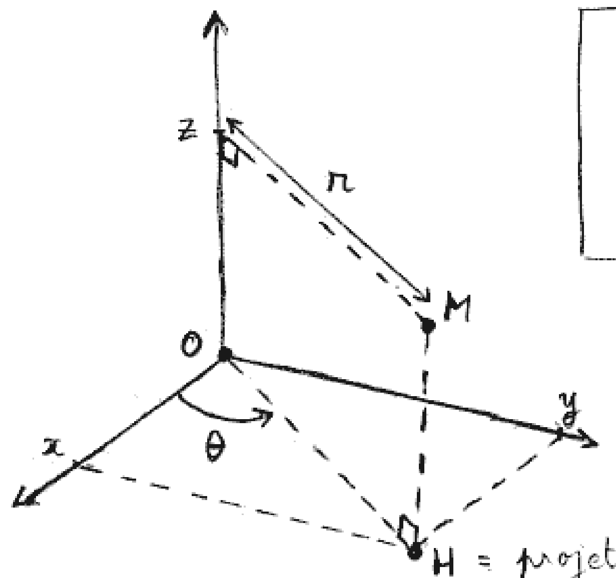
Applications du chang^t de variables :

- Coord. cylindriques



Les coord. cylindriques du point $M(x,y,z)$:

$$\boxed{\begin{cases} \text{rayon} & r = \sqrt{x^2+y^2} \\ \text{angle/azimuth} & \theta = (\widehat{\vec{u}_x, \overrightarrow{OH}}) \\ \text{cote } z & \end{cases}}$$

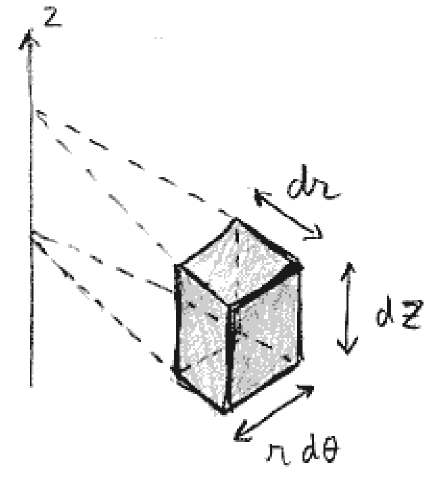
Alors $\boxed{\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases}}$

H = projeté ortho. de M sur (Oxy)

Les variations infinitésimales des coord. cylindriques permettent de retrouver les expressions de l'élément d'intégration de volume :

$$\boxed{dV = r\,dr\,d\theta\,dz}$$

et l'élément d'intégration sur la surface d'un cylindre vertical de rayon r : $\boxed{dS = r\,d\theta\,dz}$

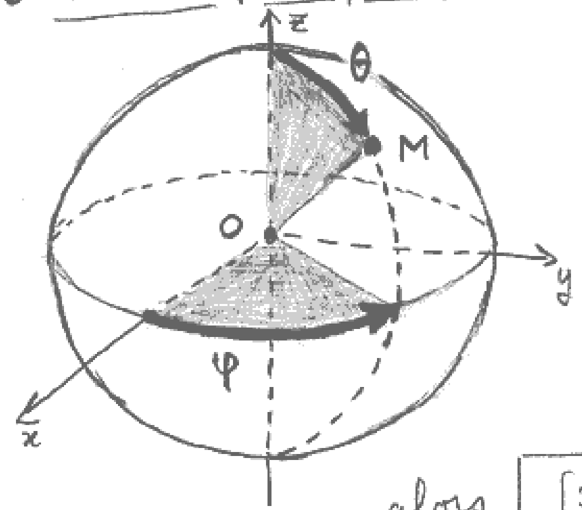


Ex: Le volume du cylindre centré sur l'axe Oz, de hauteur H et de rayon R est

$$V = \iiint_{\text{cylindre}} dV = \int_0^H \left(\int_0^{2\pi} \left(\int_0^R r\,dr \right) d\theta \right) dz = \int_0^H dz \times \int_0^{2\pi} d\theta \times \int_0^R r\,dr$$

$$= H \times 2\pi \times \frac{R^2}{2} = \pi R^2 H$$

• Coord. sphériques :

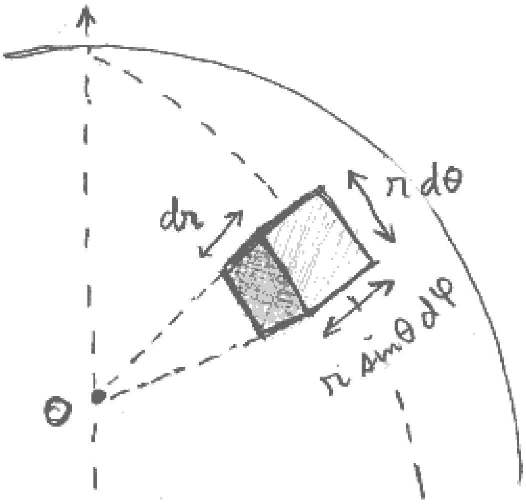


Les coord. sphériques du point $M(x,y,z)$:

$$\boxed{\begin{cases} \text{rayon } r = OM = \sqrt{x^2+y^2+z^2} \\ \text{angle zénital } \theta \in [0,\pi] \quad \text{(ou colatitude)} \\ \text{angle azimuthal } \varphi \in [0,2\pi[\quad \text{(ou longitude)} \end{cases}}$$

(c'est la convention des physiciens ; chez les mathématiciens, θ et φ sont échangés)

alors $$\boxed{\begin{cases} x = r\sin\theta\cos\varphi \\ y = r\sin\theta\sin\varphi \\ z = r\cos\theta \end{cases}}$$



L'élément d'intégration de volume est

$$\boxed{dV = r^2\,dr\,\sin\theta\,d\theta\,d\varphi}$$

L'élément d'intégration de surface sur une sphère centrée en O de rayon r est

$$\boxed{dS = r^2\sin\theta\,d\theta\,d\varphi}$$

Ex : Volume de la boule B_R centrée en O et de rayon R

$$V = \iiint_{B_R} dV = \int_0^R\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} r^2\,dr\,\sin\theta\,d\theta\,d\varphi = \int_0^R r^2\,dr \times \int_0^{2\pi} d\varphi \times \int_0^{\pi}\sin\theta\,d\theta$$

$$= \left[\frac{r^3}{3}\right]_0^R \times 2\pi \times \left[-\cos\theta\right]_0^{\pi} = \frac{4}{3}\pi R^3$$

Ex : Aire de la sphère S_R centrée en O et de rayon R

$$\mathcal{A} = \iint_{S_R} dS = \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} R^2\sin\theta\,d\theta\,d\varphi = R^2\int_0^{2\pi}d\varphi \times \int_0^{\pi}\sin\theta\,d\theta$$

$$= R^2 \times 2\pi \times \left[-\cos\theta\right]_0^{\pi} = 4\pi R^2$$