COMPLEMENT SUR LES EQUATIONS DIFFERENTIELLES LINEAIRES A COEFFICIENTS CONSTANTS

Solution des équations homogènes (ou sans second membre)

1) Premier ordre : $y'(t) + \alpha\, y(t) = 0$. L'équation caractéristique $r + \alpha = 0$ conduit à une solution de l'équation homogène : $y_h(t) = A\, e^{-\alpha t}$.

2) Second ordre : $y''(t) + \alpha\, y'(t) + \beta\, y(t) = 0$. L'équation caractéristique $r^2 + \alpha r + \beta = 0$ admet deux racines (dans C) r_1 et r_2 et la solution de l'équation homogène est donc $y_h(t) = A_1 e^{r_1 t} + A_2 e^{r_2 t}$ (si $r_1 \neq r_2$, c'est-à-dire $\Delta \neq 0$ ($\Delta = \alpha^2 - 4\beta$)). On peut détailler :

* si $\Delta > 0$, l'équation admet 2 racines réelles distinctes $r_1 = \frac{-\alpha+\sqrt{\Delta}}{2}$ et $r_2 = \frac{-\alpha-\sqrt{\Delta}}{2}$.

* si $\Delta < 0$, l'équation admet 2 racines complexes conjuguées $r_1 = \frac{-\alpha+i\sqrt{-\Delta}}{2}$ et $r_2 = \frac{-\alpha-i\sqrt{-\Delta}}{2}$. D'où $y_h(t) = A_1 e^{r_1 t} + A_2 e^{r_2 t} = e^{-\frac{\alpha}{2}t}\left[A_1 e^{i\frac{\sqrt{-\Delta}}{2}t} + A_2 e^{-i\frac{\sqrt{-\Delta}}{2}t}\right]$ qui peut aussi s'écrire sous la forme $y_h(t) = e^{-\frac{\alpha}{2}t}\left[C_1 \cos\left(\frac{\sqrt{-\Delta}}{2}t\right) + C_2 \sin\left(\frac{\sqrt{-\Delta}}{2}t\right)\right]$.

* si $\Delta = 0$ ($\alpha^2 = 4\beta$), l'équation a une racine double $r_1 = \frac{-\alpha}{2}$ et $y_h(t) = [\,A_1 + A_2\, t\,]\, e^{-\frac{\alpha}{2}t}$.

Solution générale des équations différentielles linéaires (avec second membre) :

1) Premier ordre : $y'(t) + \alpha y(t) = f(t)$.

a) Méthode générale intitulée méthode de la variation de la constante consiste à chercher une solution sous la forme $y_0(t) = A(t).e^{-\alpha t}$. En réinjectant dans l'équation différentielle, on obtient l'équation $A'(t) = f(t).e^{\alpha t}$. Une solution particulière $y_0(t)$ s'obtient avec $y_0(t) = \left(\int^t f(u)e^{\alpha u}du\right).e^{-\alpha t}$.

b) On cherche des solutions particulières « évidentes » en fonction de la nature de f(t) :

- Si $f(t) = P_n(t)$ (polynôme de degré n) alors $y_0(t) = Q_n(t)$ (polynôme de degré n)
- Si $f(t) = e^{\mu t}$: deux cas sont à envisager : * $\mu \neq -\alpha$, on cherche y_0 sous la forme $y_0(t) = ae^{\mu t}$
  * $\mu = -\alpha$, on cherche y_0 sous la forme $y_0(t) = ate^{\mu t}$
- Si $f(t) = \gamma_1 \cos(\delta t) + \gamma_2 \sin(\delta t)$, on cherche y_0 sous la forme $y_0(t) = a_1 \cos(\delta t) + a_2 \sin(\delta t)$

2) Second ordre : $y''(t) + \alpha\, y'(t) + \beta\, y(t) = f(t)$.

a) Méthode générale (variation des constantes) : si $y_h(t) = A_1 y_1(t) + +A_2 y_2(t)$ alors on prend une solution particulière $y_0(t) = A_1(t)y_1(t) + A_2(t)y_2(t)$. On est amené à résoudre le système : $\begin{cases} A_1'(t)\, y_1(t) + A_2'(t)\, y_2(t) = 0 \\ A_1'(t)\, y_1'(t) + A_2'(t)\, y_2'(t) = f(t) \end{cases}$. La résolution du système permet de trouver $A_2'(t)$ et $A_2'(t)$: on a $A_1'(t) = \frac{-y_2(t)\, f(t)}{y_1(t)\, y_2'(t) - y_2(t)\, y_1'(t)}$ et $A_2'(t) = \frac{y_1(t)\, f(t)}{y_1(t)\, y_2'(t) - y_2(t)\, y_1'(t)}$ puis par intégration, on trouve $A_1(t)$ et $A_2(t)$ et enfin $y_0(t)$.

b) On cherche des solutions particulières « évidentes » en fonction de la nature de f(t) :

- Si $f(t) = P_n(t)$ (polynôme de degré n) alors $y_0(t) = Q_n(t)$ (polynôme de degré n)
- Si $f(t) = e^{\mu t}$: trois cas sont à envisager :

  * $\mu^2 + \alpha\mu + \beta \neq 0$ ($\mu \neq r_1$ et $\mu \neq r_2$), on cherche y₀ sous la forme $y_0(t) = ae^{\mu t}$.
  * $\mu^2 + \alpha\mu + \beta = 0$ et $2\mu + \alpha \neq 0$ ($\mu = r_1$ ou r_2), on cherche y_0 sous la forme $y_0(t) = ate^{\mu t}$.
  * $\mu^2 + \alpha\mu + \beta = 0$ et $2\mu + \alpha = 0$ ($\mu = r_1 = r_2$), on cherche y_0 sous la forme $y_0(t) = at^2e^{\mu t}$.
- Si $f(t) = \gamma_1\cos(\delta t) + \gamma_2\sin(\delta t)$, 2 cas sont possibles :

  * si $r_1 \neq i\delta$, on cherche y_0 sous la forme $y_0(t) = a_1\cos(\delta t) + a_2\sin(\delta t)$.
  * sinon, on cherche y_0 sous la forme $y_0(t) = a_1 t\cos(\delta t) + a_2 t\sin(\delta t)$.