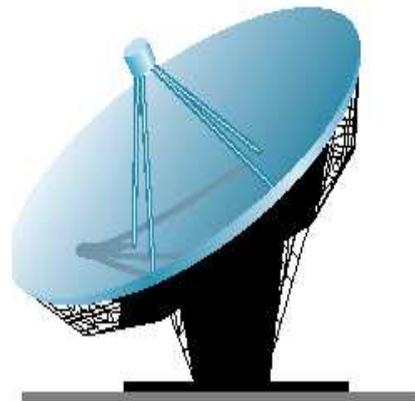
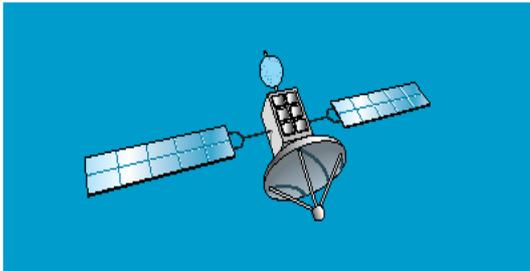


## BE CORRECTEURS NUMERQUES



## BE1 : LES BASES ELEMENTAIRES

La motivation principale de ce devoir est une évaluation des connaissances élémentaires du cours, en l'occurrence l'opérateur retard, la modélisation et la stabilité. Pour ce faire, on demande de traiter les questions suivantes en utilisant les notations du cours.

- 1) Décrire brièvement les incidences de l'échantillonnage et le principal atout du contexte de synthèse des systèmes échantillonnés par rapport à celui des systèmes continus en précisant la relation de passage associée.

- 2) Soit  $P(q^{-1}) \in \mathcal{R}[q^{-1}]$ , calculer les dérivées partielles suivantes

$$\frac{\partial}{\partial x(t-i)} \left( P(q^{-1})x(t) \right) \text{ pour } i \in [0, np]$$

- 3) Comment spécifier la période d'échantillonnage dans le cas d'un asservissement dont les performances dynamiques sont caractérisées par un mode dominant d'amortissement unitaire et de pulsation propre  $\omega_r$ ? Préciser si un filtre anti-recouvrement est nécessaire et si oui donner sa fonction de transfert.

- 4) Déterminer la fonction de transfert du systèmes échantillonné correspondant au système continu décrit par la fonction de transfert

$$G_c(s) = e^{-\tau_d s} \frac{B(s)}{A(s)} \quad / \quad \tau_d = (d+1)T_e - \eta T_e \text{ avec } d \in \mathcal{N} \text{ et } 0 \leq \eta < 1$$

Etudier la configuration des pôles et des zéros du système échantillonné dans le cas

$$d = 0, B(s) = a \text{ et } A(s) = s + a \text{ avec } a > 0.$$

On précisera ce qui se passerait lorsque le scalaire  $\eta$  tends vers 0 ou 1.

- 5) Déterminer la réponse impulsionnelle d'un système échantillonné issu d'un système continu exhibant un retard pur  $\tau_d$  que l'on peut exprimer en fonction de la période d'échantillonnage comme suit  $\tau_d = (d+1)T_e - \eta T_e$  avec  $d \in \mathcal{N}$  et  $0 \leq \eta < 1$ . On précisera la relation entre la réponse impulsionnelle (resp. la réponse harmonique) et la fonction de transfert d'un système.

- 6) Montrer que la fonction de transfert d'un système échantillonné peut se récrire sous la forme d'une fraction rationnelle

$$\mathcal{G}(z^{-1}) = \frac{z^{-d-1} B(z^{-1})}{A(z^{-1})} = \frac{z^{-d-1} (b_0 + b_1 z^{-1} + \dots + b_{nb} z^{-nb})}{1 + a_1 z^{-1} + \dots + a_{na} z^{-na}}$$

En déduire l'équation aux différences du système échantillonné et préciser sa configurations des pôles et zéros.

7) Considérons un système décrit par la fonction de transfert

$$\mathcal{G}(z) = \frac{(z-1)(z^2 - 2\cos(\beta)z + 1)}{z^2(z-\alpha_1)(z-\alpha_2)} \text{ avec } \beta \in \mathcal{R}^+ \text{ et } (\alpha_1, \alpha_2) \in \mathcal{R} \times \mathcal{R}$$

- Donner les configurations des pôles et des zéros du système.
- Etudier sa stabilité en fonction des scalaires  $\alpha_1$  et  $\alpha_2$  comme l'indique le tableau suivant. On utilisera les acronymes *SAS*, *SMS* et *SINS* pour désigner respectivement que le système est stable, marginalement stable et instable.

	$ \alpha_2  > 1$	$\alpha_2 = 1$	$ \alpha_2  < 1$
$ \alpha_1  > 1$			
$\alpha_1 = 1$			
$ \alpha_1  < 1$			

- Supposons que le système est stable, préciser la classe des entrées asymptotiquement rejetées en sortie.
- 8) Donner les équations aux différences décrivant des générateurs des perturbations du type échelon (resp. harmonique de pulsation connue  $\omega$ ), i.e.  $v(t) = v\alpha(t)$  (resp.  $v(t) = v\sin(\omega t)\alpha(t)$ ), où  $v$  désigne l'amplitude des perturbations qui est supposée inconnue.
- 9) Considérons la cascade des systèmes de la figure 1 où les fonctions de transfert  $\mathcal{G}_1(z)$  et  $\mathcal{G}_2(z)$  sont respectivement données par

$$\mathcal{G}_1(z) = \frac{B_{\sigma 1}(z)}{A_{\sigma 1}(z)} \text{ avec } A_{\sigma 1}(z) \in \mathcal{R}_{us}(z) \text{ et } \mathcal{G}_2(z) = \frac{B_{\sigma 2}(z)}{A_{\sigma 2}(z)} \text{ avec } A_{\sigma 2}(z) \in \mathcal{R}_{sa}(z)$$

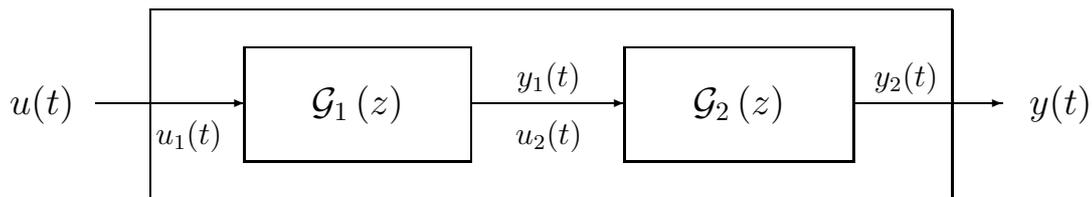


FIGURE 1 – Interconnexion en cascade

Donner la condition requise pour que la sortie de la cascade soit asymptotiquement nulle, soit  $\lim_{t \rightarrow \infty} y_m(t) = 0$ , lorsque son entrée est une impulsion d'amplitude  $v$  inconnue, soit  $u(t) = v\delta(t)$

- 10) Considérons un système stable et supposons que son entrée est un processus stochastique stationnaire de moyenne nulle et de variance finie. Quelle est la nature de la sortie du système? On précisera la condition requise sur le système pour que cette sortie soit assimilable à un zéro ingénieur.

## BE1 : UNE SOLUTION !

- 1) On distingue trois incidences de l'échantillonnage. La première incidence est l'étalage du spectre du signal continu jusqu'à l'infini conformément au résultat fondamental d'analyse spectrale. La seconde incidence relève d'une complexité structurelle des systèmes échantillonnés, en l'occurrence l'introduction d'un retard pur d'une période d'échantillonnage, dans le cas où le système continu est strictement propre, et d'un ensemble de zéros supplémentaires. Néanmoins, le problème du retard, qui engendre un problème de dimension infinie dans le contexte des systèmes continus, est transformé en un problème de dimension finie et peut être ainsi aisément traité dans le contexte des systèmes échantillonnés.
- 2) Compte tenu de la définition de l'opérateur retrad, on postule naturellement que

$$P(q^{-1})x(t) = \sum_{i=0}^{np} p_i x(t-i) \implies \frac{\partial}{\partial x(t-i)} \left( P(q^{-1})x(t) \right) = p_i \quad \forall i \in [0, np]$$

- 3) Compte tenu des performances dynamiques requises, le système asservi a une bande passante caractérisée par une pulsation maximale qui n'est autre que la pulsation propre des modes dominants de la dynamique de régulation, soit  $\omega_r$ . On peut alors choisir la période d'échantillonnage comme suit

$$\omega_r T_e < \pi \quad \longrightarrow \quad \omega_r T_e \in \left[ \frac{\pi}{10}, \frac{\pi}{4} \right]$$

Le filtre anti-recouvrement permet de recouvrir un contexte favorable à l'application du théorème de Shannon, i.e. un spectre borné du signal à échantillonner. Il est donc nécessaire si la bande passante du capteur est relativement large par rapport à celle du système asservi. On utilisera pour ce faire un filtre de fonction de transfert

$$\mathcal{FAR}(s) = \left( \frac{\omega_r^2}{s^2 + 2\omega_r s + \omega_r^2} \right)^\ell \quad \text{avec } \ell \geq 2$$

- 4) La relation entre la fonction de transfert d'un système continu et celle du système échantillonné sous-jacent

$$G(z) = \frac{z-1}{z} \mathcal{Z} \left( \{g_{cind}(kT_e - \tau_d)\}_{k \in \mathcal{N}} \right)$$

avec

$$g_{cind}(t) = \mathcal{L}^{-1} \left( \frac{B(s)}{sA(s)} \right)$$

Et compte tenu de l'expresion du retard pur du système, i.e.  $\tau_d = (d+1)T_e - \eta T_e$ , on aura

$$G(z) = \frac{z-1}{z} \frac{1}{z^{d+1}} \mathcal{Z} \left( \{g_{cind}(k + \eta T_e)\}_{k \in \mathcal{N}} \right)$$

Dans le cas particulier considéré, on a

$$g_{cind}(t) = \mathcal{L}^{-1} \left( \frac{a}{s(s+a)} \right) = \mathcal{L}^{-1} \left( \frac{1}{s} - \frac{1}{s+a} \right)$$

et donc

$$\begin{aligned} \mathcal{Z} \left( \{g_{cind}(kT_e + \eta T_e)\}_{k \in \mathcal{N}} \right) &= \frac{z}{z-1} - \frac{ze^{-a\eta T_e}}{z - e^{-aT_e}} \\ &= \frac{z \left( (1 - e^{-a\eta T_e})z + (e^{-a\eta T_e} - e^{-aT_e}) \right)}{(z-1)(z - e^{-aT_e})} \end{aligned}$$

La fonction de transfert échantillonnée recherchée est alors donnée par

$$\mathcal{G}(z) = \frac{(1 - e^{-a\eta T_e})z + (e^{-a\eta T_e} - e^{-aT_e})}{z(z - e^{-aT_e})}$$

Outre le retard pur d'une période d'échantillonnage intrinsèque au bloqueur d'ordre zéro, le retard fractionnaire induit un zéro auxiliaire dans la fonction de transfert échantillonnée qui vérifie les conditions aux limites suivantes

$$\lim_{\eta \rightarrow 1} \zeta = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{\eta \rightarrow 0} \zeta = -\infty$$

- 5) Compte tenu de la représentation d'un système échantillonné à partir du modèle du système continu sous-jacent et des modèles des convertisseurs analogique-numérique et numérique-analogique, on peut exprimer la sortie du système continu comme suit

$$y(t) = \int_0^\infty g_c(\tau) u_b(t - \tau) d\tau$$

La sortie du système échantillonné est donc donnée par

$$y(kT_e) = \int_0^\infty g_c(\tau) u_b(kT_e - \tau) d\tau = \sum_{\ell=1}^{\infty} \int_{(\ell-1)T_e}^{\ell T_e} g_c(\tau) u_b(kT_e - \tau) d\tau$$

Et comme  $u_b(kT_e - \tau) = u(kT_e - \ell T_e)$  pour  $\tau \in ((\ell-1)T_e, \ell T_e]$  puisque  $kT_e - \ell T_e < kT_e - (\ell-1)T_e$ , on aura donc

$$y(kT_e) = \sum_{\ell=1}^{\infty} \left( \int_{(\ell-1)T_e}^{\ell T_e} g_c(\tau) d\tau \right) u(kT_e - \ell T_e)$$

Cette expression peut se mettre sous la forme d'un produit de convolution

$$y(kT_e) = \sum_{\ell=1}^{\infty} g(\ell T_e) u(kT_e - \ell T_e)$$

où la séquence  $\{g(kT_e)\}_{k \in \mathcal{N}}$  n'est autre que la réponse impulsionnelle du système échantillonné puisque

$$u(kT_e) = \delta(kT_e) \implies y(kT_e) = g(kT_e) \text{ pour tout } k \in \mathcal{N}$$

Et comme  $g_c(t) = 0$  pour tout  $t \leq \tau_d = (d+1)T_e - \eta T_e$  avec  $d \in \mathcal{N}$  et  $0 \leq \eta < 1$ , on peut déterminer aisément la réponse impulsionnelle du système, soit

$$g(\ell T_e) = \begin{cases} 0 & \text{pour } \ell \in [0, d] \\ \int_{(d+1-\eta)T_e}^{(d+1)T_e} g_c(\tau) d\tau & \text{pour } \ell = d+1 \\ \int_{(\ell-1)T_e}^{\ell T_e} g_c(\tau) d\tau & \text{pour } \ell > d+1 \end{cases}$$

La relation entre la réponse impulsionnelle et la fonction de transfert d'un système est donnée par

$$\mathcal{G}(z) = \mathcal{Z}(\{g(kT_e)\})$$

Quant à la relation entre la réponse harmonique et la fonction de transfert d'un système, elle est donnée par

$$\mathcal{G}(z) = \mathcal{F}(\{g(kT_e)\}) = \mathcal{G}(e^{j\omega T_e}) \text{ si le système est stable}$$

6) Compte tenu de l'expression de la réponse impulsionnelle du système échantillonné, on a

$$y(kT_e) = \sum_{\ell=d+1}^{\infty} g(\ell T_e) u(kT_e - \ell T_e)$$

Et on peut en déduire aisément que la transformée en  $z$  de la séquence de sortie du système est reliée à celle de sa séquence d'entrée par la relation

$$Y(z) = \left( \sum_{\ell=d+1}^{\infty} g(\ell T_e) z^{-\ell} \right) U(z)$$

On retrouve la fonction de transfert du système échantillonné que l'on peut exprimer à partir de la fonction de transfert sous la forme d'une fraction rationnelle en  $z^{-1}$

$$\mathcal{G}(z^{-1}) = z^{-d-1} \frac{B(z^{-1})}{A(z^{-1})}$$

puisque l'on peut toujours effectuer une division euclidienne dans l'anneau des polynômes  $\mathcal{R}[z^{-1}]$  et que les  $d+1$  premiers éléments de cette division sont nuls, i.e.  $g(\ell T_e) = 0$  pour  $\ell \in [0, d]$ .

Le passage d'une fonction de transfert d'un système à son équation aux différences est trivial. En effet, on a

$$Y(z) = \mathcal{G}(z^{-1})U(z)$$

$\Leftrightarrow$

$$Y(z) = \frac{z^{-d-1}B(z^{-1})}{A(z^{-1})}U(z)$$

$\Leftrightarrow$

$$A(z^{-1})Y(z) = z^{-d-1}B(z^{-1})U(z)$$

$\Leftrightarrow$

$$\mathcal{Z}(A(q^{-1})y(kT_e)) = \mathcal{Z}(q^{-d-1}B(q^{-1})u(kT_e))$$

$\Leftrightarrow$

$$A(q^{-1})y(kT_e) = B(q^{-1})u((k-d-1)T_e)$$

Par ailleurs, la fonction de transfert du système peut se mettre sous la forme d'une fraction rationnelle en  $z$  comme suit

$$\mathcal{G}(z^{-1}) = \frac{z^{-d-1}B(z^{-1})}{A(z^{-1})} = \frac{z^n}{z^n} \frac{z^{-d-1}B(z^{-1})}{A(z^{-1})} \text{ avec } n = \max(na, nb + d + 1)$$

soit

$$\mathcal{G}(z^{-1}) = \frac{B_\sigma(z)}{A_\sigma(z)} \triangleq \mathcal{G}(z)$$

avec

$$A_\sigma(z) = \begin{cases} z^{na} A(z^{-1}) & \text{si } na \geq nb + d + 1 \\ z^{nb+d+1-na} z^{na} A(z^{-1}) & \text{si } na < nb + d + 1 \end{cases}$$

$$B_\sigma(z) = \begin{cases} z^{na-nb-d-1} z^{nb} B(z^{-1}) & \text{si } na \geq nb + d + 1 \\ z^{nb} B(z^{-1}) & \text{si } na < nb + d + 1 \end{cases}$$

On peut alors postuler que

- La configuration des zéros du système est constituée des racines en  $z$  du polynôme  $B(z^{-1})$  modulo un nombre de zéros en zéro égal au degré relatif de la fonction de transfert, soit  $r \triangleq na - nb - d - 1$ , si  $na \geq nb + d + 1$
- La configuration des pôles du système est constituée des racines en  $z$  du polynôme  $A(z^{-1})$  modulo un nombre de pôles en zéro égal au degré relatif de la fonction de transfert, soit  $r \triangleq nb + d + 1 - na$ , si  $na < nb + d + 1$

7) Considérons la classe des systèmes décrite par la fonction de transfert

$$\mathcal{G}(z) = \frac{(z-1)(z^2 - 2\cos(\beta)z + 1)}{z^2(z - \alpha_1)(z - \alpha_2)} \text{ avec } \beta \in \mathcal{R}^+ \text{ et } (\alpha_1, \alpha_2) \in \mathcal{R} \times \mathcal{R}$$

- La configuration pôles-zéros du système est donnée par

$$\mathcal{CZ}(\mathcal{G}(z)) = \{1, e^{j\beta}, e^{-j\beta}\} \text{ et } \mathcal{CP}(\mathcal{G}(z)) = \{0, 0, \alpha_1, \alpha_2\}$$

- Le système est stable, marginalement stable et instable selon les valeurs de ses paramètres comme l'indique le tableau suivant

	$ \alpha_2  > 1$	$\alpha_2 = 1$	$ \alpha_2  < 1$
$ \alpha_1  > 1$	<i>SINS</i>	<i>SINS</i>	<i>SINS</i>
$\alpha_1 = 1$	<i>SINS</i>	<i>SINS</i>	<i>SMS</i>
$ \alpha_1  < 1$	<i>SINS</i>	<i>SMS</i>	<i>SAS</i>

- Si le système est stable, alors les entrées du type échelon et d'amplitude inconnue et harmonique de pulsation  $\frac{\beta}{T_e}$  et d'amplitude et de phase inconnues sont asymptotiquement rejetées en sortie.

8) Compte tenu des transformées en  $z$  des perturbations considérées, i.e.

$$\begin{aligned} \mathcal{Z}(v\alpha(t)) &= v \frac{z}{z-1} \\ \text{et} \\ \mathcal{Z}(v \sin(\omega t) \alpha(t)) &= \frac{v \sin(\omega T_e) z}{z^2 - 2\cos(\omega T_e) z + 1} \end{aligned}$$

on peut en déduire aisément les équations aux différences décrivant leurs modèles générateurs

$$\begin{aligned} (1 - q^{-1})v(t) &= v\delta(t) \\ \text{et} \\ (1 - 2\cos(\beta)q^{-1} + q^{-2})v(t) &= v \sin(\beta) \delta(t-1) \end{aligned}$$

9) La fonction de transfert de la cascade de la figure 1 est donnée par

$$\mathcal{G}(z) = \mathcal{G}_2(z) \cdot \mathcal{G}_1(z) = \frac{B_{\sigma_2}(z)}{A_{\sigma_2}(z)} \cdot \frac{B_{\sigma_1}(z)}{A_{\sigma_1}(z)}$$

Et comme les fonctions de transfert sont irréductibles et que  $A_{\sigma_2}(z) \in \mathcal{R}_{us}(z)$  et  $A_{\sigma_1}(z) \in \mathcal{R}_{sa}(z)$ , on peut postuler aisément que la réponse impulsionnelle de la cascade est asymptotiquement nulle si et seulement si  $A_{\sigma_2}(z)$  divise  $B_{\sigma_1}(z)$ .

10) La réponse d'un système stable à un processus stochastique stationnaire de moyenne nulle et de variance finie est un processus stochastique stationnaire de moyenne nulle et de variance finie. Et si ce système est un filtre passe bas, alors la sortie du filtre peut être assimilée à un zéro ingénieur.

## BE2 : COMMANDE AVEC MODELE INTERNE

On se propose d'effectuer une analyse ingénieur des performances nominales des systèmes de commande avec modèle interne que l'on peut représenter comme l'indique la figure 2. Le système est décrit par

$$\text{SYS} \begin{cases} y(t) = \mathcal{G}_\sigma(q^{-1})u(t) + \mathcal{G}_p(q^{-1})v(t) \\ y_m(t) = y(t) + \eta(t) \end{cases}$$

avec

$$\mathcal{G}_\sigma(z^{-1}) = \frac{z^{-d-1}B(z^{-1})}{A(z^{-1})} \quad \text{et} \quad \mathcal{G}_p(z^{-1}) = \frac{E(z^{-1})}{A(z^{-1})}$$

alors que le filtre de robustification est décrit par les fonction de transfert

$$\mathcal{F}(z^{-1}) = \frac{F_n(z^{-1})}{F_d(z^{-1})}$$

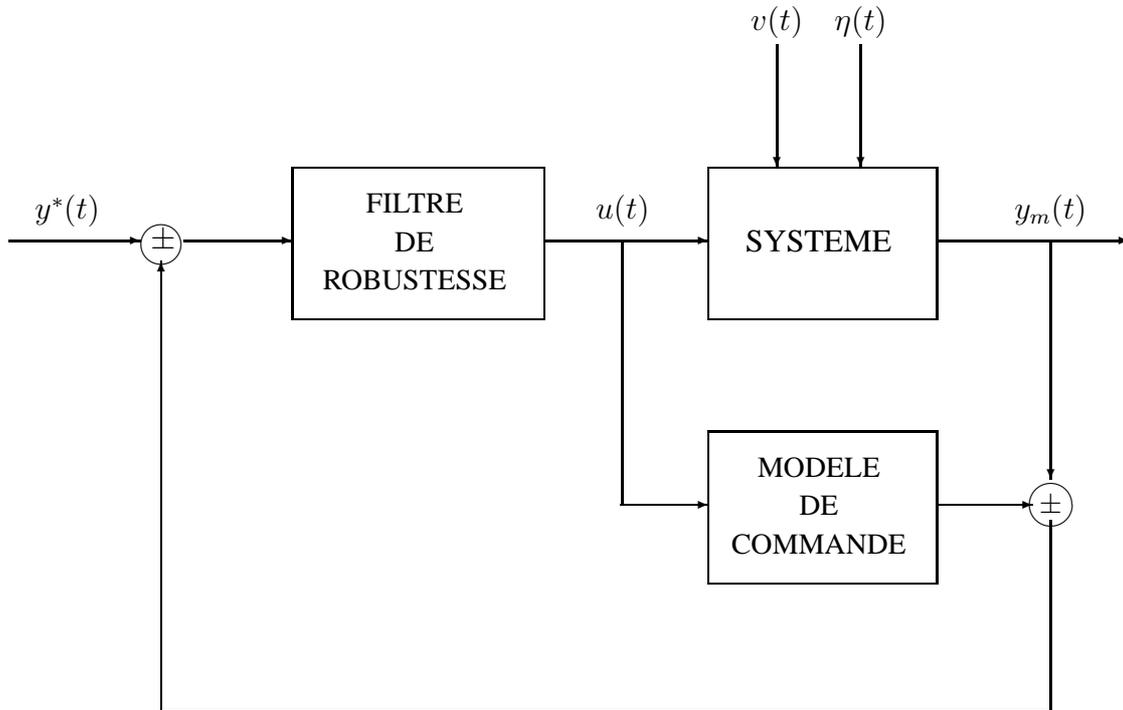


FIGURE 2 – Système de commande avec modèle interne

On peut ainsi apprécier les propriétés fondamentales qui constituent l'essence de la popularité de la commande avec modèle interne tout en mettant en évidence ses limitations du point de vue de son applicabilité. Pour ce faire, on suggère de procéder comme suit.

- 1) Donner la loi de commande avec modèle interne et en déduire la fonction de transfert du régulateur.
- 2) Donner les équations du comportement d'entrée-sortie du système de commande avec modèle interne et en déduire les conditions de stabilité et les dynamiques de poursuite et de régulation sous-jacentes. On précisera la dynamique de régulation dans le cas où les perturbations peuvent être ramenées en sortie : une hypothèse usuelle pour les fans de la commande avec modèle .
- 3) Préciser la classe perturbations que l'on peut rejeter parfaitement ainsi que la classe des séquences de référence que l'on peut poursuivre parfaitement.
- 4) Donner les fonctions de sensibilité usuelles du système de commande avec modèle interne et préciser comment spécifier la filtre de robustification pour réduire la sensibilité du système de commande aux bruits de mesure inéluctables.
- 5) Etablir un bilan ingénieur sur la commande avec modèle interne à partir des résultats fondamentaux qui ont été obtenus tout au long de cette analyse.

## BE2 : UNE SOLUTION

- 1) La loi de commande avec modèle interne peut être facilement obtenue à partir du diagramme fonctionnel du système de commande correspondant, soit

$$\mathcal{CMI} \{ (1 - \mathcal{F}(z^{-1})\mathcal{G}_\sigma(z^{-1}))U(z) = \mathcal{F}(z^{-1})(Y^*(z) - Y_m(z))$$

Il s'agit d'un régulateur à un degré de liberté dont la fonction de transfert est donnée

$$\mathcal{R}(z^{-1}) = \frac{\mathcal{F}(z^{-1})}{1 - \mathcal{F}(z^{-1})\mathcal{G}_\sigma(z^{-1})} = \frac{A(z^{-1})F_n(z^{-1})}{A(z^{-1})F_d(z^{-1}) - z^{-d-1}B(z^{-1})F_n(z^{-1})}$$

que l'on peut récrire sous la forme usuelle

$$\mathcal{CMI} \{ R_d(q^{-1})u(t) + R_n(q^{-1})y_m(t) = R_p(q^{-1})y^*(t + d + 1)$$

avec

$$R_d(q^{-1}) = A(q^{-1})F_d(q^{-1}) - q^{-d-1}B(q^{-1})F_n(q^{-1})$$

$$R_n(q^{-1}) = A(q^{-1})F_n(q^{-1})$$

$$R_p(q^{-1}) = q^{-d-1}R_n(q^{-1})$$

- 2) Le comportement d'entrée-sortie du système de commande est obtenu en éliminant respectivement la sortie et l'entrée entre les équations du régulateur et du système. On aura alors

$$\mathcal{SCMI} \begin{cases} y_m(t) = \mathcal{G}_{sr}(q^{-1})y^*(t) + \mathcal{G}_{sp}(q^{-1})v(t) + \mathcal{G}_{sb}(q^{-1})\eta(t) \\ u(t) = \mathcal{G}_{er}(q^{-1})y^*(t) + \mathcal{G}_{ep}(q^{-1})v(t) + \mathcal{G}_{eb}(q^{-1})\eta(t) \end{cases}$$

où les  $\mathcal{G}_{ij}(z^{-1})$  pour  $(i, j) \in [r, p, b] \times [s, r]$  désignent les différentes fonctions de transfert du système asservis données par

$$\mathcal{G}_{sr}(z^{-1}) = \frac{z^{-d-1}B(z^{-1})R_n(z^{-1})}{P_c(q^{-1})}$$

$$\mathcal{G}_{sp}(q^{-1}) = \frac{E(z^{-1})R_d(z^{-1})}{P_c(q^{-1})}, \quad \mathcal{G}_{sb}(q^{-1}) = -\frac{z^{-d-1}B(z^{-1})R_n(z^{-1})}{P_c(q^{-1})}$$

$$\mathcal{G}_{er}(z^{-1}) = \frac{A(z^{-1})R_n(z^{-1})}{P_c(q^{-1})}$$

$$\mathcal{G}_{ep}(q^{-1}) = -\frac{E(z^{-1})R_n(z^{-1})}{P_c(q^{-1})} \quad \text{et} \quad \mathcal{G}_{eb}(q^{-1}) = -\frac{A(z^{-1})R_n(z^{-1})}{P_c(q^{-1})}$$

où  $P_c(z^{-1})$  n'est autre que le polynôme caractéristique donnée par

$$P_c(z^{-1}) = A(z^{-1})R_d(z^{-1}) + z^{-d-1}B(z^{-1})R_n(q^{-1}) = A(q^{-1})A(q^{-1})F_d(q^{-1})$$

Les pôles du système sont invariants par une loi de commande avec modèle interne ; ils doivent être nécessairement situés dans le domaine de stabilité et de performances, i.e.  $\mathcal{CP}(\mathcal{SYS}) \subset \mathcal{D}_{sp}$ . Et il en est de même pour le filtre de robustification qui représente le paramètre de synthèse de la commande avec modèle interne, i.e.  $\mathcal{CP}(\mathcal{F}(z^{-1})) \subset \mathcal{D}_{sp}$ .

Compte tenu des expressions des polynômes  $R_n(z^{-1})$ ,  $R_d(z^{-1})$  et  $P_c(z^{-1})$  et de la stabilité du système de commande, les dynamiques de poursuite et de régulation sont respectivement données par les fonctions de transfert

$$\mathcal{DP}(z^{-1}) = \frac{z^{-d-1}B(z^{-1})F_n(z^{-1})}{A(z^{-1})F_d(z^{-1})} \mathcal{G}^*(z^{-1})$$

et

$$\mathcal{DR}(z^{-1}) = \frac{E(z^{-1}) (A(z^{-1})F_d(z^{-1}) - z^{-d-1}B(z^{-1})F_n(z^{-1}))}{A(z^{-1})A(z^{-1})F_d(z^{-1})}$$

Et dans le cas où les perturbations peuvent être ramenées en sortie, i.e.  $E(z^{-1}) = A(z^{-1})$ , la dynamique de régulation est réduite comme suit

$$\mathcal{DR}(z^{-1}) = \frac{A(z^{-1})F_d(z^{-1}) - z^{-d-1}B(z^{-1})F_n(z^{-1})}{A(z^{-1})F_d(z^{-1})}$$

**3)** Comme la dynamique de poursuite doit avoir un gain statique unitaire, on aura

$$\mathcal{DP}(1) = \frac{B(1)F_n(1)}{A(1)F_d(1)} = 1 \iff A(1)F_d(1) - B(1)F_n(1) = 0$$

Et compte tenu de la condition de stabilité du système de commande et des expressions des fonctions de transfert du modèle de commande, du filtre de robustification et du régulateur, on aura

$$\mathcal{G}(1) \neq 0, \mathcal{F}(1) \neq 0 \text{ et } \mathcal{F}(1) = \frac{1}{\mathcal{G}(1)} \text{ et } R_d(1) = 0$$

Les trois premières conditions portent sur les gains statiques du système et du filtre de robustification, alors que la dernière condition stipule que le régulateur admet un pôle en un, i.e sa fonction de transfert peut se récrire comme suit

$$\mathcal{R}(z^{-1}) = \frac{R(z^{-1})}{(1 - z^{-1})S(z^{-1})}$$

Le système de commande avec modèle interne réalise naturellement un rejet asymptotique des perturbations du type échelon, i.e. une séquence d'échelons d'amplitudes inconnues préalablement filtrées. Par ailleurs, on peut en déduire aisément l'équation de

l'erreur de poursuite du système de commande à partir de son équation de comportement en sortie, soit

$$e(t) = \mathcal{G}_{ec}(q^{-1})u^*(t) - \mathcal{G}_{sp}(q^{-1})v(t) - \mathcal{G}_{sb}(q^{-1})\eta(t)$$

avec

$$\mathcal{G}_c(z^{-1}) = \frac{S(z^{-1})(1 - z^{-1})}{A(z^{-1})F_d(z^{-1})} \mathcal{G}^*(z^{-1})$$

On peut alors conclure qu'un système de commande avec modèle interne permet de réaliser asymptotiquement une poursuite parfaite des séquences de référence de type échelon en présence des perturbations de type échelon. Ces performances en poursuite pourront être affinées si tous les zéros du système sont situés dans le domaine de stabilité et de performances adopté, i.e.  $B(z^{-1}) = 0 \implies z \in \mathcal{D}_{sp}$ . En effet, on pourrait alors spécifier le filtre de robustification de manière à réduire la dynamique de poursuite à un filtre indépendant du système comme le montre la propriété suivante.

$$\mathcal{F}(z^{-1}) = \frac{A(z^{-1})F(1)}{B(z^{-1})F(z^{-1})} \implies \mathcal{DP}(z^{-1}) = z^{-d-1} \frac{F(1)}{F(z^{-1})}$$

On peut ainsi réaliser une poursuite parfaite de la séquence de référence filtrée définie par

$$y_f^*(t) = \frac{F(1)}{F(q^{-1})} y^*(t - d - 1)$$

- 4) Les fonctions de sensibilité usuelles nominales qui en résultent sont données par les fonctions de transfert

$$\mathcal{S}(z^{-1}) = 1 - \mathcal{G}(z^{-1})\mathcal{F}(z^{-1})$$

$$\mathcal{T}(z^{-1}) = \mathcal{G}(z^{-1})\mathcal{F}(z^{-1})$$

$$\overline{\mathcal{G}}\mathcal{S}(z^{-1}) = \mathcal{G}(z^{-1})(1 - \mathcal{F}(z^{-1})\mathcal{G}(z^{-1}))$$

$$\mathcal{RS}(z^{-1}) = \mathcal{F}(z^{-1})$$

Il apparaît clairement que les performances nominales et la robustesse vis-à-vis des erreurs de modélisation inéluctables des systèmes de commande avec modèle interne peuvent être affinées en choisissant judicieusement le filtre de robustification. Ce dernier doit être un passe bas pour pouvoir réduire la sensibilité du système de commande aux bruits de mesure.

- 5) On peut faire un bilan ingénieur sur la commande avec modèle interne pour mieux appréhender ses atouts et ses limitations. Les atouts résultent des propriétés remarquables suivantes.

- La simplicité de mise en œuvre qui résulte naturellement de la simplicité du principe de la commande avec modèle interne comme le montre la figure 2. Un modèle de commande est mis en parallèle avec le système pour estimer les perturbations qui affectent le fonctionnement du système en supposant qu'elles peuvent être ramenées en sortie. Ces perturbations sont compensées par une contre réaction appropriée utilisant un filtre de robustification
- La spécification de la structure du filtre de robustification est triviale : un filtre passe bas dont le gain statique est égal à l'inverse du gain statique du modèle de commande et dont les pôles sont situés dans le domaine de stabilité et de performances, i.e.

$$\mathcal{F}(z^{-1}) \in \mathcal{EFPB} \text{ avec } \mathcal{CP}(\mathcal{F}(z^{-1})) \in \mathcal{D}_{sp} \text{ et } \mathcal{F}(1) = \frac{1}{\mathcal{G}(1)}$$

Quant à la bande passante du filtre, elle est spécifiée de manière à réaliser un modelage adéquat des fonctions de sensibilité usuelles.

- La compensation parfaite des perturbation du type échelon et la poursuite parfaite des séquences de référence du type échelon : des performances génériques d'un régulateur avec retour unitaire dotée d'une action intégrale.
- Une robustesse vis-à-vis des erreurs de modélisation inéluctables en spécifiant judicieusement le filtre de robustification, en l'occurrence l'insensibilité aux bruits de mesure avec un filtre de robustification du type passe bas.

Quant aux limitations, elles concernent principalement les conditions d'applicabilité aussi bien sur la classe des systèmes à commander que sur la classe des perturbations que l'on peut compenser.

- Les pôles du système doivent être situés dans le domaine de stabilité et de performances et son gain statique ne doit pas être nul, i.e.

$$\left( \mathcal{CP}(\mathcal{SYS}) \in \mathcal{D}_{sp} \right) \text{ et } \left( z \in \mathcal{CZ}(\mathcal{SYS}) \implies z \neq 0 \right)$$

La première condition résulte naturellement de l'invariance des pôles du système par une loi de commande avec modèle interne, alors que la seconde condition est une contrainte usuelle des performances en poursuite, i.e.  $\mathcal{DP}(0) = 1$ .

- Les perturbations doivent être du type échelon puisque la seule propriété générique du régulateur est qu'il admet une action intégrale.

### BE3 : ANALYSE D'UN ASSERVISSEMENT

Considérons le système asservi de la figure 3 où  $\mathcal{SYS}$  et  $\mathcal{REG}$  représentent le système et le régulateur, respectivement décrits par les fonctions de transfert

$$\mathcal{G}(z^{-1}) = z^{-d-1} \frac{B(z^{-1})}{A(z^{-1})} \text{ et } \mathcal{R}(z^{-1}) = \frac{R_n(z^{-1})}{R_d(z^{-1})}$$

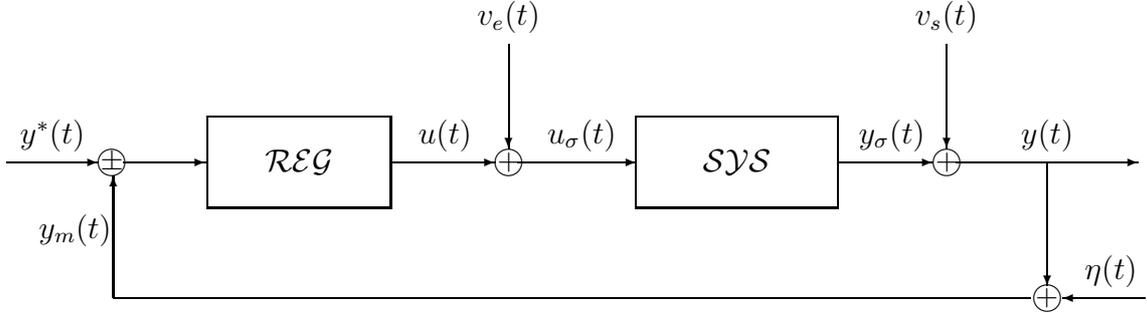


FIGURE 3 – Asservissement

On notera que cet asservissement peut être considéré comme un système défini par l'opérateur

$$\mathcal{G}_{sas} : u_{sas}(t) \triangleq \begin{pmatrix} y^*(t) \\ v_e(t) \\ v_s(t) \\ \eta(t) \end{pmatrix} \longrightarrow y_{sas}(t) \triangleq \begin{pmatrix} y(t) \\ u(t) \\ e(t) \end{pmatrix} \text{ avec } e(t) \triangleq y^*(t) - y(t)$$

Et que cet opérateur peut être décrit par la fonction de transfert

$$Y_{sas}(z) = \mathcal{G}_{sas}(z^{-1}) U_{sas}(z)$$

avec

$$\mathcal{G}_{sas}(z^{-1}) \triangleq \begin{pmatrix} \mathcal{G}_{sr}(z^{-1}) & \mathcal{G}_{spe}(z^{-1}) & \mathcal{G}_{sps}(z^{-1}) & \mathcal{G}_{sb}(z^{-1}) \\ \mathcal{G}_{er}(z^{-1}) & \mathcal{G}_{epe}(z^{-1}) & \mathcal{G}_{eps}(z^{-1}) & \mathcal{G}_{eb}(z^{-1}) \\ \mathcal{G}_{err}(z^{-1}) & \mathcal{G}_{erpe}(z^{-1}) & \mathcal{G}_{erps}(z^{-1}) & \mathcal{G}_{erb}(z^{-1}) \end{pmatrix}$$

que l'on peut représenter comme l'indiquent les figures 4, 5 et 6.

L'ultime motivation de ce BE est une évaluation des connaissances sur l'analyse et la synthèse des systèmes asservis échantillonnés dans le contexte usuel de la régulation industrielle caractérisé par les hypothèses usuelles.

- $\mathcal{H}1$ . Les perturbations de charge aussi bien en entrée qu'en sortie sont du type échelon.
- $\mathcal{H}2$ . Le bruit de mesure est caractérisé par une séquence de variables aléatoires de moyenne nulle et de variances finies.
- $\mathcal{H}3$ . La séquence de référence générée par un modèle de référence de fonction de transfert  $\mathcal{G}^*(z^{-1}) = z^{-d-1} \frac{B^*(z^{-1})}{A^*(z^{-1})}$  à partir d'une séquence de points de consigne  $\{u^*(t)\}$  du type échelon.

Pour ce faire, on suggère de procéder d'une manière rigoureuse et progressive en utilisant l'approche système développée dans le cours.

1) Montrer que le comportement d'entrée-sortie du système peut se mettre sous la forme

$$\text{SYS} \left\{ \begin{array}{l} A(q^{-1})y(t) = q^{-d-1}B(q^{-1})u(t) + E_e(q^{-1})v_e(t) + E_s(q^{-1})v_s(t) \\ u_\sigma(t) = u(t) + v_e(t) \\ y(t) = y_\sigma(t) + v_s(t) \\ D(q^{-1})v_e(t) = v_e\delta(t) \\ D(q^{-1})v_s(t) = v_s\delta(t) \end{array} \right.$$

Préciser les expressions des polynômes  $E_e(q^{-1})$ ,  $E_s(q^{-1})$  et  $D(q^{-1})$  à partir de la nature des perturbations considérées. On justifiera le fait que les polynômes  $B(q^{-1})$  et  $D(q^{-1})$  sont premiers entre eux.

2) Montrer que le régulateur peut être décrit par

$$\text{REG} \left\{ \begin{array}{l} R_d(q^{-1})u(t) + R_n(q^{-1})y_m(t) = R_n(q^{-1})y^*(t) \\ y_m(t) = y(t) + \eta(t) \\ A^*(q^{-1})y^*(t) = B^*(q^{-1})u^*(t - d - 1) \\ D(q^{-1})u^*(t) = u^*\delta(t) \end{array} \right.$$

3) Montrer que les performances d'entrée-sortie du système asservi sont respectivement données par les équations

$$\text{SAS} \left\{ \begin{array}{l} P_c(q^{-1})y(t) = q^{-d-1}B(q^{-1})R_n(q^{-1})y^*(t) - q^{-d-1}B(q^{-1})R_n(q^{-1})\eta(t) \\ \quad + q^{-d-1}B(q^{-1})R_d(q^{-1})v_e(t) + A(q^{-1})R_d(q^{-1})v_s(t) \\ P_c(q^{-1})u(t) = A(q^{-1})R_n(q^{-1})y^*(t) - A(q^{-1})R_n(q^{-1})\eta(t) \\ \quad - q^{-d-1}B(q^{-1})R_n(q^{-1})v_e(t) - A(q^{-1})R_n(q^{-1})v_s(t) \\ P_c(q^{-1})e(t) = A(q^{-1})R_d(q^{-1})y^*(t) + q^{-d-1}B(q^{-1})R_n(q^{-1})\eta(t) \\ \quad - q^{-d-1}B(q^{-1})R_d(q^{-1})v_e(t) - A(q^{-1})R_d(q^{-1})v_s(t) \end{array} \right.$$

où  $P_c(q^{-1})$  désigne le polynôme caractéristique du système asservi donné par

$$P_c(q^{-1}) = A(q^{-1})R_d(q^{-1}) + q^{-d-1}B(q^{-1})R_n(q^{-1})$$

4) Exprimer les diverses fonctions de transfert  $\mathcal{G}_{ij}(z^{-1})$  pour  $(i, j) \in [s, e, er] \times [r, pe, ps, b]$  en fonction des fonctions de sensibilité et de sensibilité complémentaires du système asservi, notamment

$$\mathcal{S}(z^{-1}) = \frac{A(z^{-1})R_d(z^{-1})}{P_c(z^{-1})} \text{ et } \mathcal{T}(z^{-1}) = \frac{z^{-d-1}B(z^{-1})R_n(z^{-1})}{P_c(z^{-1})}$$

- 5) Préciser les dynamiques de poursuite et de régulation et les conditions requises pour que le système asservi soit insensible aux bruits de mesure inéluctables.
- 6) Donner les propriétés requises pour que le système asservi réalise une précision maximale, soit  $\lim_{t \rightarrow \infty} e_r(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} e_{pe}(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} e_{ps}(t) = 0$ , et préciser la structure du régulateur sous-jacent.
- 7) Proposer un régulateur permettant de doter l'asservissement d'une précision maximale avec une dynamique de régulation caractérisée par un mode dominant d'amortissement élémentaire et de pulsation  $\omega_r$  et une dynamique de poursuite caractérisée par un mode dominant d'amortissement unitaire et une pulsation  $\omega_p$  telles que

$$\omega_r T_e \in \left[ \frac{\pi}{10}, \frac{\pi}{4} \right] \quad \text{et} \quad \omega_p \leq \frac{1}{2} \omega_p$$

On justifiera l'essence d'une telle spécification des dynamiques de régulation et de poursuite.

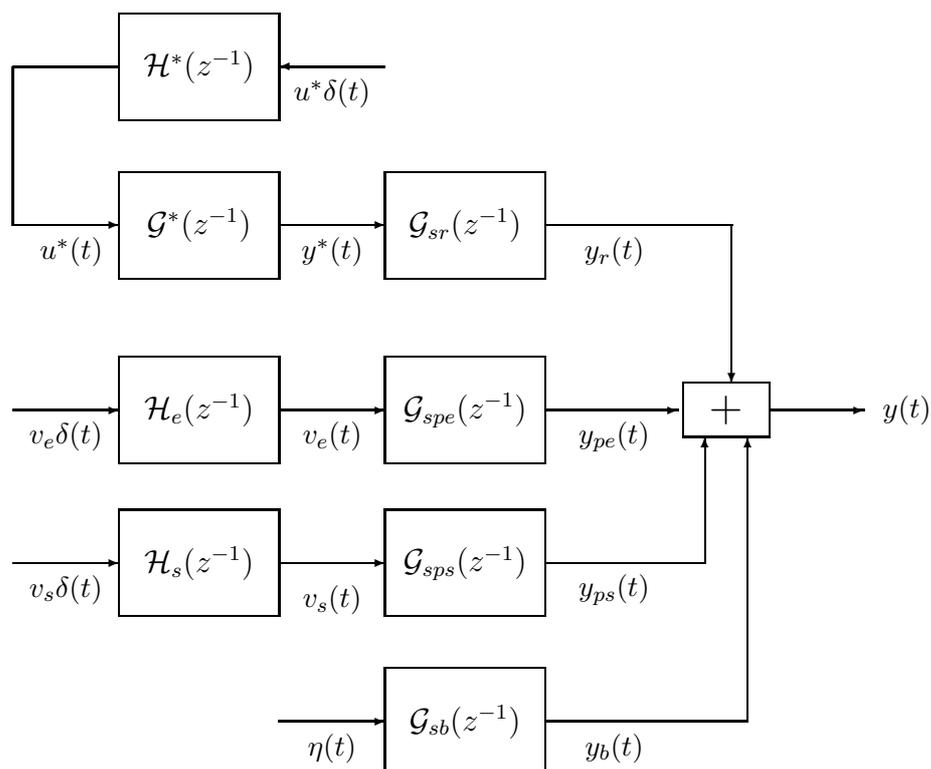


FIGURE 4 – Performances nominales en sortie

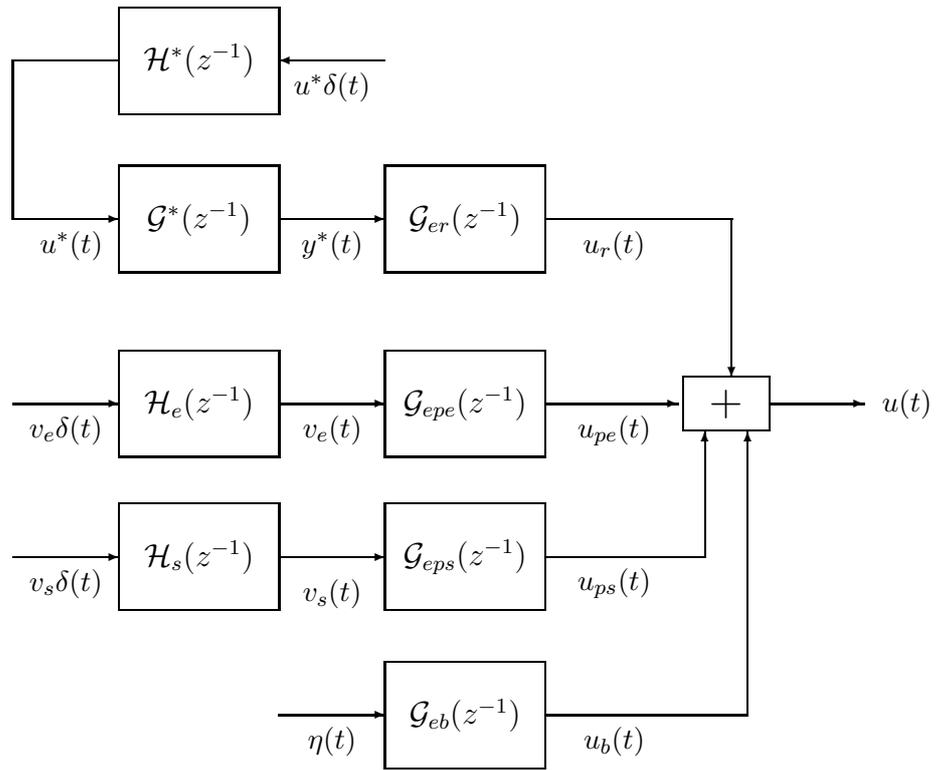


FIGURE 5 – Performances nominales en entrée

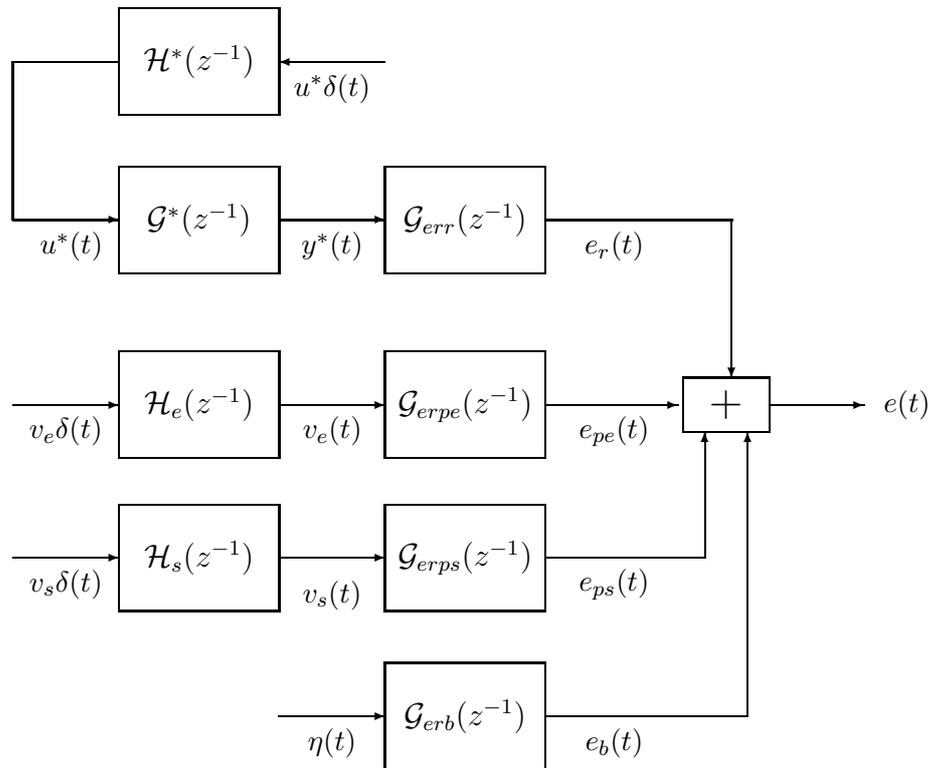


FIGURE 6 – Erreur de poursuite

## BE4 : SYNTHESE DES ASSERVISSEMENTS INDUSTRIELS

La plupart des problèmes de régulation industrielle concernent des asservissements pour une classe de systèmes caractérisée par

- Une dynamique du système autour de ses points de fonctionnement qui peut être raisonnablement décrite par un modèle de second ordre avec un retard

$$\mathcal{G}_c(s) = e^{-\tau_d s} \frac{\beta_0 s + \beta_1}{s^2 + \alpha_1 s + \alpha_2} \text{ avec } \beta_1 \neq 0$$

où  $\tau_d$  désigne le retard pur du système modulo le temps de calcul et les temps de conversion analogique  $\Leftrightarrow$  numérique que l'on peut exprimer comme suit

$$dT_e + \eta \text{ avec } d \in \mathcal{N} \text{ et } 0 \leq \eta < T_e$$

- Des perturbations de charge du type échelon aussi bien en entrée qu'en sortie du système
- Un bruit de mesure assimilable à une séquence de variables aléatoires de moyenne nulle et de variances finies.
- Des séquences de points de consigne du type échelon

On se propose de concevoir un asservissement à partir d'un cahier de charges défini par les trois spécifications données ci dessous.

- S1. Une poursuite admissible caractérisée par un mode d'amortissement unitaire et de pulsation propre  $\omega_p$ .
- S2. Un rejet asymptotique parfait des perturbations caractérisé par un mode dominant d'amortissement unitaire et de pulsation propre  $\omega_r = 2\omega_p$ .
- S3. Une insensibilité aux bruits de mesure inéluçables.

On demande de concevoir cet asservissement à partir d'une structure appropriée du régulateur et une synthèse conforme aux spécifications S1, S2 et S3 avec une période d'échantillonnage telle que  $\omega_r T_e = \frac{\pi}{8}$ .

## BE4 : UNE SOLUTION

On notera d'abord que la classe des systèmes considérée peut être décrite parfaitement par une fonction de transfert échantillonnée donnée par

$$\mathcal{G}(z^{-1}) = z^{-d-1} \frac{B(z^{-1})}{A(z^{-1})}$$

avec

$$A(z^{-1}) = 1 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2}$$

$$B(z^{-1}) = b_0 + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2}$$

où  $(b_0, b_1) \neq (0, 0)$  puisque le retard pur est différent de zéro dans la mesure où il incorpore le temps de calcul et les temps de conversion analogique  $\leftrightarrow$  numérique. Et comme la réponse indicielle d'un système échantillonné n'est autre que la réponse constituée des valeurs de la réponse indicielle du système continu sous-jacent aux instants d'échantillonnage, on aura

$$\mathcal{G}_c(0) \neq 0 \implies \mathcal{G}(1) \neq 0 \implies B(1) \neq 0$$

Compte tenu de cette classe des systèmes échantillonnés et de la nature des perturbations et de la séquence de consigne, on peut concevoir un asservissement réalisant les spécifications  $\mathcal{S}1$ ,  $\mathcal{S}2$  et  $\mathcal{S}3$  en adoptant une synthèse modale avec un régulateur avec retour unitaire donné par

$$\mathcal{REG} \begin{cases} S(q^{-1})D_r(q^{-1})u(t) = R(q^{-1})D_c(q^{-1})(y^*(t) - y_m(t)) \\ A^*(q^{-1})y^*(t) = B^*(q^{-1})u^*(t - d - 1) \end{cases}$$

avec

$$D_r(q^{-1}) = 1 - q^{-1}$$

$$D_c(q^{-1}) = 1 + q^{-1}$$

$$A^*(q^{-1}) = 1 - 2e^{-0.0625\pi}z^{-1} + e^{-0.0125\pi}z^{-2} \text{ et } B^*(q^{-1}) = A^*(1)$$

où la séquence de consigne  $\{u^*(t)\}$  est un échelon ou une séquence d'échelons largement espacés d'instant d'occurrence inconnus et  $(R(q^{-1}), S(q^{-1}))$  est la solution de structure minimale de l'équation polynomiale

$$A(q^{-1})D_r(q^{-1})S(q^{-1}) + q^{-d-1}B(q^{-1})D_c(q^{-1})R(q^{-1}) = M_d(q^{-1})M_a(q^{-1})$$

avec

$$M_d(q^{-1}) = 1 - 2e^{-0.125\pi}q^{-1} + e^{-0.25\pi}q^{-2}$$

$$M_a(q^{-1}) = \prod_{i=1}^{4+d} (1 - e^{-0.125\mu_i\pi} q^{-1}) \text{ avec } \mu_i \geq 2$$

Les choix du retour unitaire, du polynôme  $D_r(q^{-1})$  et de la fonction de transfert  $\mathcal{G}^*(z^{-1})$  permettent d'avoir un asservissement réalisant une précision maximale (S1), alors que le choix du polynôme  $D_c(q^{-1})$  est principalement motivé par des considérations d'insensibilité aux bruits de mesure (S3). Quant au choix des modes dominants (resp. auxiliaires) de l'asservissement, i.e. le polynôme  $M_d(q^{-1})$  (resp.  $M_a(q^{-1})$ ), ils sont conformes aux performances dynamiques requises (S2). Le nombre de modes auxiliaires, i.e.  $4 + d$ , est issu de la nature de la synthèse modale considérée. On notera que la solution de structure minimale est unique puisque les polynômes  $A(q^{-1})D_r(q^{-1})$  et  $B(q^{-1})D_c(q^{-1})$  sont premiers entre eux.

**Remarque 1** Dans le cas usuel de la régulation industrielle où le système à commander peut être raisonnablement décrit par un modèle de second ordre sans retard, i.e.  $(na, nb, d) = (2, 1, 0)$ , on aura

$$n\bar{a} = n\bar{b} = 3, n_r = n_s = 2 \text{ et } nm \leq 5$$

$$\bar{B}(z^{-1}) = b_o z^{-1} + (b_o + b_1) z^{-2} + b_1 z^{-2}$$

$$\bar{A}(z^{-1}) = 1 + (a_1 - 1) z^{-1} + (a_2 - a_1) z^{-2} - a_2 z^{-2}$$

Le système d'équations à résoudre pour la synthèse du système de commande est alors donné par

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a_1 - 1 & 1 & 0 & b_o & 0 & 0 \\ a_2 - a_1 & a_1 - 1 & 1 & b_o + b_1 & b_o & 0 \\ -a_2 & a_2 - a_1 & a_1 - 1 & b_1 & b_o + b_1 & b_o \\ 0 & -a_2 & a_2 - a_1 & 0 & b_1 & b_o + b_1 \\ 0 & 0 & -a_2 & 0 & 0 & b_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s_o \\ s_1 \\ s_2 \\ r_o \\ r_1 \\ r_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m_o \\ m_1 \\ m_2 \\ m_3 \\ m_4 \\ m_5 \end{bmatrix}$$