ÉCOLE PUBLIQUE D'INGÉNIEURS
CENTRE DE RECHERCHE

Année universitaire 2021–2022

1ère année
Matériaux et Chimie

Examen de Mathématiques

Semestre 5 – lundi 10 janvier 2022

Durée : 1h 30min

Documents et calculatrices interdits.
Les réponses non justifiées ne vaudront pas de point.

Les exercices sont indépendants et le barème n'est donné qu'à titre indicatif.

Exercice 1. *(8 points)*

Le plan est muni du repère cartésien orthonormal direct $(O, \vec{u}_x, \vec{u}_y)$. Soit le point $A\left(0, \frac{1}{2}\right)$ et l'ellipse Ω d'équation $g(x, y) = 0$ où la fonction g est définie par $g(x, y) = 3x^2 + y^2 - 1$.

a) Soit $P(x_0, y_0)$ un point de Ω. Calculer le gradient $\vec{\nabla} g(x_0, y_0)$, puis en déduire un vecteur directeur $\vec{v}(x_0, y_0)$ de la droite tangente à l'ellipse au point P.

b) Le carré de la distance entre le point A et un point M de cordonnées (x, y) est donné par la fonction

$$f(x, y) = x^2 + \left(y - \frac{1}{2}\right)^2.$$

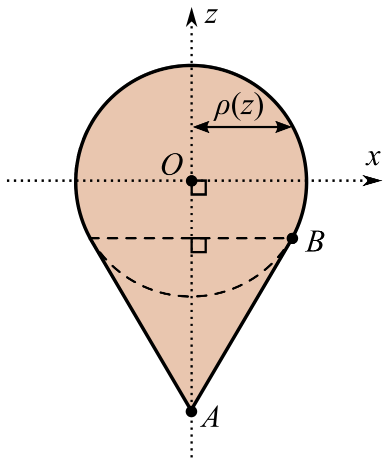
En utilisant la méthode des multiplicateurs de Lagrange, déterminer les extrema de f pour M restreint à l'ellipse Ω, et préciser leurs natures (maximum ou minimum).

Exercice 2. *(3 points)*

Soit la boule $\mathscr{B} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 \leq 1\}$ et le cube $\mathscr{K} = [-1, 1]^3$. Le domaine $\mathscr{D} = \mathscr{K} \setminus \mathscr{B} = \{(x, y, z) \in \mathscr{K} \mid x^2 + y^2 + z^2 > 1\}$ est la partie du cube $\mathscr{K}$ privé de $\mathscr{B}$. Calculer les intégrales $I = \iiint_{\mathscr{B}} (x^2 + y^2)\, dx\, dy\, dz$ et $J = \iiint_{\mathscr{D}} (x^2 + y^2)\, dx\, dy\, dz$.

Exercice 3. *(4 points)*

L'espace est muni du repère cartésien orthonormal direct $(O, \vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z)$. Soit $\mathscr{D}$ un domaine qui possède la symétrie de révolution autour de l'axe Oz. Sa tranche S_z à la cote z est un disque horizontal, centré sur l'axe Oz. L'intersection de $\mathscr{D}$ avec le plan Oxz est représentée sur la figure ci-contre. Le haut de $\mathscr{D}$ est délimité par une sphère de centre O et de rayon $R = 2$. Le bas de $\mathscr{D}$ est délimité par un cône droit d'axe Oz et de sommet situé en $A(0, 0, -4)$.



a) Le cône et la sphère sont tangents au point $B(x_B, 0, z_B)$. Montrer que $x_B = \sqrt{3}$ et $z_B = -1$.

b) Déterminer le rayon $\rho(z)$ de la tranche S_z pour la cote $z \in [-4, -1]$, et pour $z \in [-1, 2]$.

c) Calculer le volume V du domaine $\mathscr{D}$.

Exercice 4. *(7 points)*

Soit le domaine carré $\mathscr{D} = [1, 2]^2$.

a) Calculer $I = \displaystyle\int_1^2 \left(\int_1^2 y\,\mathrm{e}^{xy}\, dx \right) dy$.

b) Montrer que $\displaystyle\iint_{\mathscr{D}} x\,\mathrm{e}^{xy}\, dx\, dy = I$, puis en déduire la valeur de $J = \displaystyle\iint_{\mathscr{D}} (x + y)\,\mathrm{e}^{xy}\, dx\, dy$.

c) Soit l'application $\Phi : (x, y) \mapsto \left(\frac{y^2}{x}, \frac{x^2}{y} \right)$. On admettra sans démonstration que c'est un $\mathscr{C}^1$-difféomorphisme de $\left(\mathbb{R}_+^*\right)^2$ sur $\left(\mathbb{R}_+^*\right)^2$. Calculer son jacobien $\det J_\Phi(x, y)$.

d) Soit le domaine $\Delta = \{(x, y) \in (\mathbb{R}_+)^2 \mid \sqrt{x} \le y \le \sqrt{2x},\ \frac{x^2}{2} \le y \le x^2\}$.
Calculer l'intégrale $K = \displaystyle\iint_\Delta \frac{x^3 + y^3}{xy}\,\mathrm{e}^{xy}\, dx\, dy$.