Exercice 1. *Intégration d'équations aux dérivées partielles*

Soit f une fonction de deux variables. Résoudre les EDP :

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 0, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 0.$$

Exercice 2. *Règle de dérivation en chaîne*

Soit $(u, v) \mapsto F(u, v)$ une fonction de classe $\mathcal{C}^2(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$. Pour la fonction $f(x) = F(3x+1, -x)$, vérifier que :

a. $f'(x) = 3\dfrac{\partial F}{\partial u}(3x+1, -x) - \dfrac{\partial F}{\partial v}(3x+1, -x)$,

b. $f''(x) = 9\dfrac{\partial^2 F}{\partial u^2}(3x+1, -x) - 6\dfrac{\partial^2 F}{\partial u \partial v}(3x+1, -x) + \dfrac{\partial^2 F}{\partial v^2}(3x+1, -x)$.

Exercice 3. *EDP résolue par changement linéaire de variables*

Soient $f(x, y)$ et $F(u, v)$ deux fonctions à valeurs réelles, de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2$, qui sont reliées par le changement de variables

$$f(x, y) = F\Big(U(x, y), V(x, y)\Big)$$

avec

$$U(x, y) = x + ay \qquad \text{et} \qquad V(x, y) = x + by$$

(a et b sont des constantes).

a. Quelle condition doivent vérifier a et b pour que l'application $(x, y) \mapsto (U(x, y), V(x, y))$ soit bijective de $\mathbb{R}^2$ vers $\mathbb{R}^2$, et donc inversible ?

b. Exprimer les dérivées partielles premières et secondes de f à l'aide de celles de F.

c. En utilisant $a = -1$ et $b = 1$, résoudre l'EDP $\dfrac{\partial f}{\partial x} - \dfrac{\partial f}{\partial y} = 0$.

d. En utilisant $a = 1$ et $b = -1$, résoudre l'EDP $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} - \dfrac{\partial f^2}{\partial y^2} = 0$.

e. En utilisant $a = 0$ et $b = 1$, résoudre l'EDP $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} - 2\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0$.

Exercice 4. *EDP résolue en coordonnées polaires*

Soit $f : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\} \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^2$. On considère la fonction $F :]0, +\infty[\times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $F(r, \theta) = f(r\cos\theta, r\sin\theta)$.

a. Déterminer $\frac{\partial F}{\partial r}, \frac{\partial F}{\partial \theta}, \frac{\partial^2 F}{\partial r^2}, \frac{\partial^2 F}{\partial \theta^2}, \frac{\partial^2 F}{\partial r \partial \theta}$ en fonction des dérivées de f.

b. Soit le demi-plan $\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | x > 0\}$. Résoudre l'EDP $x\frac{\partial f}{\partial x} + y\frac{\partial f}{\partial y} = 0$ sur Ω en passant en coordonnées polaires ($x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$).

c. Le Laplacien de f est la fonction $\Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$. Vérifier que

$$\Delta f(r\cos\theta, r\sin\theta) = \frac{\partial^2 F}{\partial r^2}(r, \theta) + \frac{1}{r}\frac{\partial F}{\partial r}(r, \theta) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 F}{\partial \theta^2}(r, \theta).$$

d. Trouver les fonctions à variables séparées $F(r, \theta) = g(r)h(\theta)$ qui donnent des solutions de l'EDP de Laplace $\Delta f(x, y) = 0$ pour $(x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$.

Exercice 5. *Recherche d'extremum local*

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^3$ par

$$f(x,y,z) = (x-1)^2 + 3(y+1)^2 + 2(y+1)z + 3z^2.$$

a. Montrer que son seul point critique est $(x_0, y_0, z_0) = (1, -1, 0)$.

b. Etudier la nature du point critique.

Exercice 6. *Recherche d'extremum local*

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^3$ par

$$f(x,y,z) = (x^2 - y^2)\exp(-x^2 - z^2)$$

a. Déterminer ses points critiques.

b. Montrer qu'en un point critique (x_0, y_0, z_0), sa matrice hessienne se simplifie en

$$H = \mathrm{e}^{-x_0^2 - z_0^2} \begin{pmatrix} 2 - 6x_0^2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -2x_0^2 \end{pmatrix}.$$

c. En déduire la nature des points critiques.

Exercice 7. *Extremum sous contraintes*

Trouver les extrema de la restriction de f sur Ω pour :

a. $f(x,y,z) = x - y + z, \quad \Omega = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 | \; x^2 + y^2 + z^2 = 2\},$

b. $f(x,y) = \sin(xy), \quad \Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | \; x^2 + 2y^2 = 1\},$

c. $f(x,y,z) = x + y + z, \quad \Omega = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 | \; x^2 - y^2 = 1, \; 3x + z = 1\}.$

Exercice 8. *Volume extremal d'un pavé à surface constante*

On considère le pavé de longueur $x \geq 0$, de largeur $y \geq 0$, et de hauteur $z \geq 0$. Son volume est égal à $V(x,y,z) = xyz$ et l'aire totale de ses faces est donnée par $A(x,y,z) = 2(xy + xz + yz)$. Sous la contrainte $A(x,y,z) = A_0$ (A_0 est une constante > 0), existe-t-il un volume minimal et/ou un volume maximal ? Quitte à redimensionner les axes par un facteur $\sqrt{A_0/6}$, on va répondre à la question pour $A_0 = 6$.

a. Montrer que le volume minimal sous contrainte est 0.

b. Utiliser la méthode du multiplicateur de Lagrange pour trouver un point critique sous contrainte.

c. Montrer que le point critique donne un volume maximal sous la contrainte.