Opérateurs différentiels en physique

Pour une fonction d'une variable réelle f, de classe $\mathcal{C}^1$, l'égalité
$$\int_a^b \frac{df(x)}{dx}\,dx = f(b) - f(a)$$
montre que l'intégrale de $\frac{df}{dx}$ est donnée par les valeurs de f aux bords du domaine d'intégration.

Ce résultat se généralise aux fonctions de plusieurs variables, sous des formes variées.

Notation : la position du point M est donnée par le vecteur $\vec{M}$, qui est la notation abrégée de $\vec{OM}$
$$\vec{M} = \vec{OM} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

I. Champ, circulation, flux.

a. Champ

Un champ est une fonction qui dépend des coordonnées d'espace (et éventuellement du temps). Il est scalaire si ses valeurs sont dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ (par exemple, le champ de pression $P(\vec{M})$). Il est vectoriel si ses valeurs sont dans $\mathbb{R}^n$ ou $\mathbb{C}^n$ $(n \geq 2)$ (par exemple, les champs électrique $\vec{E}(\vec{M})$ et magnétique $\vec{B}(\vec{M})$).

b. Intégrale curviligne ou circulation d'un champ vectoriel

Déf : Une courbe paramétrée (ou arc paramétré, ou chemin) de l'espace est une fonction vectorielle $\vec{\gamma} : \begin{cases} [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ t \longmapsto \vec{\gamma}(t) \end{cases}$

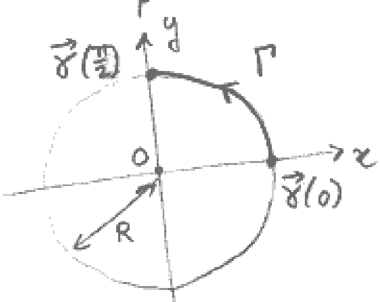
Son support est l'ensemble des points images
$$\Gamma = \{ \vec{\gamma}(t) \mid t \in [a,b] \}$$, aussi noté $\vec{\gamma}([a,b])$.

On dit que $\vec{\gamma}$ est un paramétrage de Γ.

<u>Déf</u> : Soit $\vec{F}$ un champ vectoriel continu
et $\vec{\gamma}$ une courbe paramétrée de classe $\mathcal{C}^1$ (par morceaux).
On appelle intégrale curviligne ou circulation de $\vec{F}$
sur $\Gamma = \vec{\gamma}([a,b])$ l'intégrale

$$\boxed{\int_\Gamma \vec{F}\cdot\vec{d\ell} = \int_a^b \vec{F}(\vec{\gamma}(t))\cdot\frac{d\vec{\gamma}(t)}{dt}\,dt}$$

<u>Ex</u> : Le chemin $\vec{\gamma}(t) = \begin{pmatrix} R\cos(t) \\ R\sin(t) \\ 0 \end{pmatrix}$ avec $t \in [0, \frac{\pi}{2}]$ décrit un quart de cercle de rayon R dans le plan (Oxy).



Il va de $\vec{\gamma}(0) = \begin{pmatrix} R \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ jusqu'à $\vec{\gamma}(\frac{\pi}{2}) = \begin{pmatrix} 0 \\ R \\ 0 \end{pmatrix}$

$$\frac{d\vec{\gamma}(t)}{dt} = \begin{pmatrix} -R\sin(t) \\ R\cos(t) \\ 0 \end{pmatrix}$$

Sur Γ, la circulation du champ $\vec{F}(\vec{M}) = \begin{pmatrix} 1 \\ x+z \\ y^2 \end{pmatrix}$ est

$$\int_\Gamma \vec{F}\cdot\vec{d\ell} = \int_0^{\pi/2} \vec{F}(\vec{\gamma}(t))\cdot\frac{d\vec{\gamma}(t)}{dt}\,dt$$

$$= \int_0^{\pi/2} \begin{pmatrix} 1 \\ \gamma_x(t)+\gamma_z(t) \\ \gamma_y^2(t) \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} \gamma_x'(t) \\ \gamma_y'(t) \\ \gamma_z'(t) \end{pmatrix} dt$$

$$= \int_0^{\pi/2} \begin{pmatrix} 1 \\ R\cos(t)+0 \\ (R\sin(t))^2 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} -R\sin(t) \\ R\cos(t) \\ 0 \end{pmatrix} dt$$

$$= \int_0^{\pi/2} \left(1\times(-R\sin(t)) + R\cos(t)\times R\cos(t) + R^2\sin^2(t)\times 0\right) dt$$

$$= \int_0^{\pi/2} \left(-R\sin(t) + R^2\cos^2(t)\right) dt$$

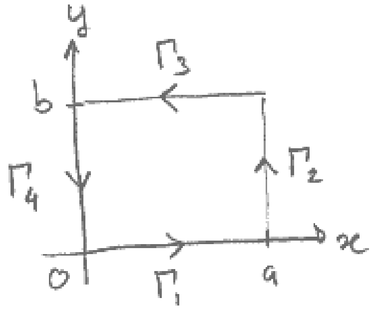
$$= R\left[\cos(t)\right]_0^{\pi/2} + R^2\int_0^{\pi/2}\frac{\cos(2t)+1}{2}\,dt$$

$$= R\times(0-1) + \frac{R^2}{2}\left[\frac{\sin(2t)}{2}+t\right]_0^{\pi/2}$$

$$= -R + \frac{R^2}{2}\left[\cancel{\frac{\sin\pi}{2}} + \frac{\pi}{2} - \cancel{\frac{\sin 0}{2}} - 0\right]$$

$$= -R + \frac{\pi R^2}{4}$$

Ex : On considère le chemin Γ qui fait le tour du rectangle, formé par les 4 chemins.



$$\begin{cases} \Gamma_1 : \vec{\gamma}_1(t) = \begin{pmatrix} at \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ avec } t \in [0,1] \\ \Gamma_2 : \vec{\gamma}_2(t) = \begin{pmatrix} a \\ bt \\ 0 \end{pmatrix} \text{ avec } t \in [0,1] \\ \Gamma_3 : \vec{\gamma}_3(t) = \begin{pmatrix} a(1-t) \\ b \\ 0 \end{pmatrix} \text{ avec } t \in [0,1] \\ \Gamma_4 : \vec{\gamma}_4(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ b(1-t) \\ 0 \end{pmatrix} \text{ avec } t \in [0,1] \end{cases}$$

Les circulations du champ $\vec{F}(\vec{M}) = \begin{pmatrix} 1 \\ x+z \\ y^2 \end{pmatrix}$ sont

$$\int_{\Gamma_1} \vec{F} \cdot \vec{d\ell} = \int_0^1 \vec{F}(\vec{\gamma}_1(t)) \cdot \frac{d\vec{\gamma}_1(t)}{dt} dt = \int_0^1 \begin{pmatrix} 1 \\ at+0 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} dt = \int_0^1 a \, dt = a$$

$$\int_{\Gamma_2} \vec{F} \cdot \vec{d\ell} = \int_0^1 \begin{pmatrix} 1 \\ a+0 \\ (bt)^2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ b \\ 0 \end{pmatrix} dt = \int_0^1 ab \, dt = ab$$

$$\int_{\Gamma_3} \vec{F} \cdot \vec{d\ell} = \int_0^1 \begin{pmatrix} 1 \\ a(1-t)+0 \\ b^2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -a \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} dt = \int_0^1 (-a) \, dt = -a$$

$$\int_{\Gamma_4} \vec{F} \cdot \vec{d\ell} = \int_0^1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0+0 \\ (b(1-t))^2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -b \\ 0 \end{pmatrix} dt = 0$$

donc $\displaystyle\int_{\Gamma} \vec{F} \cdot \vec{d\ell} = a + ab - a + 0 = ab$

c_ Flux d'un champ vectoriel à travers une surface orientée

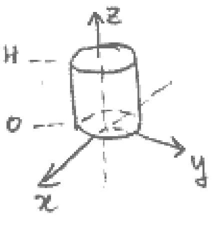
• Déf : Une surface paramétrée de l'espace est une fonction vectorielle

$$\vec{\sigma} : \begin{cases} \mathcal{D} \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ (u,v) \longmapsto \vec{\sigma}(u,v) \end{cases}$$

Son support est l'ensemble des points images

$$S = \{ \vec{\sigma}(u,v) \mid (u,v) \in \mathcal{D} \}$$

Ex : La paroi verticale du cylindre centré sur l'axe Oz, de rayon R et de hauteur H peut être paramétrée par



$$\vec{\sigma}(u,v) = \begin{pmatrix} R\cos(u) \\ R\sin(u) \\ v \end{pmatrix} \quad \text{avec } u \in [0, 2\pi[\text{ et } v \in [0, H]$$

Ex: La sphère de rayon R et centrée à l'origine peut être paramétrée par $\vec{\sigma}(u,v) = \begin{pmatrix} R\cos(v)\sin(u) \\ R\sin(v)\sin(u) \\ R\cos(u) \end{pmatrix}$ avec $\mathcal{D} =]0,\pi[\times]0,2\pi[$

(on a utilisé les coord. sphériques).

- Déf: La surface est régulière en (u_0,v_0) si $\frac{\partial\vec{\sigma}}{\partial u}(u_0,v_0)$ et $\frac{\partial\vec{\sigma}}{\partial v}(u_0,v_0)$ sont linéairement indép.

$$\Leftrightarrow \quad \frac{\partial\vec{\sigma}}{\partial u}(u_0,v_0) \wedge \frac{\partial\vec{\sigma}}{\partial v}(u_0,v_0) \neq \vec{0}$$

- Alors le plan tangent à S en $\vec{\sigma}(u_0,v_0)$ a pour vecteurs directeurs $\frac{\partial\vec{\sigma}}{\partial u}(u_0,v_0)$ et $\frac{\partial\vec{\sigma}}{\partial v}(u_0,v_0)$.
- Il y a deux vecteurs unitaires (de norme 1) et normaux au plan tangent, qui sont

$$\vec{n}(u_0,v_0) = \pm \frac{\frac{\partial\vec{\sigma}}{\partial u}(u_0,v_0) \wedge \frac{\partial\vec{\sigma}}{\partial v}(u_0,v_0)}{\left\| \frac{\partial\vec{\sigma}}{\partial u}(u_0,v_0) \wedge \frac{\partial\vec{\sigma}}{\partial v}(u_0,v_0) \right\|}$$

Orienter une surface régulière, c'est choisir un de ces deux champs de vecteurs normaux unitaires.

Ex: Paroi verticale du cylindre : $\begin{cases} \frac{\partial\vec{\sigma}}{\partial u} = \begin{pmatrix} -R\sin(u) \\ R\cos(u) \\ 0 \end{pmatrix} = R\,\vec{u_\theta} \text{ pour l'angle } \theta = u \\ \frac{\partial\vec{\sigma}}{\partial v} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \vec{u_z} \end{cases}$

donc $\frac{\partial\vec{\sigma}}{\partial u} \wedge \frac{\partial\vec{\sigma}}{\partial v} = R\,\vec{u_\theta} \wedge \vec{u_z} = R\,\vec{u_r}$ et $\vec{n}(u,v) = \pm\vec{u_r}$ avec $\vec{u_r} = \begin{pmatrix} \cos(u) \\ \sin(u) \\ 0 \end{pmatrix}$

Ex: Sphère de rayon R : $\frac{\partial\vec{\sigma}}{\partial u} = \begin{pmatrix} R\cos(v)\cos(u) \\ R\sin(v)\cos(u) \\ -R\sin(u) \end{pmatrix} = R\,\vec{u_\theta}$, $\frac{\partial\vec{\sigma}}{\partial v} = \begin{pmatrix} -R\sin(v)\sin(u) \\ R\cos(v)\sin(u) \\ 0 \end{pmatrix} = R\sin u\,\vec{u_\varphi}$

avec $(\theta,\varphi) = (u,v)$

$$\frac{\partial\vec{\sigma}}{\partial u} \wedge \frac{\partial\vec{\sigma}}{\partial v} = R\,\vec{u_\theta} \wedge R\sin(u)\,\vec{u_\varphi} = R^2\sin(u)\,\vec{u_r}$$

Donc $\vec{n} = \pm\vec{u_r}$ avec $\vec{u_r} = \begin{pmatrix} \cos(v)\sin(u) \\ \sin(v)\sin(u) \\ \cos(u) \end{pmatrix}$

(Rq: Pour $u = 0$ ou π, $\frac{\partial\vec{\sigma}}{\partial u} \wedge \frac{\partial\vec{\sigma}}{\partial v} = \vec{0}$ mais $\vec{n} = \pm\vec{u_r}$ est bien défini)