ENSI CAEN
ÉCOLE PUBLIQUE D'INGÉNIEURS
CENTRE DE RECHERCHE

Année universitaire 2021–2022

$1^{\text{ère}}$ année
Matériaux et Chimie

Examen de Mathématiques

Semestre 5 – Partiel, mercredi 10 novembre 2021

Durée : 1h 30min

Documents et calculatrices programmables interdits
Les réponses non justifiées ne vaudront pas de point

Le barème n'est donné qu'à titre indicatif

Exercice 1. *(7 points)*

L'espace étant muni du repère orthonormé direct $(O, \vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z)$, on étudie le mouvement d'une particule qui se déplace dans le plan Oxy. Elle possède une masse de 1 kg et une charge $q > 0$. Elle est soumise au champ électrique uniforme $\vec{E} = E\vec{u}_x$, au champ magnétique uniforme $\vec{H} = H\vec{u}_z$ et à la force de frottement fluide de coefficient γ. $E > 0$, $H > 0$ et $\gamma \geq 0$ sont des constantes. Son vecteur vitesse dans le plan $V(t) = \begin{pmatrix} v_x(t) \\ v_y(t) \end{pmatrix}$ vérifie alors le système différentiel

$$V'(t) = AV(t) + B$$

où $A = \begin{pmatrix} -\gamma & \omega \\ -\omega & -\gamma \end{pmatrix}$ avec $\omega = qH$, et $B = \begin{pmatrix} qE \\ 0 \end{pmatrix}$.

a. Déterminer les solutions **réelles** du système différentiel.

b. Pour $\gamma = 0$, calculer les vitesses moyennes $\langle v_x \rangle = \dfrac{1}{T}\displaystyle\int_0^T v_x(t)\,dt$ et $\langle v_y \rangle = \dfrac{1}{T}\displaystyle\int_0^T v_y(t)\,dt$, avec $T = \frac{2n\pi}{\omega}$ et $n \in \mathbb{N}^*$.

Exercice 2. *(7 points)*

On souhaite trouver les extrema locaux de la fonction $f\ : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x,y,z) \ = \ \cos(x) \ + \ \cos(y)\cos(z).$$

a. Déterminer les points critiques de f qui appartiennent au cube $K = [0,\pi] \times [0,\pi] \times [0,\pi]$.

b. Calculer la matrice hessienne $H_f(x,y,z)$ de la fonction au point (x,y,z).

c. Etudier la nature (maximum, minimum...) des points critiques se trouvant dans K à l'abscisse $x = 0$.

Exercice 3. *(7 points)*

On cherche les fonctions f à valeurs réelles, de classe $\mathscr{C}^1$ sur le demi-plan $\mathscr{P}_1 = \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$, qui vérifient l'équation aux dérivées partielles

$$(E): \quad 2xy\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) \ + \ (1+y^2)\,\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 0.$$

Pour cela, on introduit la fonction F définie par $F(a,b) = f(X,Y)$ avec $X = \dfrac{a^2+b^2}{2}$ et $Y = \dfrac{a}{b}$ pour tout $(a,b) \in \mathscr{P}_2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^*$.

a. Pour un couple donné $(x,y) \in \mathscr{P}_1$, déterminer $(A,B) \in \mathscr{P}_2$ qui vérifient $\dfrac{A^2+B^2}{2} = x$ et $\dfrac{A}{B} = y$.

b. Exprimer les dérivées partielles de F en fonction de celles de f.

c. En déduire que $\forall (a,b) \in \mathscr{P}_2$,

$$\frac{\partial f}{\partial x}(X,Y) = \frac{1}{a^2+b^2}\left(a\,\frac{\partial F}{\partial a}(a,b) \ + \ b\,\frac{\partial F}{\partial b}(a,b)\right).$$

d. Déterminer une expression similaire pour $\dfrac{\partial f}{\partial y}(X,Y)$.

e. En déduire les solutions f de l'équation (E).