MATHEMATIQUES

DIAGONALISATION / TRIGONALISATION DE MATRICES

(les matrices P données ne sont données qu'à titre d'exemples)

$A_1 = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 2 \\ -2 & -1 & -2 \\ -2 & -1 & -1 \end{pmatrix}$

Le polynôme caractéristique $P_C(\lambda)$ = dét(A_1 - λI_3) vaut $P_C(\lambda) = -(\lambda+1)^3$.

Dans R : le polynôme admet 1 racine triple. La matrice est donc diagonalisable dans R ssi le sev associé à la valeur propre triple est de dimension 3. On cherche le sev propre associé à $\lambda = -1$: N_{-1} = Ker(A_1 + I_3).

Les vecteurs propres de ce sev vérifient les équations suivantes : $\begin{cases} -y+2z=0 \\ -2x-2z=0 \\ -2x-y=0 \end{cases}$ i.e. $\begin{cases} y=-2x \\ z=-x \end{cases}$ et appartiennent donc à une droite vectorielle dont un vecteur est : $u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix} = e_1 - 2e_2 - e_3$ => la matrice n'est pas diagonalisable ni dans R ni dans C.

Comme le polynôme caractéristique est scindé, la matrice est trigonalisable.

<u>Trigonalisation</u> : On prend comme nouvelle base la base B' = (u_1, e_1, e_2). Dans cette base, la matrice de l'application linéaire représentée par la matrice A_1 dans la base (e_1, e_2, e_3) est représentée par la matrice $M(f)_{(u1,e1,e2)} = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 0 & -3 & -2 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ car $f(e_1) = -e_1 - 2e_2 - 2e_3 = 2u_1 - 3e_1 + 2e_2$ et et $f(e_2) = -e_1 - e_2 - e_3 = u_1 - 2e_1 + e_2$.

On se place ensuite dans le sous-espace associé à (e_1, e_2), la matrice extraite est $B = \begin{pmatrix} -3 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ qui a pour valeur propre double –1. Un vecteur propre associé est tel que $y = -x$, soit par exemple $u_2 = e_1 - e_2$. On prend ensuite un troisième vecteur, par exemple $u_3 = e_2$. Dans cette nouvelle base, l'application linéaire est représentée par la matrice triangulaire : $T = M(f)_{(u1,u2,u3)} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ avec pour matrice de passage $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -2 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. On a bien sûr D = P.T.$P^{-1}$ (avec $P^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$).

<u>Forme de Jordan</u>:

On cherche une matrice de passage P telle que dans la nouvelle base, la matrice de l'application linéaire soit représentée par la matrice $J = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$. On aura donc A_1 = P.J.P^{-1} ou A_1.P = P.J. La 1ère colonne de P correspond à un vecteur propre de A_1. On prend donc $u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}$ comme 1ère colonne de P. Les deux suivantes sont des inconnues : $P = \begin{pmatrix} 1 & x_1 & x_2 \\ -2 & y_1 & y_2 \\ -1 & z_1 & z_2 \end{pmatrix}$. Si on écrit l'égalité des produits matriciels A_1.P = P.J, on obtient les équations suivantes : $\begin{cases} -x_1 - y_1 + 2z_1 = 1 - x_1 \\ -2x_1 - y_1 - 2z_1 = -2 - y_1 \\ -2x_1 - y_1 - z_1 = -1 - z_1 \end{cases}$ et $\begin{cases} -x_2 - y_2 + 2z_2 = x_1 - x_2 \\ -2x_2 - y_2 - 2z_2 = y_1 - y_2. \\ -2x_2 - y_2 - z_2 = z_1 - z_2 \end{cases}$

On a donc $\begin{cases} 2z_1 = 1 + y_1 \\ 2x_1 = 1 - y_1 \end{cases}$, on choisit par exemple de prendre $y_1 = 1, x_1 = 0$ et $z_1 = 1$. On en déduit les équations pour (x_2, y_2, z_2) : $\begin{cases} -y_2 + 2z_2 = x_1 = 0 \\ -2x_2 - 2z_2 = y_1 = 1 \\ -2x_2 - y_2 = z_1 = 1 \end{cases}$ soit $\begin{cases} y_2 = 2z_2 \\ 2x_2 = -1 - 2z_2 \end{cases}$. On choisit par exemple $y_2 = 1, x_2 = -1$ et $z_2 = 1/2$.

On en déduit $\mathrm{P} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -2 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1/2 \end{pmatrix}$ et $\mathrm{P}^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & -2 & 2 \\ 0 & -1 & 2 \\ -2 & -2 & 2 \end{pmatrix}$.

$\mathrm{A}_2 = \begin{pmatrix} 9/2 & -1 & 1 \\ 3/4 & 7/2 & 1/2 \\ 1/2 & 0 & 4 \end{pmatrix}$

Le polynôme caractéristique $P_C(\lambda) = \text{dét}(A_2 - \lambda I_3)$ vaut $P_C(\lambda) = -(\lambda - 4)^3$.

Dans R : le polynôme admet 1 racine triple. La matrice est donc diagonalisable dans R ssi le sev associé à la valeur propre triple est de dimension 3. On cherche le sev propre associé à $\lambda = 4$: $N_4 = \mathrm{Ker}(I - 4I_3)$.

Les vecteurs propres de ce sev vérifient les équations suivantes : $\begin{cases} \frac{1}{2}x - y + z = 0 \\ \frac{3}{4}x - \frac{1}{2}y + \frac{1}{2}z = 0 \\ \frac{1}{2}x = 0 \end{cases}$ i.e. $\begin{cases} x = 0 \\ y = z \end{cases}$ et appartiennent donc à une droite vectorielle dont un vecteur est : $\mathrm{u}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \mathrm{e}_2 + \mathrm{e}_3$ => la matrice n'est pas diagonalisable ni dans R ni dans C.

Comme le polynôme caractéristique est scindé, la matrice est trigonalisable.

<u>Trigonalisation</u> : On prend comme nouvelle base la base B' = (u_1, e_1, e_2) . Dans cette base, la matrice de l'application linéaire représentée par la matrice A_2 dans la base (e_1, e_2, e_3) est représentée par la matrice

$\mathrm{M(f)}_{(u1,e1,e2)} = \begin{pmatrix} 4 & 1/2 & 0 \\ 0 & 9/2 & -1 \\ 0 & 1/4 & 7/2 \end{pmatrix}$ car $\mathrm{f}(\mathrm{e}_1) = \frac{9}{2}\mathrm{e}_1 + \frac{3}{4}\mathrm{e}_2 + \frac{1}{2}\mathrm{e}_3 = \frac{1}{2}\mathrm{u}_1 + \frac{9}{2}\mathrm{e}_1 + \frac{1}{4}\mathrm{e}_2$ et $\mathrm{f}(\mathrm{e}_2) = -\mathrm{e}_1 + \frac{7}{2}\mathrm{e}_2$.

On se place ensuite dans le sous-espace associé à (e_1, e_2), la matrice extraite est $\mathrm{B} = \begin{pmatrix} \frac{9}{2} & -1 \\ \frac{1}{4} & \frac{7}{2} \end{pmatrix}$ qui a pour valeur propre double 4. Un vecteur propre associé est tel que $y = \frac{x}{2}$, soit par ex. $u_2 = 2e_1 + e_2$. On prend ensuite un troisième vecteur, par exemple $\mathrm{u}_3 = \mathrm{e}_2$. Dans cette nouvelle base, l'application linéaire est représentée par la matrice triangulaire : $\mathrm{T} = \mathrm{M(f)}_{(u1,u2,u3)} = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & -1/2 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$ avec pour matrice de passage $\mathrm{P} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. On a bien sûr $A_2 = P.T.P^{-1}$ (avec $\mathrm{P}^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1/2 & 0 & 0 \\ -1/2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$).

<u>Forme de Jordan</u> :

On cherche une matrice de passage P telle que dans la nouvelle base, la matrice de l'application linéaire soit représentée par la matrice $\mathrm{J} = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$. On aura donc $A_2 = P.J.P^{-1}$ ou $A_2.P = P.J$. La 1ère colonne de P correspond à un vecteur propre de A_2. On prend donc $\mathrm{u}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ comme 1ère colonne de P. Les deux suivantes sont des inconnues : $\mathrm{P} = \begin{pmatrix} 0 & x_1 & x_2 \\ 1 & y_1 & y_2 \\ 1 & z_1 & z_2 \end{pmatrix}$. Si on écrit l'égalité des produits matriciels $A_2.P = P.J$, on obtient les équations suivantes : $\begin{cases} \frac{9}{2}x_1 - y_1 + z_1 = 4x_1 \\ \frac{3}{4}x_1 + \frac{7}{2}y_1 + \frac{1}{2}z_1 = 1 + 4y_1 \\ \frac{1}{2}x_1 + 4z_1 = 1 + 4z_1 \end{cases}$ et $\begin{cases} \frac{9}{2}x_2 - y_2 + z_2 = x_1 + 4x_2 \\ \frac{3}{4}x_2 + \frac{7}{2}y_2 + \frac{1}{2}z_2 = y_1 + 4y_2 \\ \frac{1}{2}x_2 + 4z_2 = z_1 + 4z_2 \end{cases}$.

On a donc $\begin{cases} \frac{1}{2}x_1 - y_1 + z_1 = 0 \\ \frac{3}{4}x_1 - \frac{1}{2}y_1 + \frac{1}{2}z_1 = 1 \\ \frac{1}{2}x_1 = 1 \end{cases}$ soit $\begin{cases} z_1 = -1 + y_1 \\ x_1 = 2 \end{cases}$, on choisit par exemple de prendre $x_1 = 2, y_1 = 2$ et $z_1 = 1$. On en déduit les équations pour (x_2, y_2, z_2) : $\begin{cases} \frac{1}{2}x_2 - y_2 + z_2 = 2 \\ \frac{3}{4}x_2 - \frac{1}{2}y_2 + \frac{1}{2}z_2 = 2 \\ \frac{1}{2}x_2 = 1 \end{cases}$ soit $\begin{cases} x_2 = 2 \\ z_2 = 1 + y_2 \end{cases}$.

On choisit par exemple $x_2 = 2, y_2 = 1$ et $z_2 = 2$.

On en déduit $\mathrm{P} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ et $\mathrm{P}^{-1} = \begin{pmatrix} -3/4 & 1/2 & 1/2 \\ 1/4 & 1/2 & -1/2 \\ 1/4 & -1/2 & 1/2 \end{pmatrix}$.

.