Exercice 1. *Intégrales doubles*

Dessiner les domaines $\mathcal{D}$, puis vérifier les valeurs des intégrales :

1. $\mathcal{D} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, 1 < x < 3,\ y > 2,\ x+y < 5\}$ et $\displaystyle\iint_{\mathcal{D}} \frac{dx\,dy}{(x+y)^3} = \frac{2}{75}$.
2. $\mathcal{D}$ est le triangle de sommets $A(0,0)$, $B(1,4)$ et $C(2,3)$, et $\displaystyle\iint_{\mathcal{D}} \sin\Big(\pi(x+y)\Big)\,dx\,dy = \frac{1}{\pi}$.
3. $\mathcal{D} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, 0 \le x \le 1,\ 0 \le y \le 1,\ x^2+y^2 \ge 1\}$ et $\displaystyle\iint_{\mathcal{D}} \frac{xy\,dx\,dy}{1+x^2+y^2} = \frac{3}{4}\ln\left(\frac{3}{2}\right) - \frac{1}{4}$.

Exercice 2. *Intégrales doubles en coordonnées polaires*

Dessiner les domaines $\mathcal{D}$ et donner leurs paramétrages polaires. Puis vérifier les valeurs des intégrales en utilisant l'intégration en coordonnées polaires :

1. $\mathcal{D} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, 0 \le x \le 1,\ 0 \le y \le 1,\ 0 \le x^2+y^2 \le 1\}$ et $\displaystyle\iint_{\mathcal{D}} \frac{dx\,dy}{1+x^2+y^2} = \frac{\pi}{4}\ln 2$.
2. $\mathcal{D} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, x \ge \frac{\sqrt{2}}{2},\ 0 \le x^2+y^2 \le 1\}$ et $\displaystyle\iint_{\mathcal{D}} \frac{x}{x^2+y^2}\,dx\,dy = \sqrt{2} - \frac{\pi}{2\sqrt{2}}$.
3. Le disque $\mathcal{D} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, x^2+y^2-2x \le 0\}$ et $\displaystyle\iint_{\mathcal{D}} \sqrt{x^2+y^2}\,dx\,dy = \frac{32}{9}$.

Exercice 3. *Valeur de l'intégrale gaussienne*

On se propose de montrer que $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}dx = \lim_{a\to+\infty}\left(\int_{-a}^{a} e^{-x^2}dx\right)$ est égale à $\sqrt{\pi}$.

1. Pour $a > 0$, on note K_a le carré de centre O de côté $2a$. D_a et $D_{a\sqrt{2}}$ sont les disques de centre O, et de rayons respectifs a et $a\sqrt{2}$. La fonction f est définie sur $\mathbb{R}^2$ par
$$f(x,y) = e^{-x^2-y^2}.$$
Justifier que
$$\iint_{D_a} f(x,y)dxdy \le \iint_{K_a} f(x,y)dxdy \le \iint_{D_{a\sqrt{2}}} f(x,y)dxdy.$$
2. En passant en coordonnées polaires, calculer $\iint_{D_a} f(x,y)dxdy$.
3. Déduire des questions précédentes la valeur de $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}dx$.

Exercice 4. *Intégrale triple évaluée par tranches et par piles*

On considère le domaine $\mathcal{D} = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 |\, x \ge 0, y \ge 0, z \ge 0, x+y+z \le 1\}$ et l'intégrale $I = \displaystyle\iiint_{\mathcal{D}} x\,dx\,dy\,dz$ que l'on va calculer avec deux méthodes différentes.

1. Dessiner le domaine $\mathcal{D}$.
2. Intégration par tranches :
Soit $\mathcal{S}_z = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 |\, (x,y,z) \in \mathcal{D}\}$ le domaine bi-dimensionnel décrivant la tranche de $\mathcal{D}$ à la cote z.
   (a) Déterminer l'intervalle $\mathcal{E}$ des valeurs de z pour lesquelles l'ensemble $\mathcal{S}_z$ est non-vide.
   (b) Pour une valeur fixée $z \in \mathcal{E}$, calculer $J(z) = \iint_{\mathcal{S}_z} x\,dx\,dy$. Puis évaluer $I = \int_{\mathcal{E}} J(z)\,dz$.

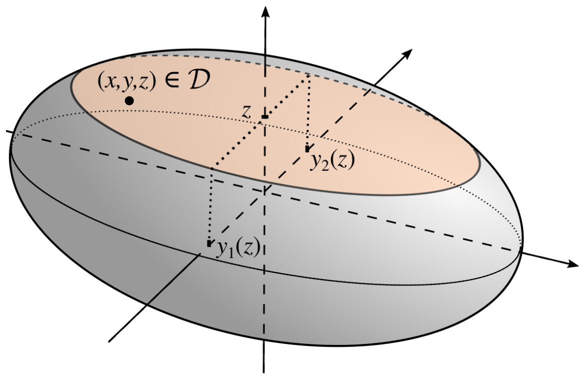
3. Intégration par piles :
   Soit $\mathcal{E}_{x,y} = \{z \in \mathbb{R} | \, (x,y,z) \in \mathcal{D}\}$ l'ensemble des cotes des points de la pile de $\mathcal{D}$ à l'abscisse x et à l'ordonnée y.
   (a) Déterminer l'ensemble $\mathcal{S}$ des couples (x,y) pour lesquels le segment $\mathcal{E}_{x,y}$ est non-vide.
   (b) Pour un couple fixé $(x,y) \in \mathcal{S}$, calculer $K(x,y) = \int_{\mathcal{E}_{x,y}} x \, dz$. Puis évaluer $I = \iint_{\mathcal{S}} K(x,y) \, dx \, dy$.

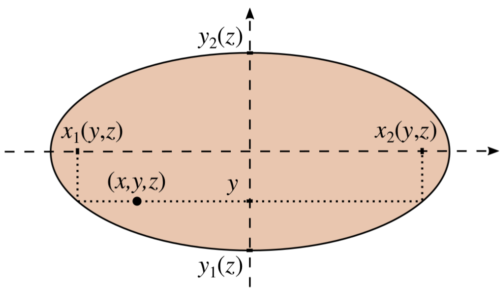
Exercice 5. *Volume d'un ellipsoïde*

On considère l'ellipsoïde d'équation $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{2} + z^2 = 1$. Cette surface délimite un volume dont la valeur est égale à $V = \iiint_{\mathcal{D}} dx \, dy \, dz$, avec le domaine $\mathcal{D} = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \, | \, \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{2} + z^2 \leq 1\}$. Pour évaluer l'intégrale, on va procéder de deux manières.

1. Intégration par tranches :

   (a) Pour $z \in [-1,1]$, trouver un paramétrage cartésien de la tranche de $\mathcal{D}$ à l'altitude z. Pour cela, déterminer le minimum $y_1(z)$ et le maximum $y_2(z)$ des ordonnées des points appartenant à cette tranche. Puis pour $y \in [y_1(z), y_2(z)]$, déterminer l'intervalle $[x_1(y,z), x_2(y,z)]$ des valeurs de x qui donnent des points (x,y,z) dans la tranche.





   (b) Evaluer l'intégrale avec $V = \displaystyle\int_{-1}^{1} \left(\int_{y_1(z)}^{y_2(z)} \left(\int_{x_1(y,z)}^{x_2(y,z)} dx \right) dy \right) dz.$

2. Changement de variables :
   Déterminer les coefficients α, β et γ du changement de variables $\Phi : (u,v,w) \mapsto (x = \alpha u, y = \beta v, z = \gamma w)$ qui transforme la boule unité $B_1 = \{(u,v,w) \in \mathbb{R}^3 \, | \, u^2 + v^2 + w^2 \leq 1\}$ en le domaine $\mathcal{D}$. Calculer ensuite l'intégrale V avec la formule de changement de variables.

Exercice 6. *Intégrales triples*

Dessiner les domaines $\mathcal{D}$, puis vérifier les valeurs des intégrales :

1. $\mathcal{D} = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 | \, x^2 + y^2 + z^2 \leq 1\}$ et $\displaystyle\iiint_{\mathcal{D}} \cos(x) \, dx \, dy \, dz = 4\pi(\sin 1 - \cos 1)$.
2. Pour $a > 0$, $\mathcal{D} = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 | \, x^2 + y^2 \leq a^2, 0 \leq z \leq a\}$ et $\displaystyle\iiint_{\mathcal{D}} \frac{z}{\sqrt{x^2+y^2}} \, dx \, dy \, dz = \pi a^3$.
3. Pour $a > 1$, $\mathcal{D} = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 | \, 1 \leq x^2 + y^2 + z^2 \leq a^2, z \geq 0\}$ et $\displaystyle\iiint_{\mathcal{D}} x^2 z \, dx \, dy \, dz = \frac{\pi \, (a^6 - 1)}{24}$.