $U(x,y)=x+ay$ et $V(x,y)=x+by$, avec a et b des constantes.

a. Quelle condition doivent vérifier a et b pour que l'application ∅ définie par $\emptyset(x,y)=(U(x,y),V(x,y))$ soit bijective de R^2 vers R^2, et donc inversible ?

b. Exprimer les dérivées partielles premières et secondes de f à l'aide de celles de F.

c. Résoudre l'équation aux dérivées partielles : $\frac{\partial f}{\partial x}-\frac{\partial f}{\partial y}=0.$

d. Résoudre l'équation aux dérivées partielles : $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}-\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=0.$

e. Résoudre l'équation aux dérivées partielles : $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}-2\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y}+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=0.$

Exercice 4. *EDP résolue par changement de variables*

Soit f une fonction de deux variables x et y, de classe C^2 sur l'ouvert U de R^2. L'ouvert U est défini par $U=\{(x,y)\in\ R^2/\ x-y>0\}$. On suppose que f est solution de l'équation aux dérivées partielles

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)-\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)+7(x-y)f(x,y)=0$$

a. On cherche la solution sous la forme $f(x,y)=g(u,v)$, où $u=x.y$ et $v=x+y$, et g est une fonction de classe C^2 sur un ouvert que l'on ne déterminera pas. Exprimer les dérivées partielles premières de f à l'aide de celles de g.

b. En déduire l'équation différentielle aux dérivées partielles associée à g.

c. En déduire les solutions f de l'équation initiale.

Exercice 5. *Recherche d'extremum, nature des points critiques*

Soit la fonction $f(x,y,z)$ de classe C^2: $f(x,y,z)=(x-1)^2+3(y+1)^2+2(y+1)\,z\ +3z^2$.

a. Calculer les dérivées partielles premières de f sur R^3. Y-a-t-il des points critiques ?

b. Déterminer la matrice Hessienne de f. Préciser la nature du ou des points critique(s).