ENSICAEN – 1A **2023-2024**

Matériaux et Chimie - FISE

COMPLEMENT SUR LA DIAGONALISATION DES MATRICES

Définition des valeurs propres et vecteurs propres:

On considère f un endomorphisme de E. Diagonaliser la matrice de f, c'est rechercher les vecteurs x non nuls tels que $f(x) = \lambda x$.

x est vecteur propre de f si **1)** il est non nul

2) f(x) est colinéaire à x.

Ou x est vecteur propre de f ssi $x \neq 0$ et $\exists \lambda \in K \quad f(x) = \lambda x$.

Si x est vecteur propre de f, il existe un unique scalaire λ tel que $f(x) = \lambda x$. λ est appelée valeur propre associée à x. On a donc aussi $f(x) - \lambda x = (f - \lambda I)(x) = 0$.

Théorème (dimension finie) : λ est valeur propre de f ssi $\text{dét}(f - \lambda I) = 0$

Polynômes caractéristiques: $A \in M_{(n,n)}(K)$. A matrice représentant l'endomorphisme f.

On appelle polynôme caractéristique de A le polynôme déterminant $P_C(\lambda) = \text{dét}(A - \lambda I)$ i.e.

$$P_C(\lambda) = \begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & a_{2n} \\ a_{31} & & \\ & & \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{nn} - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

. On a $P_C(\lambda) = (-\lambda)^n + (-\lambda)^{n-1}\text{Tr}(f) + \ldots + \text{dét}(f)$.

C'est le polynôme caractéristique de l'endomorphisme f (il est indépendant de la base choisie) :

Tr(f) désigne la trace de l'endomorphisme. La trace (somme des termes diagonaux) est indépendante de la base.

Recherche des valeurs propres:

1) On forme le polynôme caractéristique $P_C(\lambda) = \text{dét}(A - \lambda I)$.

2) On cherche les racines du polynôme caractéristique soit les valeurs de λ telles que $P_C(\lambda) = 0$.

* dans C (corps des complexes), le polynôme caractéristique de f admet n racines, on dit que tout polynôme dans C est scindé (corps algébriquement clos).

* dans R (corps des réels), il existe des polynômes non scindés, la matrice A ne sera ni diagonalisable ni trigonalisable dans R. Si le polynôme est scindé, la matrice est a minima trigonalisable, à savoir

qu'il existe une matrice semblable T (représentant le même endomorphisme) vérifiant A = P.T.P^{-1} où T désigne une matrice triangulaire.

Base de vecteurs propres (associée à D) ou base associée à T:

On a trouvé les k valeurs propres de f : λ_1, λ_2… , λ_k. Deux cas sont possibles :

1) les k valeurs propres sont toutes distinctes (k = n)

On trouve les vecteurs propres associés (x_1, x_2, x_n). On a des sev propres qui sont en somme directe : $E = N_{\lambda_1} \oplus N_{\lambda_2} \oplus ... N_{\lambda_n}$: (x_1, x_2, x_n) est une base de vecteurs propres. Dans cette base, la matrice est diagonale $D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{bmatrix} = M(f)_{(x_1, x_2, ..., x_n)}$.

Il existe une matrice de passage P (inversible) telle que $D = P^{-1}.A.P$.

2) Il existe des valeurs propres multiples (ex : λ_0 est valeur propre d'ordre h). La dimension du sev propre est inférieure ou égale à h. Si pour toutes les valeurs propres multiples, on a égalité entre la dimension du sev propre et h, la matrice est diagonalisable. Dans le cas contraire, on peut trigonaliser la matrice.

Remarque : $\mathrm{Tr}(f) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii} = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i$ et $\mathrm{dét}(f) = \prod_{i=1}^{n} \lambda_i$