

COMPLEMENT SUR LES EQUATIONS DIFFERENTIELLES LINEAIRES A COEFFICIENTS CONSTANTS

**Solution des équations homogènes (ou sans second membre)**

**1) Premier ordre :**  $y'(t) + \alpha y(t) = 0$ . L'équation caractéristique  $r + \alpha = 0$  conduit à une solution de l'équation homogène :  $y_h(t) = A e^{-\alpha t}$ .

**2) Second ordre :**  $y''(t) + \alpha y'(t) + \beta y(t) = 0$ . L'équation caractéristique  $r^2 + \alpha r + \beta = 0$  admet deux racines (dans  $\mathbb{C}$ )  $r_1$  et  $r_2$  et la solution de l'équation homogène est donc  $y_h(t) = A_1 e^{r_1 t} + A_2 e^{r_2 t}$  (si  $r_1 \neq r_2$ , c'est-à-dire  $\Delta \neq 0$  ( $\Delta = \alpha^2 - 4\beta$ )). On peut détailler :

\* si  $\Delta > 0$ , l'équation admet 2 racines réelles distinctes  $r_1 = \frac{-\alpha + \sqrt{\Delta}}{2}$  et  $r_2 = \frac{-\alpha - \sqrt{\Delta}}{2}$ .

\* si  $\Delta < 0$ , l'équation admet 2 racines complexes conjuguées  $r_1 = \frac{-\alpha + i\sqrt{-\Delta}}{2}$  et  $r_2 = \frac{-\alpha - i\sqrt{-\Delta}}{2}$ . D'où

$y_h(t) = A_1 e^{r_1 t} + A_2 e^{r_2 t} = e^{-\frac{\alpha}{2}t} \left[ A_1 e^{i\frac{\sqrt{-\Delta}}{2}t} + A_2 e^{-i\frac{\sqrt{-\Delta}}{2}t} \right]$  qui peut aussi s'écrire sous la forme

$y_h(t) = e^{-\frac{\alpha}{2}t} \left[ C_1 \cos\left(\frac{\sqrt{-\Delta}}{2}t\right) + C_2 \sin\left(\frac{\sqrt{-\Delta}}{2}t\right) \right]$ .

\* si  $\Delta = 0$  ( $\alpha^2 = 4\beta$ ), l'équation a une racine double  $r_1 = \frac{-\alpha}{2}$  et  $y_h(t) = [A_1 + A_2 t] e^{-\frac{\alpha}{2}t}$ .

**Solution générale des équations différentielles linéaires (avec second membre) :**

**1) Premier ordre :**  $y'(t) + \alpha y(t) = f(t)$ .

**a)** Méthode générale intitulée méthode de la variation de la constante consiste à chercher une solution sous la forme  $y_0(t) = A(t) \cdot e^{-\alpha t}$ . En réinjectant dans l'équation différentielle, on obtient l'équation  $A'(t) = f(t) \cdot e^{\alpha t}$ . Une solution particulière  $y_0(t)$  s'obtient avec  $y_0(t) = \left( \int^t f(u) e^{\alpha u} du \right) \cdot e^{-\alpha t}$ .

**b)** On cherche des solutions particulières « évidentes » en fonction de la nature de  $f(t)$  :

- Si  $f(t) = P_n(t)$  (polynôme de degré  $n$ ) alors  $y_0(t) = Q_n(t)$  (polynôme de degré  $n$ )
- Si  $f(t) = e^{\mu t}$  : deux cas sont à envisager : \*  $\mu \neq -\alpha$ , on cherche  $y_0$  sous la forme  $y_0(t) = a e^{\mu t}$   
\*  $\mu = -\alpha$ , on cherche  $y_0$  sous la forme  $y_0(t) = a t e^{\mu t}$
- Si  $f(t) = \gamma_1 \cos(\delta t) + \gamma_2 \sin(\delta t)$ , on cherche  $y_0$  sous la forme  $y_0(t) = a_1 \cos(\delta t) + a_2 \sin(\delta t)$

**2) Second ordre :**  $y''(t) + \alpha y'(t) + \beta y(t) = f(t)$ .

**a)** Méthode générale (variation des constantes) : si  $y_h(t) = A_1 y_1(t) + A_2 y_2(t)$  alors on prend une solution particulière  $y_0(t) = A_1(t) y_1(t) + A_2(t) y_2(t)$ . On est amené à résoudre le système :  

$$\begin{cases} A_1'(t) y_1(t) + A_2'(t) y_2(t) = 0 \\ A_1'(t) y_1'(t) + A_2'(t) y_2'(t) = f(t) \end{cases}$$
La résolution du système permet de trouver  $A_1'(t)$  et  $A_2'(t)$  : on a

$A_1'(t) = \frac{-y_2(t) f(t)}{y_1(t) y_2'(t) - y_2(t) y_1'(t)}$  et  $A_2'(t) = \frac{y_1(t) f(t)}{y_1(t) y_2'(t) - y_2(t) y_1'(t)}$  puis par intégration, on trouve  $A_1(t)$  et  $A_2(t)$  et enfin  $y_0(t)$ .

**b)** On cherche des solutions particulières « évidentes » en fonction de la nature de  $f(t)$  :

- Si  $f(t) = P_n(t)$  (polynôme de degré  $n$ ) alors  $y_0(t) = Q_n(t)$  (polynôme de degré  $n$ )
- Si  $f(t) = e^{\mu t}$  : trois cas sont à envisager :
  - \*  $\mu^2 + \alpha\mu + \beta \neq 0$  ( $\mu \neq r_1$  et  $\mu \neq r_2$ ), on cherche  $y_0$  sous la forme  $y_0(t) = ae^{\mu t}$ .
  - \*  $\mu^2 + \alpha\mu + \beta = 0$  et  $2\mu + \alpha \neq 0$  ( $\mu = r_1$  ou  $r_2$ ), on cherche  $y_0$  sous la forme  $y_0(t) = ate^{\mu t}$ .
  - \*  $\mu^2 + \alpha\mu + \beta = 0$  et  $2\mu + \alpha = 0$  ( $\mu = r_1 = r_2$ ), on cherche  $y_0$  sous la forme  $y_0(t) = at^2e^{\mu t}$ .
- Si  $f(t) = \gamma_1 \cos(\delta t) + \gamma_2 \sin(\delta t)$ , 2 cas sont possibles :
  - \* si  $r_1 \neq i\delta$ , on cherche  $y_0$  sous la forme  $y_0(t) = a_1 \cos(\delta t) + a_2 \sin(\delta t)$ .
  - \* sinon, on cherche  $y_0$  sous la forme  $y_0(t) = a_1 t \cos(\delta t) + a_2 t \sin(\delta t)$ .