Dans les exercices, l'espace est muni du repère cartésien orthonormal direct $(O, \vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z)$. Pour raccourcir les notations, on confond un point M avec son vecteur position $\vec{M} = \overrightarrow{OM}$.

Exercice 1. *Intégrales sur un plan*

Soit le champ de vecteur $\vec{E}(x, y, z) = y^2\vec{u}_x + z\vec{u}_y$.

1. Calculer la circulation de $\vec{E}$ le long du segment de droite orienté Γ reliant le point $A(0, 0, 0)$ au point $B(0, -1, 2)$.
2. Calculer le flux de $\vec{E}$ à travers le triangle vertical $\mathcal{S}_1$ de sommets $P(0, 1, 0)$, $Q(2, 1, 0)$ et $R(2, 1, 1)$ (préciser l'orientation choisie pour la surface).
3. On considère la surface oblique $\mathcal{S}_2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3_+ |\ x+y+z = 1\}$. Trouver un paramétrage de $\mathcal{S}_2$ sous la forme $\vec{\sigma}(x, y) = \begin{pmatrix} x \\ y \\ \sigma_z(x, y) \end{pmatrix}$. Puis calculer le flux de $\vec{E}$ à travers $\mathcal{S}_2$ orientée par $\vec{n} = \frac{1}{\sqrt{3}}(\vec{u}_x + \vec{u}_y + \vec{u}_z)$.

Exercice 2. *Intégrales sur une sphère*

On rappelle que la sphère $\mathcal{S}_R$, centrée en l'origine et de rayon $R > 0$, peut être paramétrée par $\vec{\sigma}(\theta, \varphi) = \begin{pmatrix} R\cos\varphi\sin\theta \\ R\sin\varphi\sin\theta \\ R\cos\theta \end{pmatrix}$. Au point $\vec{\sigma}(\theta, \varphi)$, le produit vectoriel $\frac{\partial\vec{\sigma}}{\partial\theta} \wedge \frac{\partial\vec{\sigma}}{\partial\varphi}$ est un vecteur normal à la sphère, et l'élément d'intégration de surface est $dS = \left\| \frac{\partial\vec{\sigma}}{\partial\theta} \wedge \frac{\partial\vec{\sigma}}{\partial\varphi} \right\| d\theta\, d\varphi$.

1. Montrer qu'au point $\vec{\sigma}(\theta, \varphi)$, le vecteur normal unitaire pointant vers l'extérieur de la sphère est le vecteur de la base sphérique $\vec{u}_r = \begin{pmatrix} \cos\varphi\sin\theta \\ \sin\varphi\sin\theta \\ \cos\theta \end{pmatrix}$, et que l'élément d'intégration de surface est $dS = R^2 \sin\theta\, d\theta\, d\varphi$.
2. On considère la moitié de quartier Σ qui est l'intersection de la sphère $\mathcal{S}_R$ avec la portion d'espace $\mathbb{R}^3_+$, et le champ $\vec{E}(x, y, z) = z\vec{u}_x$. Calculer le flux de $\vec{E}$ sortant de $\mathcal{S}_R$ à travers Σ.
3. Calculer la circulation (dans le sens de z croissant) de $\vec{E}$ le long du bord de Σ dans la plan (xOz).

Exercice 3. *Théorème de Green-Ostrogradski (ou du flux-divergence) sur un cube*

On considère le cube $\mathcal{V} = [0, 1]^3$, et le champ vectoriel $\vec{A}(x, y, z) = \begin{pmatrix} y^2 \\ 2xy + z^2 \\ 2yz \end{pmatrix}$.

1. Calculer $\iiint_{\mathcal{V}} \operatorname{div} \vec{A}\, dV$.
2. Calculer le flux de $\vec{A}$ sortant du cube $\mathcal{V}$, et vérifier le théorème de Green-Ostrogradski.

Exercice 4. *Théorème de Stokes sur un carré*

Soit la surface carrée $\mathcal{S} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | x = 0,\ (y, z) \in [0, 1]^2\}$, qui est orientée par le vecteur normal unitaire $\vec{n} = \vec{u}_x$. On définit par ailleurs le champ $\vec{A}(x, y, z) = \begin{pmatrix} 0 \\ 2xz + 3y^2 \\ 4yz^2 \end{pmatrix}$.

1. Calculer $\iint_{\mathcal{S}} \overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{A} \cdot d\vec{S}$.
2. Calculer la circulation de $\vec{A}$ le long du bord $\partial\mathcal{S}$ de la surface, et vérifier le théorème de Stokes.

Exercice 5. *Théorèmes de Green-Ostrogradski et de Stokes sur un cylindre*

Soient $H > 0$ et $R > 0$. On considère le cylindre $\mathcal{V}$ d'axe (Oz), de rayon $R > 0$, de cote comprise entre $z = -H$ et $z = H$. On appelle $\mathcal{S}_+$ le disque de la face supérieure, $\mathcal{S}_-$ celui de la face inférieure, et $\mathcal{S}_R$ la paroi verticale du cylindre.

1. Soit le champ $\vec{A}(x, y, z) = x\vec{u}_x + y\vec{u}_y + z\vec{u}_z$.
   - **a.** Calculer le flux de $\vec{A}$ sortant de $\mathcal{V}$.
   - **b.** Calculer $\iiint_{\mathcal{V}} \mathrm{div}\,\vec{A}\; dV$, et vérifier le théorème de Green-Ostrogradski.
   - **c.** Calculer la circulation (en sens direct) de $\vec{A}$ sur le cercle bordant $\mathcal{S}_+$.
   - **d.** Calculer le flux de $\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{A}$ sortant de $\mathcal{V}$ à travers $\mathcal{S}_+$, et vérifier le théorème de Stokes.
2. Refaire les calculs avec le champ $\vec{B}(x, y, z) = -xy\vec{u}_x + xz\vec{u}_y + z(x^2 + y^2)\vec{u}_z$ au lieu de $\vec{A}$.