MATHEMATIQUES
EQUATIONS DIFFERENTIELLES LINEAIRES
CORRIGE

PREMIER ORDRE

<u>Exercice 1</u>: 1) Résoudre l'équation différentielle :$y'(t)+y(t)=t^2-2t$

Solution générale de l'équation homogène: l'équation caractéristique associée est $r+1=0$ soit $r=-1$. La solution générale de l'équation homogène est donc $y_h(t)=A\exp(-t)$ où A est une constante.

Solution de l'équation avec second membre (EASM) :

* <u>*Solution « évidente » :*</u> on cherche une solution particulière de la forme $y_0(t)=at^2+bt+c$. On réinjecte dans l'équation différentielle : $y_0'(t)+y_0(t)=2at+b+at^2+bt+c=at^2+(2a+b)t+b+c=t^2-2t$, d'où en identifiant $a=1, b=-4$ et $c=4$ donc $y_0(t)=t^2-4t+4$ est une solution particulière de l'équation avec second membre. La solution générale de l'équation est donc $y(t)=A\exp(-t)+t^2-4t+4$.

* <u>*Méthode de la variation de la constante (variante beaucoup moins efficace) :*</u>

$y_0(t)=A(t)\exp(-t)$. On a alors : $A'(t)\exp(-t)=t^2-2t$ ou $A'(t)=(t^2-2t)\exp(t)$. En intégrant par parties deux fois, on obtient : $A(t)=(t^2-4t+4)\exp(t)$ et donc le même résultat que précédemment.

2) La condition initiale $y_1(0)=0$ permet de définir la valeur de A: $y_1(0)=A+4=0$ ce qui conduit à $A=-4$ et la solution $y_1(t)$ est donc définie par : $y_1(t)=-4\exp(-t)+t^2-4t+4$.

<u>Exercice 2:</u> 1) Résoudre l'équation différentielle : $y'(t)+5y(t)=4\exp(3t)$

*** *Solution générale de l'équation homogène***: l'équation caractéristique associée est $r+5=0$ soit $r=-5$. La solution générale de l'équation homogène est donc $y_h(t)=A\exp(-5t)$.

*** *Solution de l'équation avec second membre (EASM)*** :

On cherche une solution particulière de la forme $y_0(t)=a\exp(3t)$ (car $\exp(3t)$ n'est pas solution de l'équation homogène). On a $y_0'(t)+5y_0(t)=3a\exp(3t)+5a\exp(3t)=8a\exp(3t)=4\exp(3t)$. On trouve $a=1/2$ donc $y_0(t)=\frac{1}{2}\exp(3t)$ est une solution particulière de l'équation avec second membre. La solution générale de l'équation avec second membre est donc $y_{EASM}(t)=y(t)=A\exp(-5t)+\frac{1}{2}\exp(3t)$.

2) La condition initiale $y_1(0)=1$ permet de définir la constante A: $y_1(0)=A+\frac{1}{2}=1 \Rightarrow A=\frac{1}{2}$ et la solution $y_1(t)$ est donc définie par: $y_1(t)=\frac{1}{2}[\exp(-5t)+\exp(3t)]$.

<u>Exercice 3</u>: 1) Résoudre l'équation différentielle : $y'(t)+3y(t)=\cos(2t)$

Solution générale de l'équation homogène: l'équation caractéristique associée est $r+3=0$ soit $r=-3$. La solution générale de l'équation homogène est donc $y_h(t)=A\exp(-3t)$ où A est une constante.

Solution de l'équation avec second membre :

On cherche une solution particulière de la forme $y_0(t)=a\cos(2t)+b\sin(2t)$ (car 2i n'est pas solution de l'équation caractéristique). On a alors $y_0'(t)+3y_0(t)=(-2a+3b)\sin(2t)+(2b+3a)\cos(2t)=\cos(2t)$, soit $a=\frac{3}{13}$ et $b=\frac{2}{13}$. Une solution particulière de l'équation est donc $y_0(t)=\frac{3}{13}\cos(2t)+\frac{2}{13}\sin(2t)$ et la solution générale de l'équation avec second membre est $y(t)=\frac{3}{13}\cos(2t)+\frac{2}{13}\sin(2t)+A\exp(-3t)$

2) La condition initiale $y_1(0)=-1$ permet de définir A : $y_1(0)=A+\frac{3}{13}=-1 \Rightarrow A=\frac{-16}{13}$ et la solution $y_1(t)$ est donc définie par : $y_1(t)=\frac{3\cos(2t)+2\sin(2t)-16\exp(-3t)}{13}$.

Exercice 4: **Donner la solution générale de l'équation différentielle :** $y'(t) - 5y(t) = 2\exp(5t)$

*** *Solution générale de l'équation homogène***: l'équation caractéristique associée est $r - 5 = 0$ soit $r = 5$. La solution générale de l'équation homogène est donc $y_h(t) = A\exp(5t)$.

*** *Solution de l'équation avec second membre (EASM)*** :

On cherche une solution particulière de la forme $y_0(t) = at\exp(5t)$ (car 5 est solution simple de l'équation caractéristique). On a $y_0'(t) - 5y_0(t) = a\exp(5t) + 5at\exp(5t) - 5at\exp(5t) = a\exp(5t) = 2\exp(5t)$, soit $a = 2$ donc $y_0(t) = 2t\exp(5t)$ est une solution particulière de l'équation avec second membre.

La solution générale de l'équation avec second membre est donc $y(t) = (A + 2t)\exp(5t)$.

Exercice 5: **Résoudre l'équation différentielle :** $y'(t) + 2y(t) = 6t^3 + t^2 + 2 + 3\exp(-2t)$

*** *Solution générale de l'équation homogène***: $y_h(t) = A\exp(-2t)$.

*** *Solution de l'équation avec second membre (EASM)*** :

On cherche une solution particulière de la forme $y_0(t) = a_3t^3 + a_2t^2 + a_1t + a_0 + bt\exp(-2t)$. On a
$y_0'(t) + 2y_0(t) = 3a_3t^2 + 2a_2t + a_1 + 2a_3t^3 + 2a_2t^2 + 2a_1t + 2a_0 + be^{-2t} = 6t^3 + t^2 + 2 + 3e^{-2t}$
soit $a_3 = 3, a_2 = -4, a_1 = 4,\ a_0 = -1$ et $b = 3$ donc $y_0(t) = 3t^3 - 4t^2 + 4t - 1 + 3t\exp(-2t)$ est une solution particulière de l'équation avec second membre.
La solution générale de l'équation est donc $y_0(t) = 3t^3 - 4t^2 + 4t - 1 + (3t + A)e^{-2t}$.

Exercice 6: **Donner la solution de l'équation différentielle :** $y'(t) - 4y(t) = -2t^2 + 2t - 4 + 5\cos(2t)$

*** *Solution générale de l'équation homogène***: $y_h(t) = A\exp(4t)$.

*** *Solution de l'équation avec second membre (EASM)*** :

On cherche une solution particulière de la forme $y_0(t) = a_2t^2 + a_1t + a_0 + b_1\cos(2t) + b_2\sin(2t)$. On a $y_0'(t) - 4y_0(t) = (-2b_1 - 4b_2)\sin(2t) + (-4b_1 + 2b_2)\cos(2t) + 2a_2t + a_1 - 4a_2t^2 - 4a_1t - 4a_0$, soit en résolvant en égalant les termes de même espèce : $b_1 = -1$ et $b_2 = \frac{1}{2}$ et $a_2 = \frac{1}{2}, a_1 = -\frac{1}{4}$ et $a_0 = \frac{15}{16}$

soit $y_0(t) = \frac{1}{2}t^2 - \frac{1}{4}t + \frac{15}{16} - \cos(2t) + \frac{1}{2}\sin(2t)$ est une solution particulière de l'équation avec second membre.
La solution de l'équation est donc $y(t) = A\exp(-4t) + \frac{1}{2}t^2 - \frac{1}{4}t + \frac{15}{16} - \cos(2t) + \frac{1}{2}\sin(2t)$.

Exercice 7: **Donner la solution générale de l'équation différentielle :** $y'(t) - 2y(t) = \exp(2t)/t^2$

Solution générale de l'équation homogène: $y_h(t) = A\exp(2t)$ où A est une constante.

Solution de l'équation avec second membre (EASM) :

Méthode de la variation de la constante : $y_0(t) = A(t)\exp(2t)$.

On a $A'(t)\exp(2t) = \frac{\exp(2t)}{t^2}$ ou $A'(t) = \frac{1}{t^2}$. En intégrant, on obtient $A(t) = -\frac{1}{t}$ (constante d'intégration prise égale à zéro). La solution générale de l'équation avec second membre est donc $y(t) = \left[A - \frac{1}{t}\right]\exp(2t)$.

Exercice 8: **Donner la solution générale de l'équation différentielle :** $y'(t) + 3y(t) = \frac{\exp(-3t).\sin(t)}{(1+\cos(t))^2}$

Solution générale de l'équation homogène: $y_h(t) = A\exp(-3t)$ où A est une constante.

Solution de l'équation avec second membre (EASM):

Méthode de la variation de la constante: $y_0(t) = A(t)\exp(-3t)$. On a alors $A'(t)\exp(-3t) = \frac{\exp(-3t).\sin(t)}{(1+\cos(t))^2}$ ou $A'(t) = \frac{\sin(t)}{(1+\cos(t))^2}$. Avec (si besoin) un changement de variable: $u(t) = 1 + \cos(t)$, on obtient $A(t) = \frac{1}{1+\cos(t)}$ et la solution générale de l'équation avec second membre est donc $y(t) = \left[A + \frac{1}{1+\cos(t)}\right]\exp(-3t)$.

SECOND ORDRE

<u>Exercice 9</u>: Résoudre les équations différentielles : (a) $y''(t) - 2y'(t) + y(t) = \exp(2t)$

Solution générale de l'équation homogène: l'équation caractéristique associée est $r^2 - 2r + 1 = 0$ => il y a une racine double $r = 1$. La solution générale de l'équation homogène est donc $y_h(t) = [A_1 + A_2 t]\exp(t)$.

Solution de l'équation avec second membre :

* <u>*Solution « évidente » :*</u> r = 2 n'est pas racine de l'équation caractéristique, on cherche une solution particulière de la forme $y_0(t) = a\exp(2t)$.
On a alors $y_0''(t) - 2y_0'(t) + y_0(t) = 4a\exp(2t) - 4a\exp(2t) + a\exp(2t) = \exp(2t)$ => $a = 1$ et une solution particulière de l'équation avec second membre est donc $y_0(t) = \exp(2t)$.

* <u>*Méthode de la variation des constantes :*</u>

$y_0(t) = [A_1(t) + A_2(t).t]\exp(t) = A_1(t).\exp(t) + A_2(t).t.\exp(t)$

On se ramène donc à la résolution du système suivant : $\begin{cases} A_1'(t)\exp(t) + A_2'(t).t.\exp(t) = 0 \\ A_1'(t)\exp(t) + A_2'(t)[\exp(t) + t.\exp(t)] = \exp(2t) \end{cases}$

soit $\begin{cases} A_1'(t) = -A_2'(t).t \\ A_2'(t).\exp(t) = \exp(2t) \end{cases}$ soit $A_2'(t) = \exp(t)$ et $A_1'(t) = -t.\exp(t)$.

On obtient facilement $A_2(t) = \exp(t)$ et on obtient $A_1(t)$ par $A_1(t) = -\int^t x.\exp(x)\,dx = (1-t)\exp(t)$ (intégration par parties) => $y_0(t) = (1-t).\exp(2t) + t.\exp(2t) = \exp(2t)$.

La solution générale de l'équation avec second membre est donc $y(t) = [A_1 + A_2 t]\exp(t) + \exp(2t)$.

(b) $y''(t) - 4y'(t) + 4y(t) = 5\exp(-2t)$

Solution générale de l'équation homogène: l'équation caractéristique associée est $r^2 + 4r + 4 = 0$ => il y a une racine double $r = -2$. La solution générale de l'équation homogène est donc $y_h(t) = [A_1 + A_2 t]\exp(-2t)$.

Solution de l'équation avec second membre :

* <u>*Solution « évidente » :*</u> $r = -2$ est racine double de l'équation caractéristique, on cherche une solution particulière de la forme $y_0(t) = at^2\exp(-2t)$.
On a $y_0'(t) = (2at - 2at^2).\exp(-2t)$ et $y_0''(t) = (2a - 8at + 4at^2).\exp(-2t)$ ce qui conduit à
$y_0''(t) + 4y_0'(t) + 4y_0(t) = (2a - 8at + 4at^2 + 8at - 8at^2 + 4at^2)\exp(-2t) = 2a\exp(-2t) = 5\exp(-2t)$
=> $a = 5/2$ et la solution particulière de l'équation avec second membre est donc $y_0(t) = \frac{5}{2}t^2\exp(-2t)$.

* <u>*Méthode de la variation des constantes :*</u>

$y_0(t) = [A_1(t) + A_2(t).t]\exp(-2t)$. On se ramène donc à la résolution du système suivant :

$\begin{cases} A_1'(t)\exp(-2t) + A_2'(t).t.\exp(-2t) = 0 \\ -2A_1'(t)\exp(-2t) + A_2'(t)[\exp(-2t) - 2t.\exp(-2t)] = 5\exp(-2t) \end{cases}$ soit $\begin{cases} A_1'(t) = -A_2'(t).t \\ A_2'(t).\exp(-2t) = 5\exp(-2t) \end{cases}$

soit $A_2'(t) = 5$ et $A_1'(t) = -5t$, puis $A_2(t) = 5t$ et $A_1(t) = -\frac{5}{2}t^2$ et on trouve une solution particulière

$y_0(t) = \left[-\frac{5}{2}t^2 + 5t^2\right]\exp(-2t) = \frac{5}{2}t^2\exp(-2t)$ puis $y(t) = \left[A_1 + A_2 t + \frac{5}{2}t^2\right]\exp(-2t)$

<u>Exercice 10:</u> Résoudre l'équation différentielle : $y''(t) - 3y'(t) + 2y(t) = 2t^2 + 2t + 4$.

*** *Solution générale de l'équation homogène***: l'équation caractéristique associée est $r^2 - 3r + 2 = 0$ => 2 racines $r = 1$ et $r = 2$. La solution générale de l'équation homogène est donc $y_h(t) = A_1\exp(t) + A_2\exp(2t)$.

*** *Solution de l'équation avec second membre*** :
On cherche une solution particulière de la forme $y_0(t) = at^2 + bt + c$. En réinjectant dans l'équation, on a $y_0''(t) - 3y_0'(t) + 2y_0(t) = 2a - 6at - 3b + 2at^2 + 2bt + 2c = 2t^2 + 2t + 4$ => $a = 1, b = 4$ et $c = 7$. Une solution particulière de l'équation avec second membre est donc $y_0(t) = t^2 + 4t + 7$. La solution générale de l'équation avec second membre est donc $y(t) = A_1\exp(t) + A_2\exp(2t) + t^2 + 4t + 7$.

Exercice 11: **Résoudre l'équation différentielle :** $y''(t) - y'(t) - 2y(t) = t + 3 + 3\exp(2t)$

Solution générale de l'équation homogène: l'équation caractéristique associée à l'ED est $r^2 - r - 2 = 0$ soit $(r+1)(r-2) = 0$ => 2 racines $r = -1$ et $r = 2$.
La solution de l'équation homogène est donc $y_h(t) = A_1\exp(-t) + A_2\exp(2t)$ où A_1 et A_2 sont des constantes.

Solution de l'équation avec second membre :

* _Solution « évidente » :_ on peut chercher une solution particulière sous la forme $y_0(t) = at + b + c\,t.\exp(2t)$.
$y_0''(t) - y_0'(t) - 2y_0(t) = -a - 2(at + b) + c(4 + 4t)e^{2t} - c(1 + 2t)e^{2t} - 2cte^{2t} = -a - 2(at + b) + 3ce^{2t}$
d'où en identifiant $a = -\frac{1}{2}, b = -\frac{5}{4}$ et $c = 1$ donc $y_0(t) = -\frac{t}{2} - \frac{5}{4} + t.\exp(2t)$. est une solution particulière de l'équation avec second membre.
La solution générale de l'équation avec second membre est donc $y(t) = -\frac{t}{2} - \frac{5}{4} + (t + A_2).e^{2t} + A_1e^{-t}$ où A_1 et A_2 sont des constantes.

* _Méthode de la variation des constantes_ : $y_0(t) = A_1(t).\exp(-t) + A_2(t)\exp(2t)$

On se ramène au système suivant : $\begin{cases} A_1'(t)\exp(-t) + A_2'(t).\exp(2t) = 0 \\ -A_1'(t)\exp(-t) + 2\,A_2'(t)\exp(2t) = t + 3 + 3\exp(2t) \end{cases}$ soit

$$A_1'(t) = \frac{\begin{vmatrix} 0 & \exp(2t) \\ t+3+3\exp(2t) & 2\exp(2t) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \exp(-t) & \exp(2t) \\ -\exp(-t) & 2\exp(2t) \end{vmatrix}} = \frac{-(t+3+3\exp(2t))\exp(2t)}{2\exp(t)+\exp(t)} = -\frac{(t+3)}{3}\exp(t) - \exp(3t) \text{ et}$$

$$A_2'(t) = \frac{\begin{vmatrix} \exp(-t) & 0 \\ -\exp(-t) & t+3+3\exp(2t) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \exp(-t) & \exp(2t) \\ -\exp(-t) & 2\exp(2t) \end{vmatrix}} = \frac{(t+3+3\exp(2t))\exp(-t)}{3\exp(t)} = \frac{(t+3)}{3}\exp(-2t) + 1$$

En intégrant, on obtient $A_1(t) = -\frac{t+2}{3}\exp(t) - \exp(3t)/3$ et $A_2(t) = -\frac{2t+7}{12}\exp(-2t) + t$ puis une solution particulière: $y_0(t) = -\frac{t+2}{3} - \frac{\exp(2t)}{3} - \frac{2t+7}{12} + t.\exp(2t) = -\frac{t}{2} - \frac{5}{4} + \left(t - \frac{1}{3}\right).e^{2t}$ puis la solution générale $y(t) = -\frac{t}{2} - \frac{5}{4} + \left(t - \frac{1}{3} + A_2\right).e^{2t} + A_1e^{-t}$. Le terme en $e^{2t}/3$ ne modifie pas la solution générale de l'EASM.

Exercice 12: **Donner la solution générale de l'équation différentielle :** $y''(t) + y(t) = \cos(t)$

Solution générale de l'équation homogène: équation caractéristique $r^2 + 1 = 0$ => deux racines complexes conjuguées $r = \pm i$. La solution générale de l'équation homogène est donc $y_h(t) = A_1\cos(t) + A_2\sin(t)$.

Solution de l'équation avec second membre :

* _Solution « évidente » :_ on cherche donc une solution particulière de la forme $y_0(t) = Ct\cos(t) + Dt\sin(t)$ car cos(t) est solution de l'équation homogène.

On a $y_0''(t) + y_0(t) = (2D)\cos(t) - (2C)\sin(t) = \cos(t)$ => $C = 0$ et $D = \frac{1}{2}$ et $y_0(t) = t\sin(t)/2$.

* _Méthode de la variation des constantes :_ $y_0(t) = A_1(t).\cos(t) + A_2(t).\sin(t)$

On se ramène donc à la résolution du système suivant : $\begin{cases} A_1'(t)\cos(t) + A_2'(t).\sin(t) = 0 \\ -A_1'(t)\sin(t) + A_2'(t)\cos(t) = \cos(t) \end{cases}$

On obtient $A_1'(t) = \frac{\begin{vmatrix} 0 & \sin(t) \\ \cos(t) & \cos(t) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \cos(t) & \sin(t) \\ -\sin(t) & \cos(t) \end{vmatrix}} = \frac{-\sin(t).\cos(t)}{1} = -\sin(t).\cos(t)$ et $A_2'(t) = \frac{\begin{vmatrix} \cos(t) & 0 \\ -\sin(t) & \cos(t) \end{vmatrix}}{1} = \cos^2(t)$.

On a donc $A_1'(t) = -\sin(t).\cos(t) = -\frac{\sin(2t)}{2}$ et $A_2'(t) = \cos^2(t) = \frac{1+\cos(2t)}{2}$. Par intégration, on obtient $A_1(t) = \frac{\cos(2t)}{4}$ et $A_2(t) = \frac{t}{2} + \frac{\sin(2t)}{4}$ => $y_0(t) = \frac{\cos(2t)}{4}.\cos(t) + \frac{\sin(2t)}{4}.\sin(t) + \frac{t}{2}\sin(t) = \frac{\cos(t)}{4} + \frac{t}{2}\sin(t)$
La solution de l'équation est donc $y(t) = A_1.\cos(t) + (A_2 + t/2).\sin(t)$

Exercice 13: **Donner la solution de l'équation différentielle :** $y''(t) - 3y'(t) + 2y(t) = \sin(\exp(-t))$

Solution générale de l'équation homogène: l'équation caractéristique est $r^2 - 3r + 2 = 0$ => 2 racines simples $r = 1$ et $r = 2$ et la solution de l'équation homogène s'écrit $y_h(t) = A_1\exp(t) + A_2\exp(2t)$

Solution de l'équation avec second membre :

Méthode de la variation des constantes: $y_0(t) = A_1(t).\exp(t) + A_2(t)\exp(2t)$. On se ramène donc à la résolution du système suivant : $\begin{cases} A_1'(t)\exp(t) + A_2'(t).\exp(2t) = 0 \\ A_1'(t)\exp(t) + 2A_2'(t)\exp(2t) = \sin(\exp(-t)) \end{cases}$ soit $\begin{cases} A_1'(t) = -A_2'(t).\exp(t) \\ A_2'(t)\exp(2t) = \sin(\exp(-t)) \end{cases}$ soit $\begin{cases} A_1'(t) = -\exp(-t).\sin(\exp(-t)) \\ A_2'(t) = \exp(-2t).\sin(\exp(-t)) \end{cases}$.

Avec un changement de variable ($y(t) = \exp(-t)$) dans les intégrales, on obtient $A_1(t) = -\cos(\exp(-t))$ et $A_2(t) = \exp(-t).\cos(\exp(-t)) - \sin(\exp(-t))$. On en déduit qu'une solution particulière est
$y_0(t) = -\cos(\exp(-t)).\exp(t) + \exp(t).\cos(\exp(-t)) - \sin(\exp(-t))\exp(2t) = -\sin(\exp(-t))\exp(2t)$.
et la solution générale de l'EASM est donc $y(t) = A_1\exp(t) + [A_2 - \sin(\exp(-t))]\exp(2t)$

Exercice 14: **Résoudre l'équation différentielle :** $y''(t) - 2y'(t) + 2y(t) = 4\exp(t).\cos(t)$

*** *Solution générale de l'équation homogène***: l'équation caractéristique associée est $r^2 - 2r + 2 = 0$ => 2 racines simples complexes conjuguées $r = 1 + i$ et $r = 1 - i$. La solution générale de l'équation homogène est donc $y_h(t) = A_1\exp(t).\cos(t) + A_2\exp(t).\sin(t)$.

*** *Solution de l'équation avec second membre*** :
Méthode de la variation des constantes:
$y_0(t) = A_1(t).\exp(t).\cos(t) + A_2(t).\exp(t).\sin(t)$. On se ramène donc à la résolution du système suivant : $\begin{cases} A_1'(t)\exp(t).\cos(t) + A_2'(t).\exp(t).\sin(t) = 0 \\ A_1'(t)\exp(t)[\cos(t) - \sin(t)] + A_2'(t)\exp(t)[\sin(t) + \cos(t)] = 4\exp(t).\cos(t) \end{cases}$. On résout le système et on obtient $A_1'(t) = -4\cos(t).\sin(t) = -2\sin(2t)$ et $A_2'(t) = 4\cos^2(t) = 2 + 2\cos(2t)$ => $A_1(t) = \cos(2t)$ et $A_2(t) = 2t + \sin(2t)$ (on prend les constantes d'intégration nulles) =>
$y_0(t) = \cos(2t).\cos(t).\exp(t) + + \sin(2t).\sin(t).\exp(t) + 2t.\exp(t).\sin(t) = \big(\cos(t) + 2t\sin(t)\big).\exp(t)$
La solution générale de l'équation est donc $y(t) = A_1\exp(t).\cos(t) + (A_2 + 2t).\exp(t).\sin(t)$

Exercice 15: **Résoudre l'équation différentielle :** $y''(t) + y'(t) - 2y(t) = 2t.\exp(t)$

*** *Solution générale de l'équation homogène***: l'équation caractéristique est $r^2 + r - 2 = 0$ => 2 racines simples $r = 1$ et $r = -2$ et $y_h(t) = A_1\exp(t) + A_2\exp(-2t)$.

*** *Solution de l'équation avec second membre*** : on utilise la méthode de la variation des constantes pour obtenir une solution particulière de l'équation avec second membre : $y_0(t) = A_1(t).\exp(t) + A_2(t).\exp(-2t)$.

On se ramène donc à la résolution du système: $\begin{cases} A_1'(t)\exp(t) + A_2'(t).\exp(-2t) = 0 \\ A_1'(t)\exp(t) - 2A_2'(t)\exp(-2t) = 2t.\exp(t) \end{cases}$.

On résout le système : $A_2'(t) = -2t\exp(3t)/3$ et $A_1'(t) = 2t/3$ => $A_1(t) = \frac{t^2}{3}$ et $A_2(t) = (-\frac{2t}{9} + \frac{2}{27})\exp(3t)$ (on prend les constantes d'intégration nulles) => $y_0(t) = \left(\frac{t^2}{3} - \frac{2t}{9} + \frac{2}{27}\right).\exp(t)$.

La solution générale de l'équation est donc $y_0(t) = \left(\frac{t^2}{3} - \frac{2t}{9} + A_1\right)\exp(t) + A_2\exp(-2t)$.

Exercice 16: **Résoudre les équations différentielles :** * $y''(t) - y(t) = \sin^2(t)$

*** *Solution générale de l'équation homogène***: l'équation caractéristique associée est $r^2 - 1 = 0$ => 2 racines simples $r = 1$ et $r = -1$ et $y_h(t) = A_1 exp(t) + A_2 exp(-t)$.

*** *Solution de l'équation avec second membre*** : $y''(t) - y(t) = \sin^2(t) = \frac{1}{2} - \frac{\cos(2t)}{2}$. On cherche donc une solution « évidente » de la forme $y_0(t) = C\cos(2t) + D\sin(2t) + E$.

$y_0''(t) - y_0(t) = -5C\cos(2t) - 5D\sin(2t) - E = \frac{1}{2} - \frac{\cos(2t)}{2}$. Par identification, $C = \frac{1}{10}, D = 0$ et $E = -\frac{1}{2}$ soit $y_0(t) = \frac{1}{10}\cos(2t) - \frac{1}{2}$ comme solution particulière de l'EASM. La solution générale de l'équation avec second membre est donc $y(t) = \frac{1}{10}\cos(2t) - \frac{1}{2} + A_1 exp(t) + A_2 exp(-t)$.

$$* \; y''(t) + y(t) = \sin^2(t)$$

*** Solution générale de l'équation homogène**: l'équation caractéristique associée est $r^2 + 1 = 0$ => 2 racines simples $r = i$ et $r = -i$ et la solution de l'équation homogène peut s'écrire $y_h(t) = A_1\exp(it) + A_2\exp(-it)$ ou $y_h(t) = \lambda\cos(t) + \mu\sin(t)$.

*** Solution de l'équation avec second membre** : $y''(t) + y(t) = \sin^2(t) = \frac{1}{2} - \frac{\cos(2t)}{2}$. On cherche donc une solution « évidente » de la forme $y_0(t) = C\cos(2t) + D\sin(2t) + E$.

On a $y_0''(t) + y_0(t) = -3C\cos(2t) - 3D\sin(2t) + E = \frac{1}{2} - \frac{\cos(2t)}{2}$. Par identification, $C = \frac{1}{6}, D = 0$ et $E = \frac{1}{2}$ soit $y_0(t) = \frac{1}{6}\cos(2t) + \frac{1}{2}$ comme solution particulière de l'EASM. La solution générale de l'équation avec second membre est donc $y(t) = \lambda\cos(t) + \mu\sin(t) + \frac{1}{6}\cos(2t) + \frac{1}{2}$.

<u>Exercice 17:</u> Donner la solution générale de l'équation différentielle : $y''(t) - 4y'(t) + 4y(t) = \frac{\exp(2t)}{t^2}$

*** Solution générale de l'équation homogène**: équation caractéristique $r^2 - 4r + 4 = 0$ => $r = 2$ est racine double. La solution générale de l'équation homogène est donc $y_h(t) = [A_1 + A_2 t].\exp(2t)$.

*** Solution de l'équation avec second membre** : on utilise la méthode de la variation des constantes pour obtenir une solution particulière de l'équation avec second membre : $y_0(t) = [A_1(t) + A_2(t).t\,]\exp(2t)$. On se ramène donc à la résolution du système suivant :

$$\begin{cases} A_1'(t)\exp(2t) + A_2'(t).t.\exp(2t) = 0 \\ 2A_1'(t)\exp(2t) + A_2'(t)\,[\exp(2t) + 2t.\exp(2t)] = \frac{\exp(2t)}{t^2} \end{cases} \text{ soit } \begin{cases} A_1'(t) = -A_2'(t).t \\ A_2'(t).\exp(2t) = \frac{\exp(2t)}{t^2}. \end{cases}$$

On obtient $A_1'(t) = -\frac{1}{t}$ et $A_2'(t) = \frac{1}{t^2}$ => $A_1(t) = -\ln(|t|)$ et $A_2(t) = -\frac{1}{t}$, ce qui conduit à la solution particulière $y_0(t) = [\,-\ln(|t|) - 1\,]\exp(2t)$ et à la solution générale de l'équation: $y(t) = [\,-\ln(|t|) + A_1 + A_2 t\,]\exp(2t)$.

<u>Exercice 18:</u> Résoudre l'équation différentielle : $y''(t) - 4y'(t) + 3y(t) = \frac{1}{1+\exp(-t)}$

*** Solution générale de l'équation homogène**: l'équation caractéristique associée est $r^2 - 4r + 3 = 0$ => 2 racines simples $r = 1$ et $r = 3$. La solution de l'équation homogène est donc $y_h(t) = A_1\exp(t) + A_2\exp(3t)$.

*** Solution de l'équation avec second membre** : on utilise la méthode de la variation des constantes pour obtenir une solution particulière de l'équation avec second membre : $y_0(t) = A_1(t).\exp(t) + A_2(t).\exp(3t)$.

On se ramène donc à la résolution du système suivant : $\begin{cases} A_1'(t).\exp(t) + A_2'(t).\exp(3t) = 0 \\ A_1'(t).\exp(t) + 3A_2'(t).\exp(3t) = \frac{1}{1+\exp(-t)} \end{cases}$

On obtient $A_1'(t) = \frac{-\exp(-t)}{2(1+\exp(-t))}$ et $A_2'(t) = \frac{\exp(-3t)}{2(1+\exp(-t))}$ => $A_1(t) = \int^t \frac{-\exp(-u)}{2(1+\exp(-u))}du = \int^{e^{-t}} \frac{dv}{2(1+v)} = \frac{\ln(1+e^{-t})}{2}$ et $A_2(t) = \int^t \frac{\exp(-3u)}{2(1+\exp(-u))}du = -\int^{e^{-t}} \frac{v^2.dv}{2(1+v)} = -\int^{e^{-t}} \frac{v^2+v-v-1+1}{2(1+v)}dv = -\frac{1}{2}\int^{e^{-t}}\left[v - 1 + \frac{1}{1+v}\right]dv$ soit

$A_2(t) = \left[-\frac{v^2}{4} + \frac{v}{2} - \frac{\ln(1+v)}{2}\right]^{e^{-t}} = -\frac{e^{-2t}}{4} + \frac{e^{-t}}{2} - \frac{\ln(1+e^{-t})}{2}$ (on fait le changement de variable: $v(u) = e^{-u}$ et $dv = -e^{-u}.du$). On a $y_0(t) = \frac{\ln(1+e^{-t})}{2}.e^t + -\frac{e^t}{4} + \frac{e^{2t}}{2} - \frac{\ln(1+e^{-t})}{2}e^{3t} = \frac{\ln(1+e^{-t})}{2}.(e^t - e^{3t}) - \frac{e^t}{4} + \frac{e^{2t}}{2}$ en prenant les constantes d'intégration égales à zéro.

La solution générale de l'équation est donc $y(t) = \frac{\ln(1+e^{-t})}{2}.(e^t - e^{3t}) + \frac{e^{2t}}{2} + A_1\exp(t) + A_2\exp(3t)$.