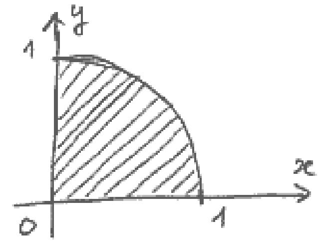
Ex : Intégrales doubles en coordonnées polaires

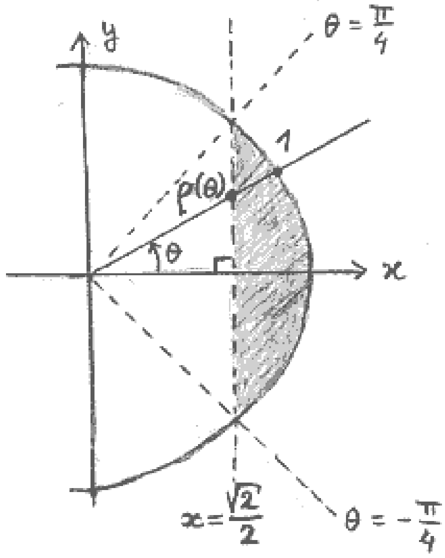


1) • $\mathcal{D} = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq x \leq 1,\ 0 \leq y \leq 1,\ x^2+y^2 \leq 1 \}$

$\mathcal{D}$ est l'intersection du disque unité avec le quart de plan des $x \geq 0$ et $y \geq 0$.

• En coordonnées polaires, on a donc $r \in [0,1]$ et $\theta \in [0, \frac{\pi}{2}]$

• $$\iint_{\mathcal{D}} \frac{dx\,dy}{1+\underbrace{x^2+y^2}_{=r^2}} = \int_0^1 \int_0^{\pi/2} \frac{r\,dr\,d\theta}{1+r^2} = \int_0^1 \frac{r\,dr}{1+r^2} \times \int_0^{\pi/2} d\theta$$
$$= \left[\tfrac{1}{2} \ln(1+r^2) \right]_0^1 \times \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{4} \ln(2)$$

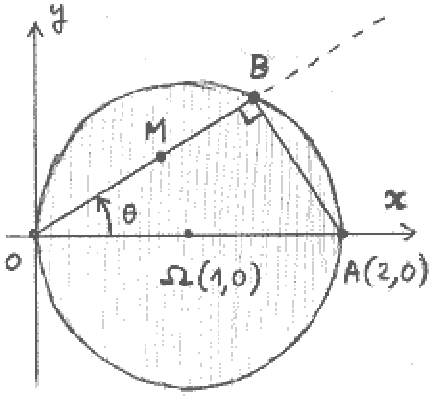


2) • $\mathcal{D} = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \geq \frac{\sqrt{2}}{2},\ 0 < x^2+y^2 \leq 1 \}$

$\mathcal{D}$ est l'intersection du demi-plan $x \geq \frac{\sqrt{2}}{2}$ et du disque unité.

• Un point de $\mathcal{D}$ a son angle θ compris entre $-\frac{\pi}{4}$ et $\frac{\pi}{4}$.
Pour un θ donné, les valeurs possibles de r sont comprises entre $\rho(\theta) = \frac{1}{\sqrt{2}\cos\theta}$ et 1.

• Donc $$\iint_{\mathcal{D}} \frac{x}{x^2+y^2} dx\,dy = \int_{-\pi/4}^{\pi/4} \left(\int_{\rho(\theta)}^1 \frac{r\cos\theta}{r^2}\, r\,dr \right) d\theta$$
$$= \int_{-\pi/4}^{\pi/4} \left(\int_{\rho(\theta)}^1 dr \right) \cos\theta\, d\theta = \int_{-\pi/4}^{\pi/4} \left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}\cos\theta} \right) \cos\theta\, d\theta = \int_{-\pi/4}^{\pi/4} \left(\cos\theta - \frac{1}{\sqrt{2}} \right) d\theta$$
$$= \left[\sin\theta - \frac{\theta}{\sqrt{2}} \right]_{-\pi/4}^{\pi/4} = \sqrt{2} - \frac{\pi}{2\sqrt{2}}$$



3) • $\mathcal{D} = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2-2x \leq 0 \}$. Le point $M(x,y) \in \mathcal{D}$ si

$x^2+y^2-2x \leq 0 \iff (x-1)^2 - 1 + y^2 \leq 0 \iff (x-1)^2+y^2 \leq 1$

$\iff \Omega M^2 \leq 1$ avec $\Omega(1,0)$

$\iff$ M appartient au disque de centre Ω et de rayon 1.

• Un point $M \in \mathcal{D}$, d'angle polaire θ, a un rayon r compris entre 0 et la distance $OB = OA \times \cos\theta = 2\cos\theta$.
θ varie entre $-\frac{\pi}{2}$ et $\frac{\pi}{2}$.

• $$\iint_{\mathcal{D}} \sqrt{x^2+y^2}\, dx\,dy = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \left(\int_0^{2\cos\theta} r \times r\,dr \right) d\theta = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \left[\frac{r^3}{3} \right]_0^{2\cos\theta} d\theta = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{8\cos^3\theta}{3} d\theta$$
$$= \frac{8}{3} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos\theta \times \cos^2\theta\, d\theta = \frac{8}{3} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos\theta \times (1-\sin^2\theta)\, d\theta = \frac{8}{3} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} (\cos\theta - \cos\theta \sin^2\theta)\, d\theta$$
$$= \frac{8}{3} \left[\sin\theta - \frac{1}{3}\sin^3\theta \right]_{-\pi/2}^{\pi/2} = \frac{8}{3} \left(2 - \frac{2}{3} \right) = \frac{8}{3} \times \frac{4}{3} = \frac{32}{9}$$