③ NOTIONS DE BASE

SUR LA

TRANSFORMEE EN Z

LA TRANSFORMEE EN Z

I - TRANSFORMEE DE LAPLACE DES SIGNAUX DISCRETS

I.1 – rappels sur la Transformée de Laplace :

Pour un signal quelconque la transformée de Laplace (TL) est définie par :

$$\boxed{\begin{array}{l} p = \sigma + j\omega \\ TL[x(t)] = X(p) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\, e^{-pt} dt \end{array}}$$

Les mathématiques ayant largement développé les conditions d'existence et l'abscisse de convergence σ_0 de cette transformée. Cette transformation est la transformée bilatérale.

Grand nombre de signaux étudiés n'ont d'existence que pour $t \geq 0$. Ce sont les signaux causaux pour lesquels la définition devient :

$$\boxed{\begin{array}{l} p = \sigma + j\omega \\ TL[x(t)] = X(p) = \int_{0-}^{+\infty} x(t)\, e^{-pt} dt \end{array}}$$

C'est la transformée de Laplace monolatérale qui est celle qui est utilisée par défaut. C'est en particulier celle dont les résultats sont portés dans les tables habituelles.

La transformée de Laplace est une fonction de la variable complexe p et il existe une transformation inverse qui est une intégration dans le plan complexe :

$$\boxed{\begin{array}{l} p = \sigma + j\omega \\ TL^{-1}[X(p)] = x(t) = \frac{1}{2j\pi} \int_{c-j\infty}^{c+j\infty} X(p)\, e^{pt} dp \end{array}}$$

La transformée de Laplace est un outil puissant pour aider à résoudre les équations différentielles à coefficients constants avec ou sans conditions initiales. Largement utilisée dans l'étude des signaux continus et des systèmes continus linéaires invariants dans le temps, elle amène la notion de fonction de transfert qui permet de substituer à la lourde résolution de systèmes d'équations différentielles un calcul à base de polynômes pour lesquels les mathématiques fournissent un grand nombre d'outils. Lors de la résolution des équations différentielles linéaires à coefficients constants la transformée qui est utilisée est la transformée monolatérale. Dans ce cas, causal ou non, le signal n'est pris en compte que sur l'intervalle de temps [0 ; +∞] et les théorèmes de la dérivation et de l'intégration permettent de tenir compte (pour les signaux non causaux) des conditions initiales éventuelles.

I.2 - Cas des signaux discrets:

Un signal discret est modélisé mathématiquement par pondération d'une distribution peigne de Dirac par les échantillons $\{x_k\}$ du signal :

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x_k \, \delta(t - kT_s),$$

T_s étant l'intervalle entre deux échantillons successifs, appelée période d'échantillonnage. Nous nous contenterons des résultats pour des signaux à période d'échantillonnage constante.

résultat mathématique fondamental:

La transformée de Laplace peut se généraliser a certaines distributions et en particulier aux distributions singulières comme la distribution de Dirac $\delta(t)$. Cette théorie permet de démontrer que:

$$\boxed{TL[\delta(t - t_0)] = e^{-pt_0}}$$

Première formulation :

En utilisant le résultat précédent pour calculer la transformée de Laplace d'un signal discret il vient immédiatement:

$$\boxed{TL[x(t)] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x_k \, e^{-pkT_s}}$$

Si nous ne prenons en compte que la partie $t \geq 0$ d'un signal (causal ou non), nous utilisons alors la transformée monolatérale définie par:

$$\boxed{TL[x(t)] = \sum_{k=0}^{+\infty} x_k \, e^{-pkT_s}}$$

remarque: ces expressions font intervenir des exponentielles en p et nous avons donc perdu, à ce stade, le côté polynomial de la transformée de Laplace.

Seconde formulation :

Ce paragraphe, fondamental du point de vue des mathématiques, l'est moins si nous nous fixons un objectif d'utilisation et d'application. Dans ce cours, il peut être ignoré dans une première lecture et ensuite repris pour compléter et renforcer sa culture mathématique. Il implique comme pré-requis de savoir conduire une intégration dans le plan complexe.

Son application essentielle est de permettre de travailler sur des signaux discrets provenant de l'échantillonnage d'un signal continu $x_c(t)$. Nous nous limiterons aussi uniquement au cas de la transformée monolatérale:

$$x(t) = \sum_{k=0}^{+\infty} x_k \, \delta(t - kT_s) = x_c(t) \sum_{k=0}^{+\infty} \delta(t - kT_s)$$

$$TL[x_c(t)] = X_c(p) = \int_{0-}^{+\infty} x_c(t) \, e^{-pt} dt \qquad TL^{-1}[X_c(p)] = x_c(t) = \frac{1}{2j\pi} \int_{c-j\infty}^{c+j\infty} X_c(p) \, e^{pt} dp$$

$$x_k = x_c(t = kT_s) = \frac{1}{2j\pi}\int_{c-j\infty}^{c+j\infty} X_c(p)\, e^{pkT_s} dp$$

En utilisant la première formulation :

$$TL[x(t)] = \sum_{k=0}^{+\infty} x_k\, e^{-pkT_s} = \sum_{k=0}^{+\infty}\left[\frac{1}{2j\pi}\int_{c-j\infty}^{c+j\infty} X_c(p')\, e^{p'kT_s} dp'\right] e^{-pkT_s}$$

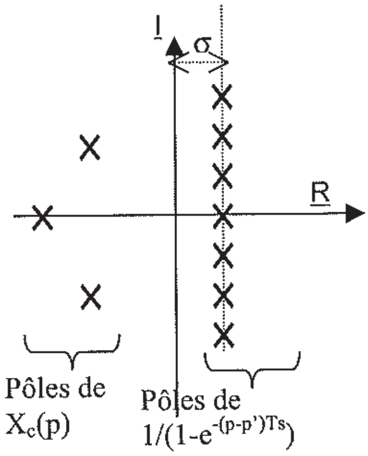
$$= \frac{1}{2j\pi}\int_{c-j\infty}^{c+j\infty} X_c(p')\left[\sum_{k=0}^{+\infty} e^{-(p-p')kT_s}\right] dp' = \frac{1}{2j\pi}\int_{c-j\infty}^{c+j\infty} X_c(p')\left[\frac{1}{1-e^{-(p-p')T_s}}\right] dp'$$

$$= X_c(p) \otimes \frac{1}{1-e^{-pT_s}}$$

La fonction à intégrer dans le plan complexe est : $\dfrac{X_c(p')}{1-e^{-(p-p')T_s}}$.

L'intégration peut être réalisée de deux manières selon le contour d'intégration choisi. Les pôles de cette fonction sont séparables en deux classes :

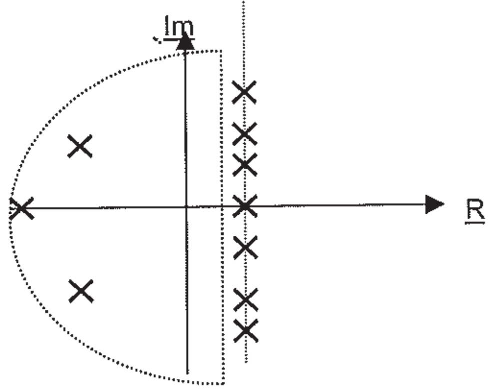
- Ceux provenant de $X_c(p')$ qui sont en nombre fini et situés dans le demi-plan gauche si $x_c(t)$ est stable.
- ceux provenant de $\dfrac{1}{1-e^{-(p-p')T_s}}$. Tels que $e^{-(p-p')Ts}=1 \Rightarrow (p-p')T_s=-j2k\pi \Rightarrow p'=p+j2k\pi/T_s$. Ils sont en nombre infini.



Le contour d'intégration peut être fermé par la gauche ou par la droite en assurant la condition c<σ.

Fermeture par la gauche: on englobe les pôles de $X_c(p')$

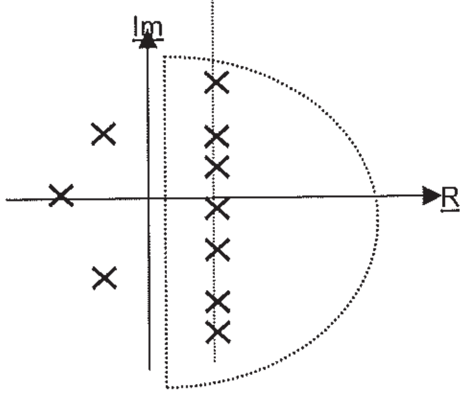
Fermeture par la droite: on englobe l'infinité de pôles dus à $\dfrac{1}{1-e^{-(p-p')T_s}}$



<u>Fermeture du contour par la gauche :</u>

Les seuls points singuliers à l'intérieur du contour d'intégration sont ceux de $X_c(p')$. Grâce aux résidus l'intégration donnera pour le calcul de X(p) :

$$\boxed{TL[x(t)] = \sum_{/\,\text{pôles de } X_c(p)} \text{Résidus}\left[\frac{X_c(p')}{1-e^{-(p-p')T_s}}\right]}$$



<u>Fermeture du contour par la droite :</u>

pour une racine simple p_i d'un polynôme Q(p) on a :

$$Q(p)=K\prod_j (p-p_j) \quad \Rightarrow \quad \left[\frac{Q(p)}{p-p_i}\right]_{p=p_i} = \left[K\prod_{j\neq i}(p-p_j)\right]_{p=p_i} = \left[\frac{d}{dp}Q(p)\right]_{p=p_i}$$

En appliquant cela au calcul des résidus pour intégrer sur le contour, les points singuliers concernés étant les pôles simples $p_i=p+j2i\pi/T_s$ de $1/(1-e^{-(p-p')Ts})$. Ceci donne compte tenu d'un signe – dû au sens de parcours :

$$TL[x(t)] = -\sum_{/\text{racines de }\left(1-e^{-(p-p')T_s}\right)} \text{Résidus}\left[\frac{X_c(p')}{1-e^{-(p-p')T_s}}\right] = -\sum_i \left[\frac{X_c(p')(p'-p_i)}{1-e^{-(p-p')T_s}}\right]_{p'=p_i}$$

$$= -\sum_{i=-\infty}^{+\infty}\left[\frac{X_c(p')}{\frac{d}{dp'}\left[1-e^{-(p-p')T_s}\right]}\right]_{p'=p_i} = -\sum_{i=-\infty}^{+\infty}\left[\frac{X_c(p_i)}{-T_s e^{-(p-p_i)T_s}}\right] = \sum_{i=-\infty}^{+\infty}\left[\frac{1}{T_s}X_c(p+j\frac{2i\pi}{T_s})\right]$$

$$=> \boxed{TL[x(t)] = \sum_{i=-\infty}^{+\infty}\left[\frac{1}{T_s}X_c(p+j\frac{2i\pi}{T_s})\right]}$$

Ce résultat exprime le fait que la transformée de Laplace du signal discret est obtenue par périodisation puis superposition de la TL du signal continu dans des bandes de fréquence de largeur $1/T_s$. Nous trouvons ainsi le théorème de Shannon. Si le passage à la transformée de Fourier est possible $p=j2\pi f$, on retrouve le théorème de Shannon avec le repliement fréquentiel :

$$\boxed{TF[x(t)] = \sum_{i=-\infty}^{+\infty}\left[\frac{1}{T_s}X_c\left[j2\pi(f+\frac{i}{T_s})\right]\right]}$$

II – LA TRANSFORMATION EN Z :

II.1 - Définition :

Elle provient de la remarque faite lors de la première formulation de la transformée de Laplace d'un signal échantillonné

$$TL[x(t)] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x_k\, e^{-pkT_s}$$

Pour retrouver une forme polynomiale d'une variable complexe, on effectue le changement de variable $z=e^{pTs}$. Nous retrouvons ainsi les expressions suivantes qui sont prises comme définition mathématique de la transformée en Z:

Transformée bilatérale : $\boxed{TZ[x(t)] = X(z) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x_k\, z^{-k}}$

Transformée monolatérale $\boxed{TZ[x(t)] = X(z) = \sum_{k=0}^{+\infty} x_k\, z^{-k}}$

II.2 - Convergence :

La transformation en Z est une série infinie et cela implique que l'on se pose le problème de convergence de cette série et donc d'existence de la transformée en Z.

<u>résultat:</u> la série n'existe que pour certaines valeurs de z pour lesquelles elle converge ce qui définit la région de convergence de la série. Cette région de convergence est un anneau.

<u>preuve:</u>

Pour déterminer la région de convergence d'une série, on utilise le théorème de Cauchy :

$\sum_{k=0}^{+\infty} u_k$ converge si $\lim_{k\to+\infty} |u_k|^{\frac{1}{k}} < 1$. Ce critère s'applique à la transformée en z en la décomposant comme suit :

$$X(z) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x_k z^{-k} = \sum_{k=-\infty}^{-1} x_k z^{-k} + \sum_{k=0}^{+\infty} x_k z^{-k} = X_1(z) + X_2(z)$$

Compte tenu des définitions précédentes, $X_2(z)$ est appelée <u>partie causale</u> de la transformée en Z et $X_1(z)$ <u>partie anticausale</u>

En appliquant le critère de Cauchy à la partie causale $X_2(z)$ il vient :

$$\lim_{k\to+\infty} \left|x_k z^{-k}\right|^{\frac{1}{k}} < 1 \text{ soit } \lim_{k\to+\infty} |x_k|^{\frac{1}{k}} \left|z^{-1}\right| < 1$$

ce qui donne la condition de convergence de la série :

$|z| > R_-$ avec $R_- = \lim_{k\to+\infty} |x_k|^{\frac{1}{k}}$. $\Rightarrow$ z doit donc être à l'extérieur d'un cercle de rayon R_-.

L'application du critère de Cauchy à la partie anticausale $X_1(z)$ est semblable à un changement d'indice près ($k \to -k$) :

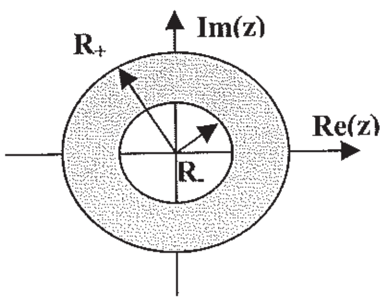
$$X_1(z) = \sum_{k=-\infty}^{-1} x_k z^{-k} = \sum_{k=1}^{\infty} x_{-k} z^{k}.$$

La condition de convergence sera alors

$$\lim_{k\to+\infty} \left|x_{-k} z^{k}\right|^{\frac{1}{k}} < 1 \text{ soit } \lim_{k\to+\infty} |x_{-k}|^{\frac{1}{k}} |z| < 1$$

ce qui donne la condition de convergence de la série :

$|z| < R_+$ avec $R_+ = \left[\lim_{k\to+\infty} |x_{-k}|^{\frac{1}{k}}\right]^{-1}$ $\Rightarrow$ z doit donc être à l'intérieur d'un cercle de rayon R_+.



D'où le résultat général: la série converge dans un anneau du plan complexe z : l'anneau de convergence. $R_- < |z| < R_+$

Pour une séquence causale, seule $X_2(z)$ existe et la convergence, si elle existe, est à l'extérieur d'un cercle de rayon R_-.

Nous retrouvons ici une similitude avec le domaine de convergence de la transformée de Laplace.

II.3 - Calcul de la transformée en Z (cas monolatéral) :

Calcul direct à partir de la définition :

Quelques exemples :

- $x_c(t) = e(t) \quad x_k = 1 \quad k \geq 0 \Rightarrow X(z) = \sum_{k=0}^{+\infty} z^{-k} = \frac{1}{1-z^{-1}} = \frac{z}{z-1}$ avec $R_- = \lim_{k \to +\infty} |1|^{\frac{1}{k}} = 1$

- $x_c(t) = e^{\alpha t} e(t) \quad x_k = e^{\alpha k T_s} \quad k \geq 0 \Rightarrow X(z) = \sum_{k=0}^{+\infty} e^{\alpha k T_s} z^{-k} = \frac{1}{1 - e^{\alpha T_s} z^{-1}} = \frac{z}{z - e^{\alpha T_s}}$ avec

$R_- = \lim_{k \to +\infty} \left| e^{\alpha k T_s} \right|^{\frac{1}{k}} = e^{\alpha T_s}$ si $\alpha = 0$, $R_- = 1$ on retrouve le résultat précédent. Si $\alpha > 0$ $R_- > 1$ et si $\alpha < 0$ $R_- < 1$.

A partir de la seconde formulation de la transformée de Laplace :

(Paragraphe à ignorer si on a fait l'impasse sur le paragraphe seconde formulation)

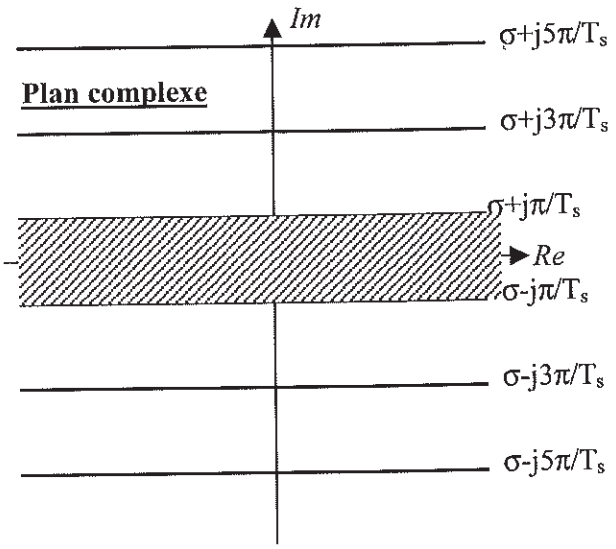
$$x_c(t) = e^{-\alpha t} e(t) \rightarrow \quad TL[x_c(t)] = \frac{1}{p+\alpha} \rightarrow \quad TL[x(t)] = \sum_{p'=-\alpha} \text{Résidus}\left[\frac{1}{(p+\alpha)(1 - e^{-(p-p')T_s})}\right]$$

$$= \left[\frac{1}{(1 - e^{-(p-p')T_s})}\right]_{p'=-\alpha} = \frac{1}{(1 - e^{-\alpha T_s} e^{-pT_s})} \xrightarrow{e^{pT_s} = z} TZ[x(t)] = \frac{1}{(1 - e^{-\alpha T_s} z^{-1})}$$

II.4 - Lien avec la transformée de Laplace :

Le passage du plan de Laplace au plan z se fait par le changement de variable $z = e^{pTs}$. Quels sont les effets d'une telle transformation sur les courbes remarquables du plan p ?

<u>La transformation n'est pas biunivoque</u> : pour tout $p_k = p_i + j2k\pi/T_s$ on aura $z_k = z_i e^{j2k\pi} = z_i$. Le plan z correspond ainsi à une infinité de bandes du plan p.



Nous retrouvons sous une autre forme la seconde formulation de la transformée de Laplace du signal échantillonné qui est obtenue à partir de la transformée de Laplace du signal continu en superposant une série de valeur translatées parallèlement à l'axe imaginaire. La bande centrale en hachuré correspond à une fréquence comprise entre $-1/2T_s$ et $1/2T_s$ c'est à dire à la bande de fréquence de Shannon. Il suffit d'étudier le signal échantillonné dans cette bande de fréquence et c'est ce que permet le changement de variable en faisant correspondre à cette bande l'ensemble du plan z.

<u>Axe imaginaire :</u> $p = j\omega$ => $z = e^{j\omega Ts}$ => $|z| = 1$. L'axe imaginaire du plan p est transformé dans le plan z en un cercle de rayon unité.

<u>Centre du plan p :</u> $p = 0$ => $z = 1$. Le centre du plan p est transformé sur le point $z = 1$.

<u>Demi-plan gauche :</u> $p = \sigma + j\omega$ avec $\sigma < 0$ => $|z| = e^{\sigma Ts} < 1$. Le demi-plan gauche de Laplace se transforme en l'intérieur du cercle unité du plan z.

Demi-plan droit : p=σ+jω avec σ>0 => |z|=$e^{\sigma Ts}$>1. Le demi-plan droit de Laplace se transforme en l'extérieur du cercle unité du plan z.

Droite verticale : σ=cste => |z|=cste => z décrit un cercle. σ<0 le cercle est à l'intérieur du cercle unité, σ>0 le cercle est à l'extérieur du cercle unité.

Droite horizontale : ω=cste => Arg(z)=cste => z décrit une droite oblique passant par l'origine.

Droite oblique passant par l'origine : Ces droites correspondent dans l'étude de systèmes continus à des pôles à amortissement constant :

$$p = -\zeta\omega_0 \pm j\omega_0\sqrt{1-\zeta^2} \Rightarrow \frac{\mathrm{Re}(p)}{\mathrm{Im}(p)} = \pm\frac{\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}} = \text{cste si } \zeta = \text{cste}$$

$$\Rightarrow z = e^{-\zeta\omega_0 T_s} e^{\pm j\omega_0\sqrt{1-\zeta^2}T_s}$$

z décrit des cardioïdes partant de z=1. Ces courbes sont moins simples à utiliser que les droites du plan p.

III - PROPRIETES DE LA TRANSFORMEE EN Z :

Le changement de variable z = e^{pTs} fait que nous allons retrouver toutes les propriétés de la transformée de Laplace. Nous nous intéresserons plus particulièrement à la transformée **monolatérale** qui ne prend en compte que la partie t≥0 d'un signal.

P1 Linéarité :

La TZ obéit au principe de superposition : ∀α et β ∈ C

TZ[αx(t) + βy(t)]= α TZ[x(t)] + β TZ[y(t)].

P2 Produit de convolution :

$$TZ[y(t)\otimes x(t)] = \sum_k\left[\sum_n y_{k-n}x_n\right]z^{-k} = \sum_n\sum_k y_{k-n}x_n z^{-k} = \sum_n\sum_m y_m x_n z^{-(m+n)}$$

$$= \sum_n x_n z^{-n}\sum_m y_m z^{-m} = TZ[y(t)]TZ[x(t)]$$

TZ[x(t) ⊗ y(t)]= TZ[x(t)].TZ[y(t)].

Propriété déjà connue pour la TL : la TZ d'un produit de convolution est le produit des TZ.

P3 Produit:

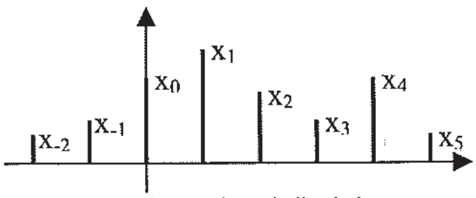
Le produit de deux distributions singulières n'existant pas mathématiquement, le produit de deux signaux discrets en tant que produit de deux distributions n'a pas de sens. Nous pouvons cependant définir un signal discret dont les échantillons sont le produit des échantillons de deux autres signaux. Cette définition physiquement cohérente avec le cas continu ne lui est pas équivalente mathématiquement. Nous aurons ainsi une différence majeure avec le cas continu: la transformée en Z d'un "produit" de deux signaux discrets n'est pas la convolution des transformées en Z.

P4 Translation temporelle :

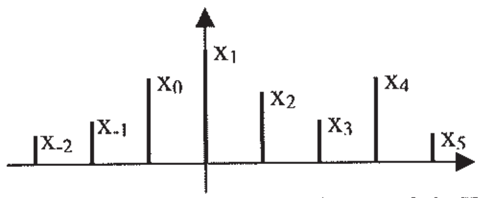
L'étude est séparée artificiellement en deux cas: l'avance et le retard. Ce sont ces théorèmes fondamentaux qui permettent de prendre en compte les conditions initiales d'un problème traité avec la transformée monolatérale.

L'opération de translation temporelle d'un signal d'une période d'échantillonnage est symbolisée par l'opérateur q

Avance temporelle (cas monolatéral) :



t=0 signal d'origine



t=0 signal avancé de T_s

$q\,x(t) = x(t+T_s)$ $q^n\,x(t) = x(t+nT_s)$ avec n>0.

Schématisons l'avance d'une période d'échantillonnage:

Calculons la transformée en Z du signal avancé d'une période d'échantillonnage:

$$TZ[\,q\,x(t)\,] = x_1 + x_2 z^{-1} + x_3 z^{-2} + x_4 z^{-3} + ... = \sum_{k=0}^{+\infty} x_{k+1} z^{-k} = \sum_{m=1}^{+\infty} x_m z^{-(m-1)}$$

$$= z \sum_{m=1}^{+\infty} x_m z^{-m} = z\left[\sum_{m=0}^{+\infty} x_m z^{-m} - x_0\right]$$

D'où la relation: $\boxed{TZ[q\ x(t)] = z\,TZ[x(t)] - z\ x_0}$

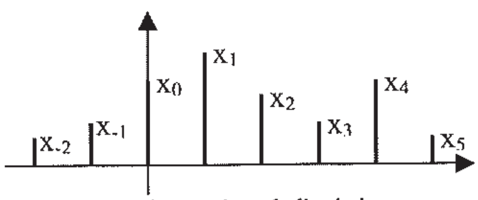
De proche en proche nous pouvons généraliser cette formule au cas d'une avance de n périodes d'échantillonnage:

$$\boxed{TZ[q^n x(t)] = z^n TZ[x(t)] - z^n \sum_{m=0}^{n-1} x_m z^{-m}}$$

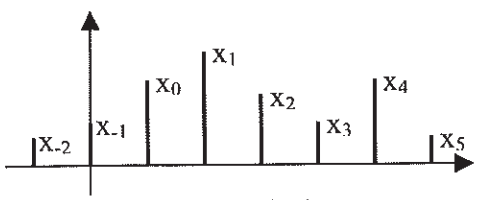
Retard temporel (cas monolatéral) :

$$q^{-1}\,x(t) = x(t-T_s) \qquad q^{-n}\,x(t) = x(t-nT_s) \text{ avec } n>0$$

Prenons le schéma pour un retard d'une période d'échantillonnage:



t=0 signal d'origine



t=0 signal retardé de T_s

Calculons la transformée en Z du signal retardé d'une période d'échantillonnage:

$$TZ\left[q^{-1}x(t)\right] = x_{-1} + x_0 z^{-1} + x_1 z^{-2} + x_2 z^{-3} + ... = \sum_{k=0}^{+\infty} x_{k-1} z^{-k} = \sum_{m=-1}^{+\infty} x_m z^{-(m+1)}$$

$$= z^{-1} \sum_{m=-1}^{+\infty} x_m z^{-m} = z^{-1}\left[\sum_{m=0}^{+\infty} x_m z^{-m} + z x_{-1}\right]$$

D'où la relation: $$\boxed{TZ\left[q^{-1}x(t)\right] = z^{-1}\ TZ[x(t)] + x_{-1}}$$

De proche en proche nous pouvons généraliser cette formule au cas d'un retard de n périodes d'échantillonnage:

$$\boxed{TZ\left[q^{-n}x(t)\right] = z^{-n}\ TZ[x(t)] + \sum_{m=1}^{n} x_{-m}\ z^{-(n-m)}}$$

Les deux formulations sont semblables et sont de première importance dans les applications de la transformée en Z car elles permettent de prendre en compte les conditions initiales d'un problème.

cas bilatéral:

Beaucoup plus simple mais d'intérêt pratique moindre le calcul est identique dans le cas de l'avance (n>0) et du retard (n<0):

$$TZ\left[q^{n}x(t)\right] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x_{k+n} z^{-k} = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} x_m z^{-(m-n)} = z^n \sum_{m=-\infty}^{+\infty} x_m z^{-m}$$

$$TZ\left[q^{n}x(t)\right] = z^n TZ\left[x(t)\right]$$

P5 Translation complexe :

$$TZ\left[e^{-at}x(t)\right] = \sum_{k=0}^{+\infty} e^{-akT_s} x_k z^{-k} = \sum_{k=0}^{+\infty} x_k \left(z e^{aT_s}\right)^{-k} = TZ[x(t)]_{z=ze^{aT_s}}$$

exemple 1 :

$$TZ[e(t)] = \frac{z}{z-1} \Rightarrow TZ\left[e^{-at}\ e(t)\right] = \frac{z\ e^{aT_s}}{z e^{aT_s} - 1} = \frac{1}{1 - z^{-1}\ e^{-aT_s}}$$

exemple 2 :

$$TZ[\sin(\omega_0 t)] = \frac{z\sin(\omega_0 T_s)}{z^2 - 2z\cos(\omega_0 T_s) + 1} \Rightarrow TZ\left[e^{-at}\sin(\omega_0 t)\right] = \frac{z e^{-aT_s}\ \sin(\omega_0 T_s)}{z^2 - 2z e^{-aT_s}\ \cos(\omega_0 T_s) + e^{-2aT_s}}$$

P6 Théorème de la valeur initiale :

Il n'a de sens que pour la transformée monolatérale. De la définition il vient immédiatement:

$$\boxed{x_0 = \lim_{z \to +\infty} X(z)}$$

P7 Théorème de la valeur finale :

$$TZ[\,q\,x(t)-x(t)]=(z-1)\,X(z)-z\,x_0=\sum_{k=0}^{+\infty}(x_{k+1}-x_k)\,z^{-k}=(x_1-x_0)+(x_2-x_1)\,z^{-1}+(x_3-x_2)\,z^{-2}+\dots\dots$$

$$\Rightarrow\ \lim_{z\to 1}\left[\,(z-1)\,X(z)-z\,x_0\,\right]=\lim_{z\to 1}\left[\,(z-1)\,X(z)\right]-x_0=x_\infty-x_0$$

d'où $\boxed{x_\infty=\lim_{z\to 1}[(z-1)X(z)]}$

remarque: nous retrouvons aussi un problème identique à celui de la transformée de Laplace, ce théorème n'est utilisable que si nous avons le droit de calculer (z-1)X(z) pour z=1 c'est à dire si le cercle unité appartient à l'anneau de convergence de cette fonction.

exemple 1:

$TZ[e^{\alpha t}]=\dfrac{z}{z-e^{\alpha T_s}}$ nous aurions donc pour $\alpha>0$ $\lim_{z\to 1}[(z-1)X(z)]=0$ et la limite d'une exponentielle croissante échantillonnée serait donc 0.

Ce résultat absurde est dû au fait que (z-1) TZ[$e^{\alpha Ts}$] a comme anneau de convergence l'anneau ou le module de z est supérieur à $e^{\alpha Ts}$ (supérieur à 1 pour $\alpha>0$) et donc le théorème précédent inapplicable. Par contre le résultat est correct dans le cas $\alpha<0$ car dans ce cas, l'anneau de convergence contient le cercle unité.

exemple 2:

$TZ[\sin(\omega t)]=\dfrac{z\sin(\omega T_s)}{z^2-2\,z\cos(\omega T_s)+1}$ soit $\lim_{z\to 1}[(z-1)X(z)]=0$ et la limite d'un sinus échantillonné serait donc 0. Cet autre résultat absurde est dû au fait que (z-1) TZ[$\sin(\omega T_s)$] à comme anneau de convergence l'anneau ou le module de z est strictement supérieur à 1 et donc le théorème précédent toujours inapplicable.

P8 Multiplication par t^n :

$$TZ[\,t^n\ x(t)\,]=\sum_{k=0}^{+\infty}(kT_s)^n\ x_k\ z^{-k}\qquad \text{avec}\qquad \frac{d}{dz}\left(z^{-k}\right)=-k\,z^{-(k+1)}\ \Rightarrow\ k\,z^{-k}=-z\frac{d}{dz}\left(z^{-k}\right)$$

$$\text{pour}\ \ n=1\quad :TZ[\,t\,x(t)\,]=\sum_{k=0}^{+\infty}(kT_s)x_k\ z^{-k}=\sum_{k=0}^{+\infty}T_s\,x_k\left[-z\frac{d}{dz}\left(z^{-k}\right)\right]=-z\,T_s\frac{d}{dz}\sum_{k=0}^{+\infty}x_k\,z^{-k}$$

$$\boxed{\Rightarrow TZ[\,t\,x(t)\,]=-z\,T_s\frac{d}{dz}(TZ[x(t)\,])}$$

Cette formule étant utilisée de manière récursive pour calculer la TZ de $t^n\,x(t)$.

P9 Dérivation par rapport à un paramètre :

Les opérations d'intégration et de dérivation par rapport à un paramètre sont des opérations linéaires qui doivent donc commuter avec la transformée de Laplace et la transformée en Z.

$$TZ\left[\,\frac{d}{da}x(t)\,\right]=\frac{d}{da}(\,TZ[\,x(t)\,])$$

exemple : $TZ\left[te^{-at}\right]=-\frac{d}{da}TZ\left[e^{-at}\right]=-\frac{d}{da}\left[\frac{z}{z-e^{-aT_s}}\right]=-\frac{-zT_s e^{-aT_s}}{\left(z-e^{-aT_s}\right)^2}=\frac{zT_s e^{-aT_s}}{\left(z-e^{-aT_s}\right)^2}$

La même formulation existe pour l'intégration par rapport à un paramètre et est peu utilisée.

P10 Sommation ou "intégration discrète":

Cette propriété est peu utilisée.

$$y_k=\sum_{i=0}^{k}x_i=x_0+x_1+x_2+x_3+........+x_k$$

$$TZ[y(t)]=TZ\left[\sum_{k=0}^{+\infty}y_k\delta(t-kT_s)\right]=TZ\left[\sum_{k=0}^{+\infty}\left(\sum_{i=0}^{k}x_i\right)\delta(t-kT_s)\right]=\sum_{k=0}^{+\infty}\left(\sum_{i=0}^{k}x_i\right)z^{-k}$$

$$=x_0+\left(x_0+x_1\right)z^{-1}+\left(x_0+x_1+x_2\right)z^{-2}+....+\left(x_0+x_1+x_2+x_3+........+x_k\right)z^{-k}+.........$$

$$=x_0(1+z^{-1}+z^{-2}+z^{-3}+.....)+x_1(z^{-1}+z^{-2}+z^{-3}+.....)+x_2(z^{-2}+z^{-3}+z^{-4}+.....)+.....$$

$$+x_k(z^{-k}+z^{-(k+1)}+z^{-(k+2)}+.....)+........$$

$$=x_0\frac{1}{1-z^{-1}}+x_1z^{-1}\frac{1}{1-z^{-1}}+x_2z^{-2}\frac{1}{1-z^{-1}}+x_3z^{-3}\frac{1}{1-z^{-1}}+....+x_kz^{-k}\frac{1}{1-z^{-1}}+....$$

$$=\left(x_0+x_1z^{-1}+x_2z^{-2}+x_3z^{-3}+....+x_kz^{-k}+...\right)\frac{1}{1-z^{-1}}=\frac{1}{1-z^{-1}}TZ[x(t)]$$

Bibliographie

[1] Guy BINET, Notes de cours de Traitement Numérique du signal, Université de Caen Basse-Normandie.

[2] M. Bellanger, Traitement Numérique du signal. Dunod, 2012.

[3] M. Kunt, Techniques modernes Traitement Numérique des signaux, vol. 1. Presses Polytechniques et universitaires romandes, 1997.