ENSICAEN – 1A **2023-2024**
Matériaux et Chimie - FISE

MATHEMATIQUES

DIAGONALISATION DE MATRICES

(les matrices P données ne sont données qu'à titre d'exemples)

CORRIGE

1) $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$ $\quad D_A = \begin{bmatrix} 2+\sqrt{3} & 0 \\ 0 & 2-\sqrt{3} \end{bmatrix}$ $\quad P_A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ \sqrt{3} & -\sqrt{3} \end{bmatrix}$

<u>Cherchons les valeurs propres:</u>

$P_c(\lambda) = \text{dét}(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 \\ 3 & 2-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda)^2 - 3 = (2-\lambda-\sqrt{3})(2-\lambda+\sqrt{3})$ ou

$P_c(\lambda) = \lambda^2 + 4 - 4\lambda - 3 = \lambda^2 - 4\lambda + 1$ => deux racines simples réelles $\lambda = 2+\sqrt{3}$ et $\lambda = 2-\sqrt{3}$.
Donc A sera diagonalisable.

<u>Cherchons les vecteurs propres associés ou les sev propres:</u>

Pour $\lambda = 2+\sqrt{3}$, on a les équations suivantes pour les coordonnées (x,y) du vecteur propre $\begin{cases} 2x + y = (2+\sqrt{3})x \\ 3x + 2y = (2+\sqrt{3})y \end{cases}$ => $y = \sqrt{3}\,x$ => les vecteurs propres associés à la valeur propre $2+\sqrt{3}$ appartiennent tous au même sev de dimension 1, ils sont tous colinéaires à $\begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{3} \end{pmatrix}$.

Pour $\lambda = 2-\sqrt{3}$, on a les équations suivantes pour les coordonnées (x,y) du vecteur propre $\begin{cases} 2x + y = (2-\sqrt{3})x \\ 3x + 2y = (2-\sqrt{3})y \end{cases}$ soit $\begin{cases} \sqrt{3}x + y = 0 \\ 3x + \sqrt{3}y = 0 \end{cases}$ => $y = -\sqrt{3}\,x$ => les vecteurs propres associés à la valeur propre $2-\sqrt{3}$ appartiennent tous au même sev de dimension 1 et sont colinéaires à $\begin{pmatrix} 1 \\ -\sqrt{3} \end{pmatrix}$ d'où les résultats de la première ligne.

2) $B = \begin{bmatrix} 2 & i\sqrt{2} \\ -i\sqrt{2} & 3 \end{bmatrix}$ $\quad D_B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$ $\quad P_B = \begin{bmatrix} -i\sqrt{2} & 1 \\ 1 & -i\sqrt{2} \end{bmatrix}$

<u>Cherchons les valeurs propres:</u>

$P_c(\lambda) = \text{dét}(B - \lambda I) = \begin{vmatrix} 2-\lambda & i\sqrt{2} \\ -i\sqrt{2} & 3-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda)(3-\lambda) - (-2i^2) = \lambda^2 - 5\lambda + 4$ soit

$P_c(\lambda) = (2-\lambda)(3-\lambda) - (-2i^2) = \lambda^2 - 5\lambda + 4 = (\lambda-1)(\lambda-4)$ => deux racines simples réelles $\lambda = 1$ et $\lambda = 4$. Donc B sera diagonalisable.

<u>Cherchons les vecteurs propres associés ou les sev propres:</u>

Pour $\lambda = 1$, on a les équations suivantes pour les coordonnées (x,y) du vecteur propre $\begin{cases} 2\,x + i\sqrt{2}\;y = x \\ -i\sqrt{2}\;x + 3y = y \end{cases}$ => $2y = i\sqrt{2}\;x$ => les vecteurs propres associés à la valeur propre 1 appartiennent au même sev de dimension 1 et sont colinéaires à $\begin{pmatrix} -i\sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix}$.

Pour $\lambda = 4$, on a les équations suivantes pour les coordonnées (x,y) du vecteur propre $\begin{cases} 2\,x + i\sqrt{2}\;y = 4x \\ -i\sqrt{2}\;x + 3y = 4y \end{cases}$ soit $y = -i\sqrt{2}\;x$ => les vecteurs propres associés à la valeur propre 4 appartiennent tous au même sev de dimension 1 et sont colinéaires à $\begin{pmatrix} 1 \\ -i\sqrt{2} \end{pmatrix}$ d'où les résultats de la première ligne.

3) $C = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ $\quad D_C = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$ $\quad P_C = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

<u>Cherchons les valeurs propres:</u>

$P_c(\lambda) = \text{dét}(C - \lambda I) = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 & -2 \\ 1 & -\lambda & 0 \\ 0 & 1 & -\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda)(\lambda^2) - (-\lambda + 2) = -\lambda^3 + 2\lambda^2 + \lambda - 2$ ou

$P_c(\lambda) = -(\lambda - 2)(\lambda - 1)(\lambda + 1)$ => trois racines simples réelles $\lambda = 2$, $\lambda = 1$ et $\lambda = -1$. Donc C sera diagonalisable.

<u>Cherchons les vecteurs propres associés ou les sev propres:</u>

Pour $\lambda = 2$, on a les équations suivantes pour les coordonnées (x,y) du vecteur propre $\begin{cases} 2x + y - 2z = 2x \\ x + 0.y + 0.z = 2y \\ 0.x + y + 0.z = 2z \end{cases}$ soit $\begin{cases} y = 2z \\ x = 2y \end{cases}$ => ces deux équations correspondent à une droite vectorielle => les vecteurs propres associés à la valeur propre 2 appartiennent tous au même sev de dimension 1, ils sont tous colinéaires à $\begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Pour $\lambda = 1$, on a les équations suivantes pour les coordonnées (x,y) du vecteur propre $\begin{cases} 2x + y - 2z = x \\ x + 0.y + 0.z = y \\ 0.x + y + 0.z = z \end{cases}$ soit $\begin{cases} x = y \\ z = y \end{cases}$ => les vecteurs propres associés à 1 sont colinéaires à $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Pour $\lambda = -1$, on a les équations suivantes pour les coordonnées (x,y) du vecteur propre

$\begin{cases} 2x + y - 2z = -x \\ x + 0.y + 0.z = -y \\ 0.x + y + 0.z = -z \end{cases}$ soit $\begin{cases} x = -y \\ z = -y \end{cases}$ => les vecteurs propres associés à -1 sont colinéaires à $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Corrigés un peu moins détaillés …

4) $D = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 3 \end{bmatrix}$ $\quad D_D = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$ $\quad P_D = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

<u>Cherchons les valeurs propres :</u>

$P_c(\lambda) = (3-\lambda)(2-\lambda)(3-\lambda) - (2-\lambda) = -(\lambda-2)((3-\lambda)^2 - 1) = -(\lambda-2)(3-\lambda-1)(3-\lambda+1)$ ou

$P_c(\lambda) = -\lambda^3 + 8\lambda^2 - 20\lambda + 16 = -(\lambda-2)^2(\lambda-4)$ (2 est racine évidente d'où la factorisation)

=> une racine double $\lambda = 2$ et une racine simple $\lambda = 4$ (toutes deux réelles). D sera diagonalisable ssi le sev propre associé à la valeur propre 2 est de dimension 2 (plan vectoriel).

<u>Cherchons les vecteurs propres associés ou les sev propres:</u>

Pour $\lambda = 2$, on a les équations suivantes pour les coordonnées (x,y) du vecteur propre $\begin{cases} 3x - y + z = 2x \\ 0.x + 2y + 0.z = 2y \\ x - y + 3z = 2z \end{cases}$ soit $x - y + z = 0$ => c'est l'équation d'un plan vectoriel. On prend deux vecteurs non colinéaires pour engendrer le plan vectoriel, soit par ex. $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Pour $\lambda = 4$, le sev propre est une droite vectorielle telle que $z = x$ et $y = 0$ => par ex. $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

5) $E = \begin{bmatrix} 0 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \end{bmatrix}$ non diagonalisable dans R

diagonalisable dans C $\quad D_E = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2i & 0 \\ 0 & 0 & -2i \end{bmatrix}$ $\quad P_E = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & i & i \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$

<u>Cherchons les valeurs propres:</u>

$P_c(\lambda) = (-\lambda)(\lambda^2 + 4)$ => trois racines simples mais une seule réelle $\lambda = 0$ => E n'est pas diagonalisable dans R.

Dans C, 3 racines distinctes (0,2i et -2i) donc diagonalisable.

<u>Sev propres:</u> Pour $\lambda = 0$, le sev propre a pour équation $z = x$ et $y = 0$, soit par exemple la 1ère colonne de P_E.
Pour $\lambda = 2i$, le sev propre a pour équation $z = -x$ et $y = -ix$ soit par exemple la 2ème colonne de P_E.
Pour $\lambda = -2i$, le sev propre a pour équation $z = -x$ et $y = ix$ soit par exemple la 3ème colonne de P_E.

6) $F = \begin{bmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 2 & -3 & 2 \\ -1 & 2 & 0 \end{bmatrix}$ $D_F = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix}$ $P_F = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & -1 \end{bmatrix}$

Valeurs propres: $P_c(\lambda) = -\lambda^3 - \lambda^2 + 5\lambda - 3 = -(\lambda-1)^2(\lambda+3)$ => une racine double $\lambda = 1$ et une racine simple $\lambda = -3$ (toutes deux réelles). F sera diagonalisable ssi le sev propre associé à la valeur propre double ($\lambda = 1$) est de dimension 2 (plan vectoriel).

Sev propres: Pour $\lambda = 1$, on a pour les coordonnées (x,y) du vecteur propre l'équation suivante à vérifier $x - 2y + z = 0$ => c'est l'équation d'un plan vectoriel. F est diagonalisable. On prend deux vecteurs non colinéaires pour générer le plan vectoriel, soit par ex. les deux 1ères colonnes de P_F.

Pour $\lambda = -3$, le sev propre est une droite vectorielle telle que $z = -x$ et $y = 2x$ soit par exemple le vecteur de la 3ème colonne de P_F.

7) $G = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 4 \end{bmatrix}$ $D_G = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix}$ $P_G = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$

Valeurs propres: $P_c(\lambda) = -\lambda^3 + 12\lambda^2 - 45\lambda + 54 = -(\lambda-3)^2(\lambda-6)$ => une racine double $\lambda = 3$ et une racine simple $\lambda = 6$ (toutes deux réelles). G sera diagonalisable ssi le sev propre associé à la valeur propre double ($\lambda = 3$) est de dimension 2 (plan vectoriel).

Sev propres: Pour $\lambda = 3$, on a pour les coordonnées (x,y) du vecteur propre l'équation suivante à vérifier $x + y + z = 0$ => c'est l'équation d'un plan vectoriel. On prend deux vecteurs non colinéaires pour engendrer le plan vectoriel, soit par ex. les deux premières colonnes de P_G.

Pour $\lambda = 6$, le sev propre est une droite vectorielle telle que $z = x$ et $y = z$ soit par exemple le vecteur de la 3ème colonne de P_G.

8) $H = \begin{bmatrix} -1 & -1 & 2 \\ -2 & -1 & -2 \\ -2 & -1 & -1 \end{bmatrix}$

Valeurs propres: $P_c(\lambda) = -\lambda^3 - 3\lambda^2 - 3\lambda - 1 = -(\lambda+1)^3$ => une racine triple réelle $\lambda = -1$. H sera diagonalisable ssi le sev propre associé à la valeur propre triple ($\lambda = -1$) est de dimension 3 (dimension = ordre de multiplicité).

Sev propre: Pour $\lambda = -1$, on a pour les coordonnées (x,y) du vecteur propre l'équation suivante à vérifier $\begin{cases} -x-y+2z=-x \\ -2x-y-2z=-y \\ -2x-y-z=-z \end{cases}$ soit $\begin{cases} -y+2z=0 \\ -2x-2z=0 \\ -2x-y=0 \end{cases}$ => c'est l'équation d'une droite vectorielle $y=2z$ et $x=-z$. Le sev propre associée à la valeur triple est de dimension 1 => H non diagonalisable.