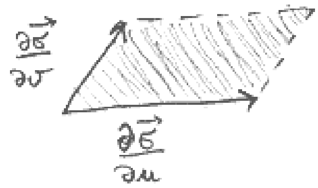
- L'élément d'intégration de surface sur S est

$$\boxed{dS = \left\| \frac{\partial \vec{\sigma}}{\partial u} \wedge \frac{\partial \vec{\sigma}}{\partial v} \right\| du\, dv}$$

$$\underbrace{\qquad\qquad\qquad}_{\text{aire du parallélogramme}}$$



- Le flux du champ vectoriel $\vec{F}$ à travers la surface régulière $\vec{\sigma}$ d'orientation $\vec{n}$ est

$$\iint_S \vec{F} \cdot \vec{dS} = \iint_{\mathcal{D}} \vec{F}(\vec{\sigma}(u,v)) \cdot \vec{dS}$$

avec $\vec{dS} = \vec{n}\, dS$

$= \pm \left(\frac{\partial \vec{\sigma}}{\partial u} \wedge \frac{\partial \vec{\sigma}}{\partial v} \right) du\, dv$ selon le choix d'orientation.

<u>Ex:</u> champ $\vec{F}(\vec{M}) = \begin{pmatrix} x \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

S = paroi verticale cylindrique $\vec{\sigma}(u,v) = \begin{pmatrix} R\cos(u) \\ R\sin(u) \\ v \end{pmatrix}$ avec $(u,v) \in [0,2\pi] \times [0,H]$

orientée vers l'extérieur avec $\vec{n}(u,v) = \begin{pmatrix} \cos(u) \\ \sin(u) \\ 0 \end{pmatrix}$

$$\vec{F}(\vec{\sigma}(u,v)) = \begin{pmatrix} R\cos(u) \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \vec{dS} = \frac{\partial \vec{\sigma}}{\partial u} \wedge \frac{\partial \vec{\sigma}}{\partial v}\, du\, dv = R \begin{pmatrix} -\sin(u) \\ \cos(u) \\ 0 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} du\, dv$$

$$= R \begin{pmatrix} \cos(u) \\ \sin(u) \\ 0 \end{pmatrix} du\, dv = R\, \vec{n}\, du\, dv$$

donc
$$\iint_S \vec{F} \cdot \vec{dS} = \int_0^{2\pi} \int_0^H \begin{pmatrix} R\cos(u) \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} R\cos(u) \\ R\sin(u) \\ 0 \end{pmatrix} du\, dv$$

$$= \int_0^{2\pi} \int_0^H R^2 \cos^2(u)\, du\, dv = R^2 \int_0^{2\pi} \cos^2(u)\, du \int_0^H dv = R^2 H \int_0^{2\pi} \frac{\cos(2u)+1}{2}\, du$$

$$= \frac{R^2 H}{2} \left[\frac{\sin(2u)}{2} + u \right]_0^{2\pi} = \pi R^2 H$$

<u>Ex:</u> champ $\vec{F}(\vec{M}) = \begin{pmatrix} x \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

S = sphère $\vec{\sigma}(u,v) = \begin{pmatrix} R\cos(v)\sin(u) \\ R\sin(v)\sin(u) \\ R\cos(u) \end{pmatrix}$ orientée vers l'extérieur

avec $\vec{n}(u,v) = \vec{u_r} = \begin{pmatrix} \cos(v)\sin(u) \\ \sin(v)\sin(u) \\ \cos(u) \end{pmatrix}$

alors
$$\iint_S \vec{F} \cdot \vec{dS} = \int_{u=0}^{\pi} \int_{v=0}^{2\pi} \begin{pmatrix} R\cos(v)\sin(u) \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos(v)\sin(u) \\ \sin(v)\sin(u) \\ \cos(u) \end{pmatrix} (R^2 \sin(u)\, du\, dv)$$

$$= \int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} R^3 \cos^2(v)\sin^3(u)\,du\,dv = R^3\int_0^{\pi}\sin^3(u)du\int_0^{2\pi}\cos^2(v)dv$$

$$= R^3\int_0^{\pi}\sin(u)\left(1-\cos^2(u)\right)du \int_0^{2\pi}\frac{\cos(2v)+1}{2}\,dv$$

$$= R^3\left[-\cos(u)+\frac{\cos^3(u)}{3}\right]_0^{\pi}\left[\frac{\sin(2v)}{4}+\frac{v}{2}\right]_0^{2\pi} = R^3\left(2-\frac{2}{3}\right)\times\pi = \frac{4}{3}\pi R^3$$

II. Opérateurs différentiels

Un opérateur différentiel transforme un champ en un autre, composé des dérivées partielles du premier. Par exemple

$$\vec{E} = \begin{pmatrix} E_x \\ E_y \\ E_y \end{pmatrix} \mapsto \mathcal{O}(\vec{E}) = \begin{pmatrix} \left(\frac{\partial E_x}{\partial z}\right)^2 \\ \frac{\partial E_y}{\partial y} - \frac{\partial E_z}{\partial x} \\ 2\frac{\partial E_x}{\partial y} \end{pmatrix}$$

Les trois opérateurs présentés dans la suite sont linéaires :

$$\begin{cases} \mathcal{O}(\vec{E}+\vec{F}) = \mathcal{O}(\vec{E}) + \mathcal{O}(\vec{F}) \\ \mathcal{O}(\lambda\vec{E}) = \lambda\,\mathcal{O}(\vec{E}) \quad \text{avec } \lambda = \text{constante} \end{cases}$$

a) Le gradient

Déf : Soit f un champ scalaire dérivable.

Son gradient est le champ vectoriel $\boxed{\overrightarrow{\mathrm{grad}}\, f = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} \\ \frac{\partial f}{\partial y} \\ \frac{\partial f}{\partial z} \end{pmatrix}}$

Avec le vecteur symbolique $\boxed{\text{nabla } \vec{\nabla} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix}}$, on écrit

$$\boxed{\overrightarrow{\mathrm{grad}}\, f = \vec{\nabla} f}$$

Ex : $f(\vec{M}) = e^{i\vec{k}\cdot\vec{M}}$ avec $\vec{k} = \begin{pmatrix} k_x \\ k_y \\ k_z \end{pmatrix}$ et $\vec{M} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$

alors $\vec{\nabla} f(\vec{M}) = i\vec{k}\, e^{i\vec{k}\cdot\vec{M}}$

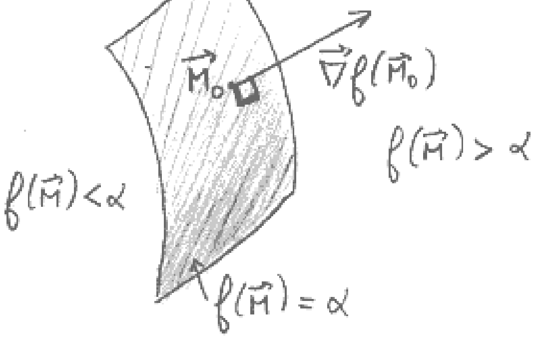
Ex : * Le champ électrique $\vec{E} = -\overrightarrow{\mathrm{grad}}\, V$ où V est le potentiel élec.

* Loi de Fick : le courant de matière $\vec{J} = -D\,\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,\phi$ où ϕ est la concentration de matière et D le coefficient de diffusion.

Prop : Le gradient donne la variation de f au voisinage de $\vec{M}$:

$$\boxed{f(\vec{M}+\delta\vec{M}) = f(\vec{M}) + \vec{\nabla}f(\vec{M})\cdot\delta\vec{M} + o(\|\delta\vec{M}\|)}$$

Par conséquent, le gradient est normal aux iso-surfaces de f. (une iso-surface est une surface sur laquelle f garde la même valeur), et il pointe dans le sens des valeurs croissantes de f



S'il y a un extremum de f en $\vec{M}_0$ alors $\vec{\nabla}f(\vec{M}_0) = \vec{0}$.

Prop : Soit f un champ scalaire $\mathcal{C}^1$ sur le voisinage d'une courbe paramétrée $\vec{\gamma}$ alors la circulation de $\vec{\nabla}f$ sur $\vec{\gamma}([a,b])$ est

$$\boxed{\int_{\vec{\gamma}([a,b])} \vec{\nabla}f\cdot\vec{dl} = \int_a^b \vec{\nabla}f(\vec{\gamma}(t))\cdot\frac{d\vec{\gamma}}{dt}(t)\,dt = f(\vec{\gamma}(b)) - f(\vec{\gamma}(a))}$$

En effet,

$$\int_a^b \vec{\nabla}f(\vec{\gamma}(t))\cdot\frac{d\vec{\gamma}}{dt}(t)\,dt = \int_a^b \left[\frac{\partial f}{\partial x}(\vec{\gamma}(t))\frac{d\gamma_x(t)}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y}(\vec{\gamma}(t))\frac{d\gamma_y(t)}{dt} + \frac{\partial f}{\partial z}(\vec{\gamma}(t))\frac{d\gamma_z(t)}{dt}\right]dt$$

$$= \int_a^b \frac{d}{dt}\Big(f(\vec{\gamma}(t))\Big)\,dt = \Big[f(\vec{\gamma}(t))\Big]_a^b = f(\vec{\gamma}(b)) - f(\vec{\gamma}(a))$$

b) La divergence

Déf : Soit $\vec{F}$ un champ vectoriel dérivable.

Sa divergence est le champ scalaire

$$\boxed{\operatorname{div}\vec{F} = \vec{\nabla}\cdot\vec{F} = \begin{pmatrix}\frac{\partial}{\partial x}\\ \frac{\partial}{\partial y}\\ \frac{\partial}{\partial z}\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}F_x\\ F_y\\ F_z\end{pmatrix} = \frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial F_y}{\partial y} + \frac{\partial F_z}{\partial z}}$$

Ex: Soit $\vec{v} = \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{pmatrix}$ et $\vec{k} = \begin{pmatrix} k_x \\ k_y \\ k_z \end{pmatrix}$ deux vecteurs constants

Soit le champ vectoriel $\vec{F}(\vec{M}) = e^{i\vec{k}.\vec{M}}\,\vec{v}$

alors $\operatorname{div}\vec{F}(\vec{M}) = \frac{\partial}{\partial x}\left(v_x\, e^{i\vec{k}.\vec{M}}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(v_y\, e^{i\vec{k}.\vec{M}}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(v_z\, e^{i\vec{k}.\vec{M}}\right)$

$$= v_x \frac{\partial}{\partial x}\left(e^{i\vec{k}.\vec{M}}\right) + v_y \frac{\partial}{\partial y}\left(e^{i\vec{k}.\vec{M}}\right) + v_z \frac{\partial}{\partial z}\left(e^{i\vec{k}.\vec{M}}\right)$$

$$= \vec{v}\,.\,\vec{\nabla}\left(e^{i\vec{k}.\vec{M}}\right) = \vec{v}\,.\left(i\vec{k}\, e^{i\vec{k}.\vec{M}}\right)$$

$$= i\vec{k}\,.\left(\vec{v}\, e^{i\vec{k}.\vec{M}}\right) = i\vec{k}\,.\,\vec{F}(\vec{M})$$

Ex: En électromagnétisme,

$\operatorname{div}\vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$ où ρ est la densité volumique de charge

$\operatorname{div}\vec{B} = 0$

<u>Th. de Green-Ostrogradski (ou du flux-divergence)</u>:

Soit V un domaine borné de $\mathbb{R}^3$ qui est délimité par une surface ∂V régulière (par morceaux).
Soit $\vec{F}$ un champ $\mathcal{C}^1$ sur un voisinage de V.
Alors le flux sortant de $\vec{F}$ à travers la surface ∂V est égal à l'intégrale de $\operatorname{div}\vec{F}$ sur V :

$$\boxed{\oiint_{\partial V} \vec{F}\,.\,d\vec{S} = \iiint_V \operatorname{div}\vec{F}\; dV}$$

Ici $d\vec{S} = \vec{n}\, dS$ avec $\vec{n}$ le vecteur unitaire, normal à ∂S et sortant de V.

Ex: champ $\vec{F}(\vec{M}) = \begin{pmatrix} x \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, V = boule de rayon R centrée sur l'origine

∂V = sphère " " "

On a vu que $\oiint_{\partial V} \vec{F}.d\vec{S} = \frac{4}{3}\pi R^3$. C'est normal car d'après le th., c'est égal à $\iiint_V \operatorname{div}\vec{F}\, dV$. Or $\operatorname{div}\vec{F} = \frac{\partial}{\partial x}(x) = 1$

donc $\iiint_V \operatorname{div}\vec{F}\, dV = \iiint_V dV$ = volume de V $= \frac{4}{3}\pi R^3$.

Ex: Th. de Gauss en électromagnétisme.

Le flux du champ $\vec{E}$ sortant du volume V est égal à

$$\oint\!\!\!\oint_{\partial V} \vec{E}\cdot d\vec{S} = \iiint_V \operatorname{div}\vec{E}\, dV = \iiint_V \frac{\rho}{\varepsilon_0}\, dV \quad \text{car } \operatorname{div}\vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

$$= \frac{1}{\varepsilon_0} \times \text{charge contenue dans le volume } V$$

c) Le rotationnel

Déf: Soit $\vec{F}$ un champ vectoriel dérivable.

Le rotationnel de $\vec{F}$ est le champ vectoriel

$$\boxed{\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{F} = \vec{\nabla} \wedge \vec{F} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} F_x \\ F_y \\ F_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial F_z}{\partial y} - \frac{\partial F_y}{\partial z} \\ \frac{\partial F_x}{\partial z} - \frac{\partial F_z}{\partial x} \\ \frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y} \end{pmatrix}}$$

Ex: Soit $\vec{F}(\vec{M}) = \vec{v}\, e^{i\vec{k}\cdot\vec{M}}$ où $\vec{v}$ et $\vec{k}$ sont constants.

Alors $\vec{\nabla} \wedge \vec{F}(\vec{M}) = i(\vec{k}\wedge\vec{v})e^{i\vec{k}\cdot\vec{M}} = i\vec{k}\wedge\vec{F}(\vec{M})$.

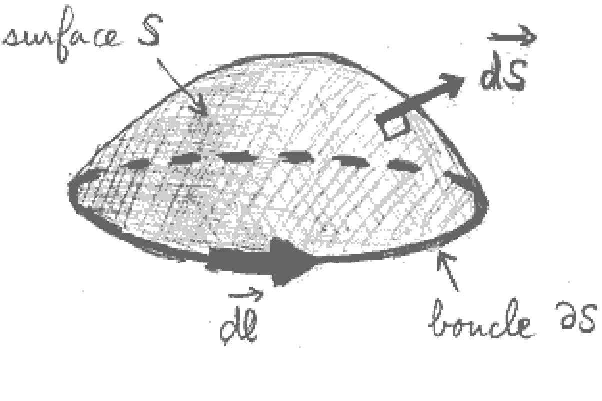
Th. de Stokes (– Ampère) :

Soit ∂S une boucle régulière (par morceaux) qui délimite une surface S régulière (par morceaux).

Soit $\vec{F}$ une champ vectoriel $\mathcal{C}^1$ sur un voisinage de S.

La circulation de $\vec{F}$ sur ∂S est égale au flux de $\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{F}$ à travers S, avec le sens de circulation $\vec{dl}$ et l'orientation $\vec{dS}$ choisis de sorte qu'en tout point de la boucle, $\vec{dS}\wedge\vec{dl}$ pointe vers la surface.

$$\boxed{\oint_{\partial S} \vec{F}\cdot\vec{dl} = \iint_S \overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{F}\cdot d\vec{S}}$$



Ex: Théorème d'Ampère en électromagnétisme

En régime permanent, $\vec{\mathrm{rot}}\,\vec{B} = \mu_0 \vec{j}$

donc $\oint_{\partial S} \vec{B} \cdot \vec{d\ell} = \mu_0 \iint_S \vec{j} \cdot \vec{dS} = \mu_0 I$, c'est à dire que la circulation du champ magnétique $\vec{B}$ sur une boucle ∂S est égale à $\mu_0 \times$ l'intensité du courant enlacé par la boucle.

Identités remarquables

$$\boxed{\vec{\mathrm{rot}}\,(\vec{\mathrm{grad}}\, f) = \vec{0}}$$

$$\boxed{\mathrm{div}\,(\vec{\mathrm{rot}}\,\vec{F}) = 0}$$