Exercice 1. *Quelques décompositions en séries de Fourier*

Pour chaque fonction, dessiner son graphe sur un intervalle de deux périodes, puis calculer ses coefficients de Fourier et vérifier les résultats suivants :

1. f est $2\pi-$périodique et définie sur $[-\pi, \pi[$ par $f(x) = x$:
$$a_n = 0 \qquad \text{et} \qquad b_n = \frac{2(-1)^{n+1}}{n}.$$
2. f est la fonction créneau 2π-périodique, avec $f(x) = -1$ sur $[-\pi, 0[$ et $f(x) = 1$ sur $[0, \pi[$:
$$a_n = 0 \qquad \text{et} \qquad b_n = \begin{cases} 0 & \text{pour } n \text{ pair} \\ \frac{4}{n\pi} & \text{pour } n \text{ impair} \end{cases}.$$
3. f est $L-$périodique $(L > 0)$ et définie sur $[-L/2, L/2[$ par $f(x) = |x|$:
$$b_n = 0, \qquad a_0 = \frac{L}{2} \qquad \text{et} \qquad a_n = \begin{cases} 0 & \text{pour } n \geq 2 \text{ pair} \\ -\frac{2L}{n^2\pi^2} & \text{pour } n \text{ impair} \end{cases}.$$

Exercice 2. *Application des séries de Fourier au calcul de séries numériques*

Soit f la fonction 2π-périodique et définie sur $[-\pi, \pi[$ par $f(x) = x^2$.

1. Dessiner son graphe sur l'intervalle $[-2\pi, 2\pi[$. Où la fonction est-elle continue ? Où est-elle de classe $\mathcal{C}^1$?
2. Déterminer sa série de Fourier.
3. En utilisant la convergence simple ou celle en moyenne quadratique de la série de Fourier, déduire les égalités :
$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}, \qquad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2} = \frac{\pi^2}{12}, \qquad \text{et} \qquad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90}.$$

Exercice 3. *Equation de diffusion : résolution par les séries de Fourier*

On cherche une fonction $u(x,t)$ à valeurs réelles qui, pour $(x,t) \in [0, 2\pi] \times \mathbb{R}_+^*$, vérifie l'équation de diffusion
$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} - a^2 \, \frac{\partial^2 u(x,t)}{x^2} = 0.$$
Ici $a \neq 0$ est une constante, et les variables x et t désignent respectivement la position et le temps. De plus, pour $t > 0$, la solution et sa dérivée spatiale vérifient les conditions aux bords
$$u(0,t) = u(2\pi, t)$$
$$\frac{\partial u}{\partial x}(0,t) = \frac{\partial u}{\partial x}(2\pi, t).$$
On peut alors prolonger la solution en une fonction 2π-périodique en x et de classe $\mathcal{C}^1$.

1. Dans un premier temps, on cherche des solutions avec la méthode de séparation des variables : on étudie des solutions de la forme
$$u(x,t) = f(x) \times g(t),$$
et on va déterminer les équations différentielles vérifiées par f et g.

a) Exprimer l'équation de diffusion avec f et g. Puis la diviser par $a^2 f(x)g(t)$, et la réorganiser en mettant les termes ne dépendant que de t à gauche de l'égalité, et ceux ne dépendant que de x à droite.

b) En raisonnant pour une valeur $x = x_0$ fixée, déduire que $\forall t > 0$, le membre de gauche ne varie pas : il est égal à une constante, que l'on notera λ. Obtenir alors l'équation différentielle vérifiée par g.

c) En déduire que $f''(x) - \lambda f(x) = 0$.

2. Montrer que f est nécessairement une combinaison de sinus et de cosinus. En déduire que les solutions à variables séparées sont les fonctions

$$u_k(x,t) = \exp\left(-a^2 k^2 t\right) (A_k \cos kx + B_k \sin kx)$$

où A_k et B_k sont des constantes réelles, et $k \in \mathbb{N}$.

3. Maintenant, on impose une condition initiale. A l'instant $t = 0$, la solution u est égale à la distribution spatiale φ :

$$\forall x \in [0, 2\pi], \quad u(x,0) = \varphi(x)$$

où φ est la fonction paire et 2π-périodique, définie sur l'intervalle $[0, \pi]$ par $\varphi(x) = (1 - 2x/\pi)$.

a) Tracer la courbe de φ sur l'intervalle $[-2\pi, 2\pi]$. La fonction est-elle continue sur $\mathbb{R}$? Est-elle de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$?

b) Calculer les coefficients de Fourier de φ, et montrer que $\varphi(x) = \dfrac{8}{\pi^2} \displaystyle\sum_{p=0}^{+\infty} \dfrac{\cos\big((2p+1)x\big)}{(2p+1)^2}$.

c) L'équation de diffusion étant linéaire, toute combinaison linéaire des u_k est aussi solution. On cherche alors une solution sous la forme d'une somme infinie $S = \lim\limits_{n \to +\infty} S_n$ avec $S_n = \sum\limits_{k=0}^{n} u_k$:

— Déterminer les coefficients A_k et B_k pour que S satisfasse à la condition initiale.

— Montrer que la série $S_n(x,0)$ obtenue converge bien vers $\varphi(x)$ pour tout $x \in [0, 2\pi]$.

d) Soit $\tau > 0$:

— Montrer que la série $S_n(x,t)$ est normalement convergente sur $[0, 2\pi] \times [\tau, +\infty]$.

— A x fixé, avec $x \in [0, 2\pi]$, montrer que la série dérivée $\frac{\partial S_n(x,t)}{\partial t}$ converge normalement pour tout $t \in [\tau, +\infty]$, et donc $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(\frac{\partial S_n(x,t)}{\partial t}\right) = \frac{\partial S(x,t)}{\partial t}$.

— A t fixé, avec $t > \tau$, montrer que $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(\frac{\partial^2 S_n(x,t)}{\partial x^2}\right) = \frac{\partial^2 S(x,t)}{\partial x^2}$ pour tout $x \in [0, 2\pi]$.

— Déduire que la limite S est solution de l'équation de diffusion sur $[0, 2\pi] \times [\tau, +\infty]$.

Conclure.

Exercice 4. *Equation de propagation des ondes : résolution par les séries de Fourier*

Soit v une constante réelle non nulle. On considère l'équation de propagation des ondes

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} - v^2 \frac{\partial^2 u(x,t)}{x^2} = 0.$$

La propagation a lieu dans un milieu fini de longueur L, et on impose les conditions aux bords :

$$\forall t \geq 0, \quad u(0,t) = 0 \quad \text{et} \quad u(L,t) = 0.$$

1. Par la méthode de séparation des variables, montrer qu'une solution de la forme $u(x,t) = f(x) \times g(t)$ conduit aux deux équations différentielles

$$f''(x) - \lambda f(x) = 0 \qquad \text{et} \qquad g''(t) - \lambda v^2 g(t) = 0$$

où λ est une constante.

2. On cherche d'abord les fonctions f qui satisfont aux conditions aux limites.
   a) Pour $\lambda \geq 0$, résoudre l'équation et montrer que seule la fonction nulle est une solution compatible.
   b) Pour $\lambda < 0$, notons $\lambda = -k^2$. Trouver les solutions compatibles, et montrer que k doit valoir $k_n = n\frac{\pi}{L}$ avec $n \in \mathbb{N}$.

3. Pour $\lambda = -k_n^2$ avec $n \in \mathbb{N}$, déterminer g, et montrer que la solution est

$$u_n(x,t) = \sin\left(k_n x\right) \Big(C_n \cos\left(k_n v t\right) + D_n \sin\left(k_n v t\right) \Big)$$

où C_n et D_n sont des constantes réelles.

4. On cherche maintenant une solution qui satisfait aux conditions initiales (à $t = 0$) :

$$\forall x \in [0, L], \quad u(x, 0) = \varphi_1(x) \quad \text{et} \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = \varphi_2(x),$$

où φ_1 est de classe $\mathcal{C}^4$ avec $\varphi_1(0) = \varphi_1(L) = 0$, $\varphi_1''(0) = \varphi_1''(L) = 0$, et φ_2 est de classe $\mathcal{C}^3$ avec $\varphi_2(0) = \varphi_2(L) = 0$.

Pour pouvoir utiliser les séries de Fourier, on prolonge la fonction φ_1 en une fonction $2L$-périodique impaire $\tilde{\varphi}_1$ définie par :

$$\tilde{\varphi}_1(x) = \begin{cases} -\varphi_1(-x) & \text{pour } x \in [-L, 0] \\ \varphi_1(x) & \text{pour } x \in [0, L] \end{cases}$$

De plus, on introduit Φ_2, qui est une primitive de φ_2, et on la prolonge en une fonction $2L$-périodique paire $\tilde{\Phi}_2$ définie par :

$$\tilde{\Phi}_2(x) = \begin{cases} \Phi_2(-x) & \text{pour } x \in [-L, 0] \\ \Phi_2(x) & \text{pour } x \in [0, L] \end{cases}$$

   a) Pour une solution de la forme $u(x,t) = \lim\limits_{N \to +\infty} \left(\sum\limits_{n=0}^{N} u_n(x,t) \right)$, déterminer les expressions que doivent avoir les coefficients C_n et D_n en fonction des coefficients de Fourier de $\tilde{\varphi}_1$ et de $\tilde{\Phi}_2$.
   b) Montrer que $C_n = \mathcal{O}(\frac{1}{n^4})$ et $D_n = \mathcal{O}(\frac{1}{n^4})$.
   c) En déduire que la série ainsi obtenue converge, et qu'elle est de classe $\mathcal{C}^2$.