

SYSTEMES ASSERVIS ECHANTILLONNES

Mohammed M'SAAD

Ecole Nationale Supérieure d'Ingénieurs de Caen

Bureau: FA 314

Téléphone: 02 31 45 27 08

Courriel: mohammed.msaad@ensicaen.fr

UNE APPROCHE POLYNOMIALE



AREVA
AEROSPATIALE
EDF
CNES
FT
PSA
Renault
STmicroelectronics
Thalès
.....

COURS

- ♠ Introduction
- ♠ Modélisation
- ♠ Stabilité
- ♠ Systèmes asservis

TD

- ♠ Modélisation
- ♠ Analyse
- ♠ Synthèse modale
- ♠ Régulation industrielle

MODELISATION

DES

SYSTEMES ECHANTILLONNES

PLAN

- Motivation
- Echantillonnage
- Reconstruction
- Modélisation des systèmes
- Modélisation des perturbations
- Une représentation usuelle
- Conclusion

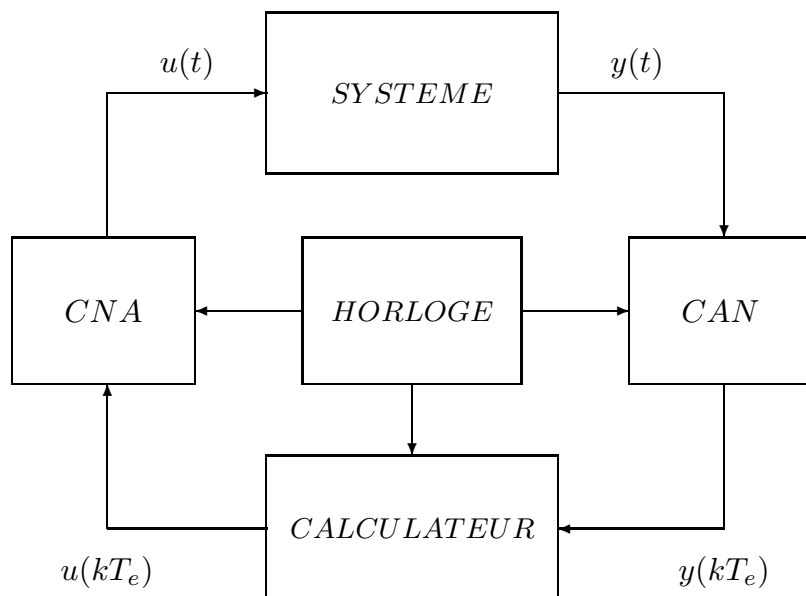
MOTIVATION

- Une théorie rigoureuse des systèmes échantillonnés

Modélisation
Analyse et Synthèse
Mise en œuvre

- Applications industrielles réussies

Commande par ordinateur
Traitement numérique du signal
Supervision des systèmes



COMMANDE PAR CALCULATEUR

DEUX ASPECTS A RETENIR

A1. Les calculateurs numériques sont des systèmes discrets qui manipulent des nombres.



*un système relié à un ordinateur numérique
est manifestement un système échantillonné
dont l'entrée et la sortie sont respectivement
 $\{u(kT_e)\}_{k \in \mathcal{N}}$ et $\{y(kT_e)\}_{k \in \mathcal{N}}$*



*T_e désigne la période d'échantillonnage
elle est supposée constante dans la théorie des systèmes
échantillonnés*

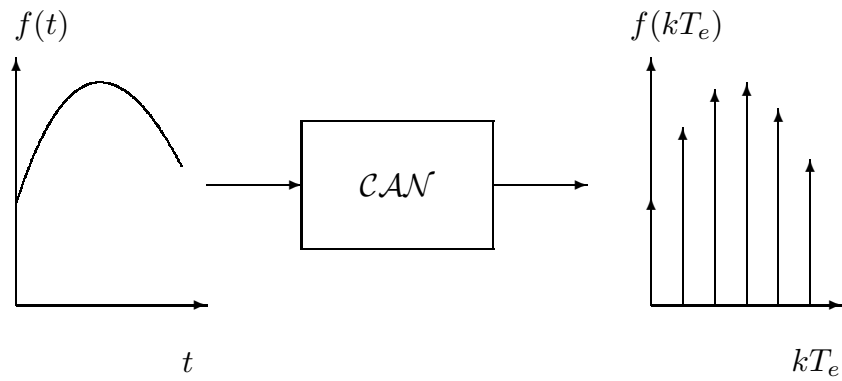
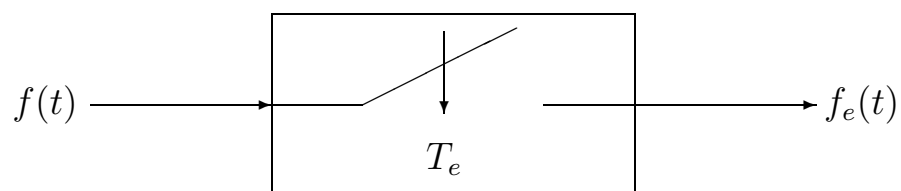
A2. La description du comportement dynamique d'un système échantillonné est généralement effectuée par un modèle stroboscopique

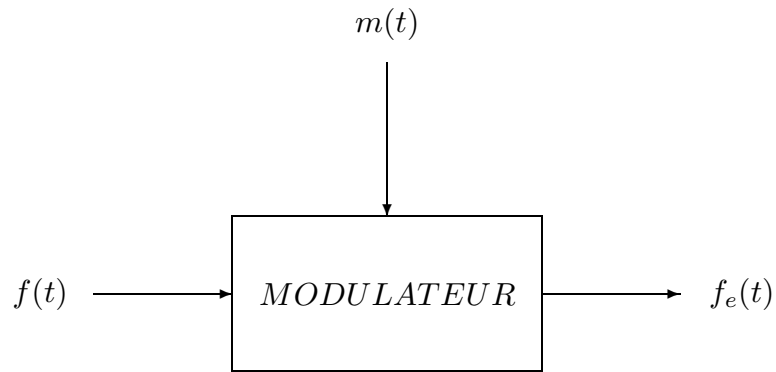
$$\text{SYSE} : \{u(kT_e)\}_{k \in \mathcal{N}} \longrightarrow \{y(kT_e)\}_{k \in \mathcal{N}}$$



*modélisation des convertisseurs
pour pouvoir modéliser l'ensemble*

CNA – SYSEME – CAN

ECHANTILLONNAGE**CONVERSION ANALOGIQUE-NUMERIQUE****ECHANTILLONNEUR ELEMENTAIRE**



$$f_e(t) = f(t) m(t) \text{ avec } m(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(t - kT_e)$$

MODELISATION IDEALE D'UN ECHANTILLONNEUR

THEOREME D'ECHANTILLONNAGE

Soit f une fonction dont la transformée de Laplace est F et soit F_e la transformée de Laplace de la fonction f_e qui résulte d'un échantillonnage de f à la cadence T_e . Supposons que $F(s)$ soit strictement propre alors on a

$$F_e(s) = (F(z))_{z=e^{T_e s}}$$

et

$$F_e(s) = \frac{1}{2}f(0^+) + \frac{1}{T_e} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} F(s + kj\omega_e)$$

Si de plus $sF(s)$ est strictement propre alors on a

$$F_e(s) = \frac{1}{T_e} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} F(s + kj\omega_e)$$

ASPECTS FONDAMENTAUX

A1. L'échantillonnage étale jusqu'à l'infini le spectre de fréquences de la fonction continue.

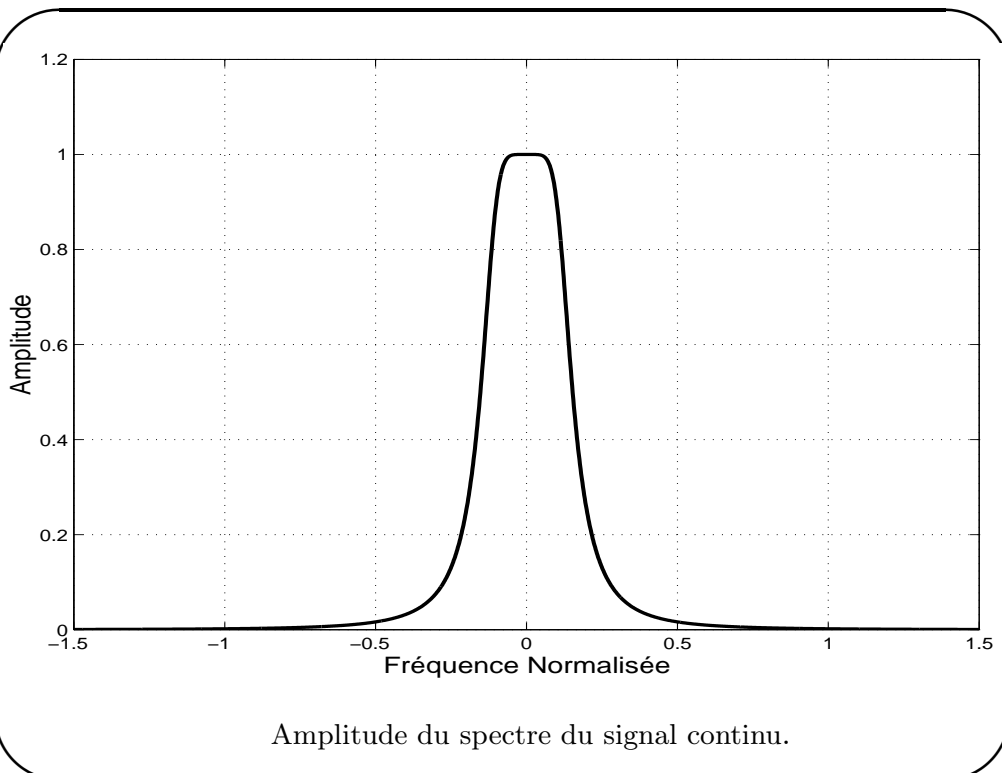
$$F_e(j\omega) = \mathcal{F}\{f_e(t)\} = \frac{1}{T_e} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} F(j(\omega + k\omega_e))$$

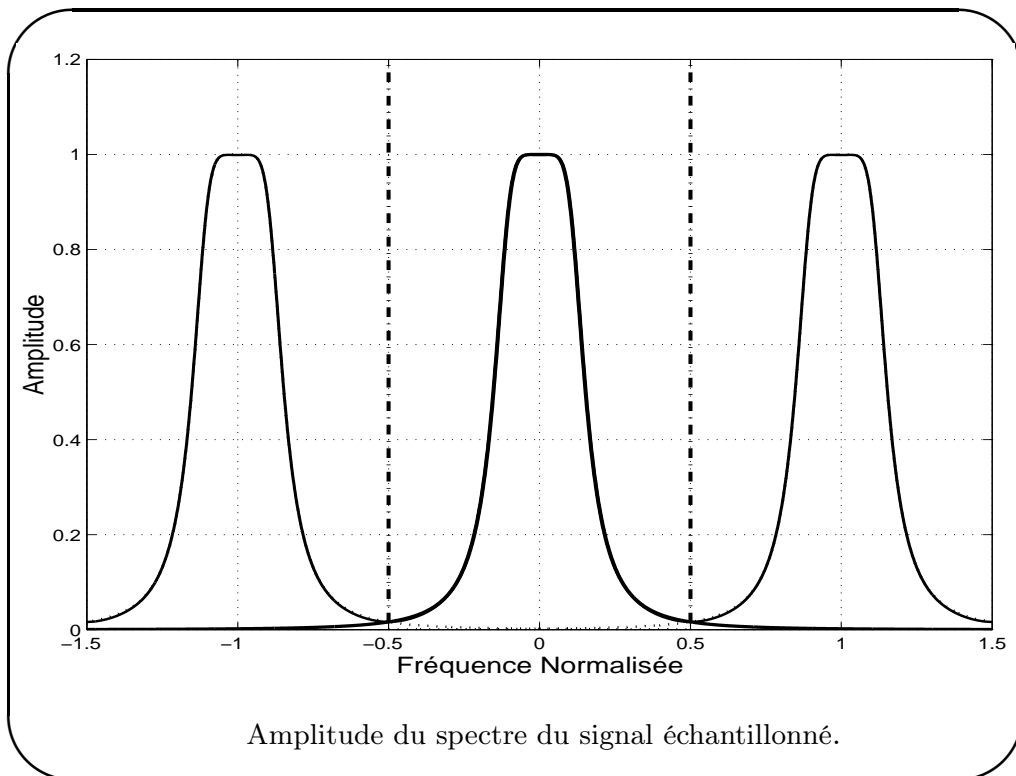
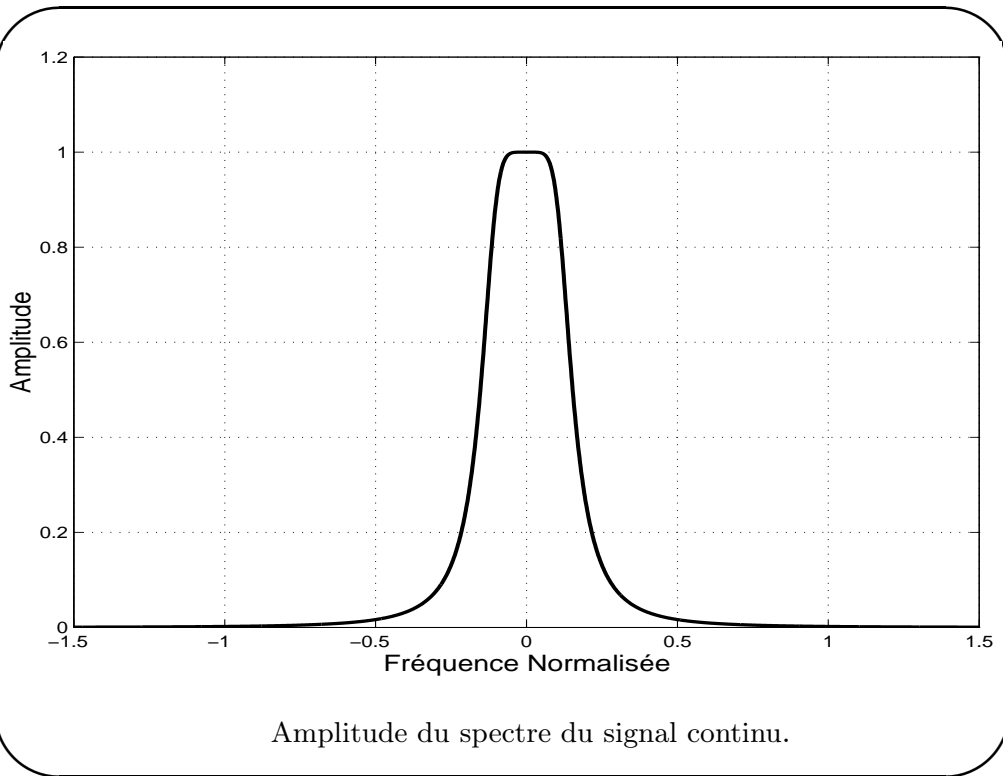
↓

$$F_e : \omega \in [0, \omega_n] \quad \longrightarrow \quad F_e(j\omega) \in \mathcal{C}$$

avec

$$\omega_n = \frac{\omega_e}{2} = \frac{\pi}{T_e} \quad \longrightarrow \quad \text{pulsation de Nyquist}$$





A2. L'échantillonnage induit une duplication infinie des pôles, i.e. les pôles de $F_e(s)$ sont égaux aux pôles de $F(s)$ modulo $j\omega_e$.

$$p_{ci} \text{ de } F(s) \quad \longrightarrow \quad \{p_{ik}\}_{k \in \mathbb{Z}} \text{ de } F_e(s)$$

avec

$$p_{ik} = p_{ci} - kj\omega_e \text{ pour } k \in \mathbb{Z}$$

A3. La relation entre $F_e(s)$ et $F(z)$: le mythe et la réalité

$$F_e(s) = \mathcal{L}\{f_e(t)\} = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} f(kT_e) e^{-kT_e s}$$

$$F_e(s) = \mathcal{L}\{f_e(t)\} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} f(kT_e) e^{-kT_e s}$$



$$F_e(s) \quad \longrightarrow \quad F(z)$$

$$z = e^{T_e s}$$



$$F_e(s) = F(z) \text{ pour } z = e^{T_e s}$$

La transformation d'échantillonnage

$$s \longrightarrow z = e^{T_e s}$$

n'est pas bijective. L'image des bandes

$$\mathcal{B}_k = \left\{ s \in \mathcal{C} / (2k-1)\omega_n \leq \text{Im}(s) \leq (2k+1)\omega_n \right\}$$

↓

$$\mathcal{B}_s = \{s \in \mathcal{C} / \text{Im}(s) \in [-\omega_n, +\omega_n]\}$$

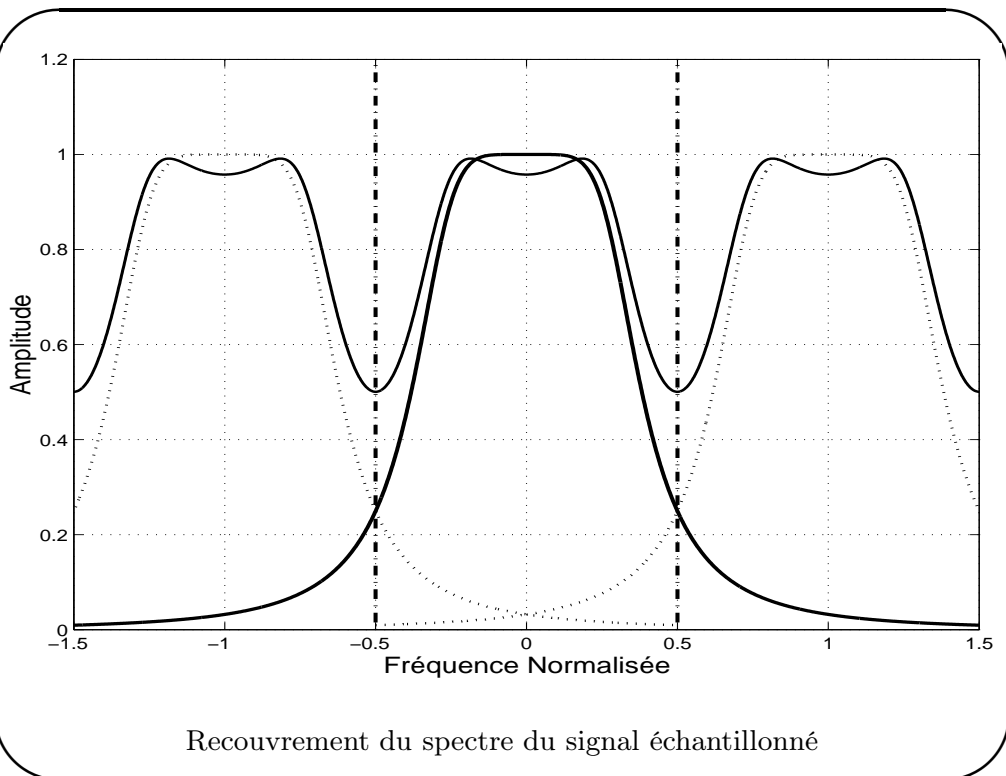
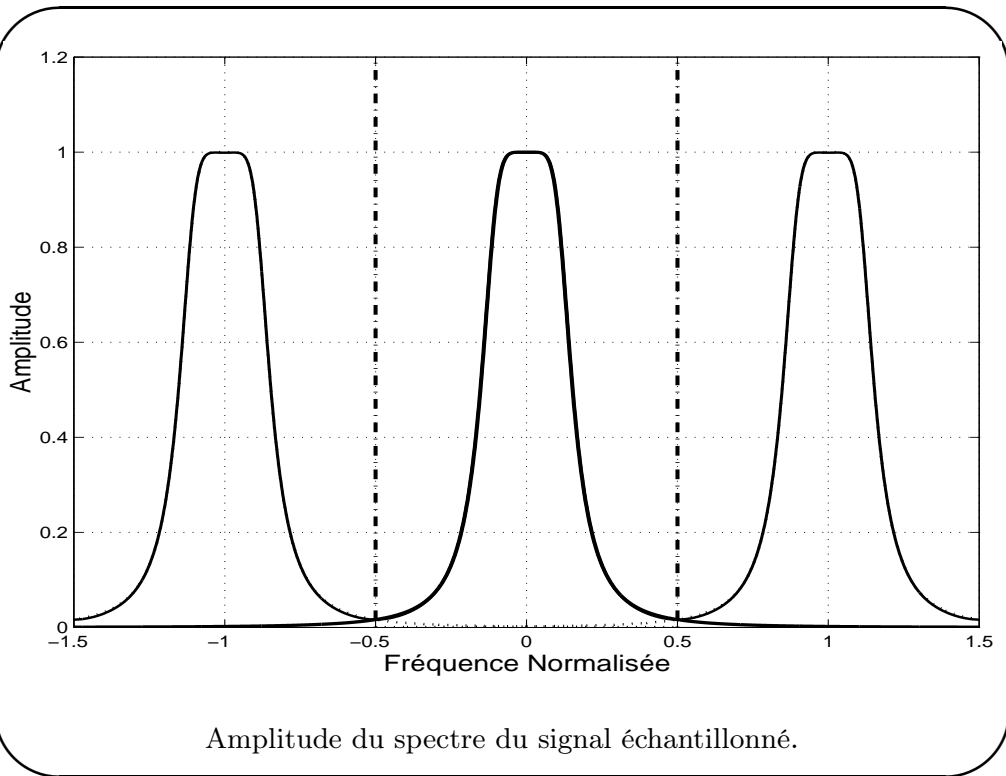
est le plan complexe en z : la duplication des pôles dans le plan complexe en s n'est pas percevable dans le plan complexe en z puisque

$$e^{(s+kj\omega_e)T_e} = e^{sT_e} \text{ pour tout } (s, k) \in \mathcal{C} \times \mathcal{Z}$$

THEOREME DE SHANNON

Un signal $\{f(t)\}_{t \in \mathcal{R}}$ dont la transformée de Fourier est nulle à l'extérieur de l'intervalle $[-\omega_m, \omega_m]$ est parfaitement défini par son signal échantillonné $\{f(kT_e)\}_{k \in \mathcal{Z}}$ si la période d'échantillonnage T_e est telle que $\omega_e > 2\omega_m$, soit $\frac{\omega_m}{\omega_e} < \frac{1}{2}$. Le signal $\{f(t)\}_{t \in \mathcal{R}}$ est obtenu comme suit

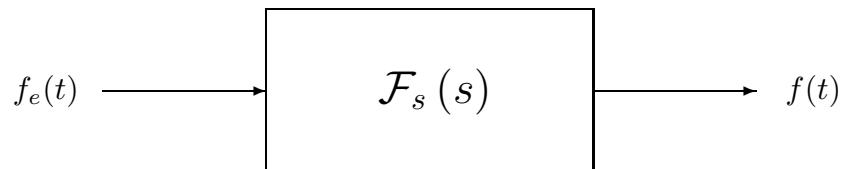
$$f(t) = \sum_{k=-\infty}^{k=\infty} f(kT_e) \frac{\sin(\omega_n(t - kT_e))}{\omega_n(t - kT_e)}$$



UNE DEMONSTRATION ELEGANTE

Dans le contexte des conditions de Shannon, on peut restaurer parfaitement $\{F(j\omega)\}_{\omega \in \mathcal{R}}$ en fonction de $\{F_e(j\omega)\}_{\omega \in \mathcal{R}}$

$$F(j\omega) = \begin{cases} T_e F_e(j\omega) & \text{si } |\omega| \leq \omega_n \\ 0 & \text{si } |\omega| > \omega_n \end{cases}$$



$$F(s) = F_s(s)F_e(s)$$

avec

$$F_s(j\omega) = \begin{cases} 1 & \text{si } |\omega| \leq \omega_n \\ 0 & \text{si } |\omega| > \omega_n \end{cases}$$

Et si l'on effectue un retour dans le domaine temporel

$$\begin{aligned}
 f(t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} F(\omega) e^{j\omega t} d\omega \\
 &= \frac{T_e}{2\pi} \int_{-\omega_n}^{+\omega_n} F_e(\omega) e^{j\omega t} d\omega \\
 &= \frac{T_e}{2\pi} \int_{-\omega_n}^{+\omega_n} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} f(kT_e) e^{-j\omega kT_e} e^{j\omega t} d\omega
 \end{aligned}$$

Et si on permute les opérations d'intégration et de sommation

$$\begin{aligned}
 f(t) &= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} f(kT_e) \frac{T_e}{2\pi} \int_{-\omega_n}^{+\omega_n} e^{j\omega(t-kT_e)} d\omega \\
 &= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} f(kT_e) \frac{\sin(\omega_n(t-kT_e))}{\omega_n(t-kT_e)}
 \end{aligned}$$

REMARQUE

$$f(t) = (f_e * f_s)(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} f(kT_e) f_s(t - kT_e)$$



$\{f_s(t)\}_{t \in \mathcal{R}}$ est la réponse impulsionnelle du filtre passe-bas idéal



Cette opération de filtrage n'est pas physiquement réalisable

FILTRAGE ANTI-REPLIEMENT

$$F(s) = \left(\frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2} \right)^m$$

avec

$$\zeta = 0.7 \text{ et } m > 2$$

ECHANTILLONNAGE: LE POINT

- ♠ Analyse spectrale

$$F_e(s) = \frac{1}{2}f(0^+) + \frac{1}{T_e} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} F(s + kj\omega_e)$$

- ♠ Théorème de Shannon

$$\left(\omega_e > 2\omega_m \right) \longrightarrow \left(F_e(j\omega) \longrightarrow F(j\omega) \right)$$

- ♠ Transformée en z

$$F_e(s) \longrightarrow F(z)$$

$$z = e^{T_e s}$$

RECONSTRUCTION PHYSIQUE

$$\{f(kT_e)\}_{k \in \mathbb{Z}} \longrightarrow \{f(t)\}_{t \in \mathcal{R}}$$

$$\Downarrow$$

$$f(kT_e + \tau) = f(kT_e) + \tau \left(\rho f(t) \right)_{t=kT_e} + \dots + \frac{\tau^i}{i!} \left(\rho^i f(t) \right)_{t=kT_e} + \dots$$

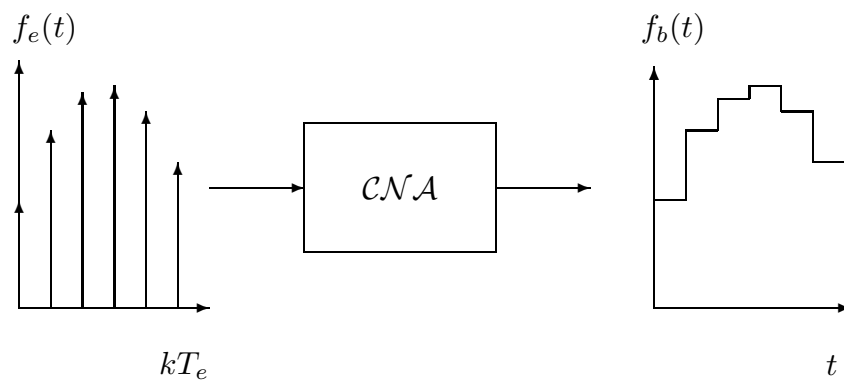
pour tout $\tau \in [0, T_e)$

$$\Uparrow$$

$$\rho f(kT_e) \approx \frac{1}{T_e} \left(f(kT_e) - f((k-1)T_e) \right)$$

$$\rho^2 f(kT_e) \approx \frac{1}{T_e^2} \left(f(kT_e) - 2f((k-1)T_e) + f((k-2)T_e) \right)$$

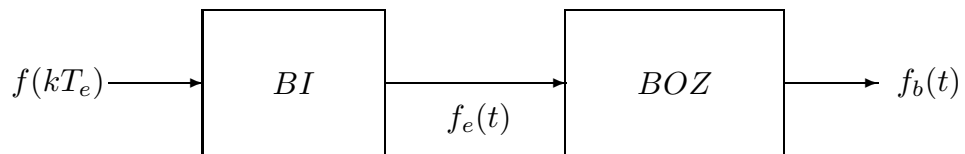
CONVERSION NUMERIQUE-ANALOGIQUE



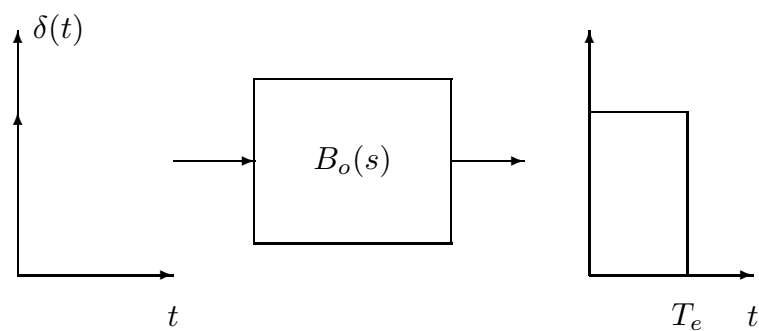
$$f(kT_e + \tau) = f(kT_e) \text{ pour tout } \tau \in [0, T_e)$$

BLOQUEUR D'ORDRE ZERO

$$f(kT_e + \tau) = f(kT_e) \text{ pour tout } \tau \in [0, T_e)$$



MODELISATION D'UN BLOQUEUR D'ORDRE ZERO



$$\beta_o(t) = \alpha(t) - \alpha(t - T_e) \implies \mathcal{B}_o(s) = \frac{1 - e^{-T_e s}}{s}$$

$$f_e(t) = f(t)m(t) = \sum_{k=0}^{\infty} f(kT_e)\delta(t - kT_e)$$

et

$$f_b(t) = \sum_{k=0}^{k=\infty} f(kT_e) \left(\alpha(t - kT_e) - \alpha(t - (k+1)T_e) \right)$$

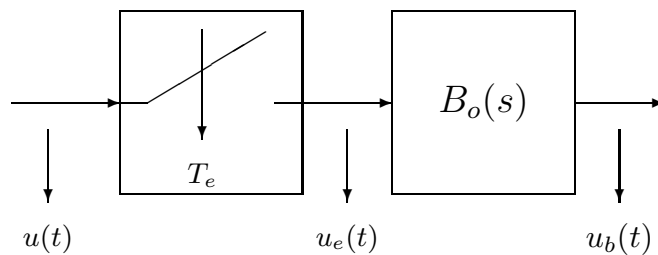
↓

$$\mathcal{L}(f_b(t)) = F_b(s) = \sum_{k=0}^{k=\infty} f(kT_e) \frac{e^{-kT_e s} - e^{-(k+1)T_e s}}{s}$$

↓

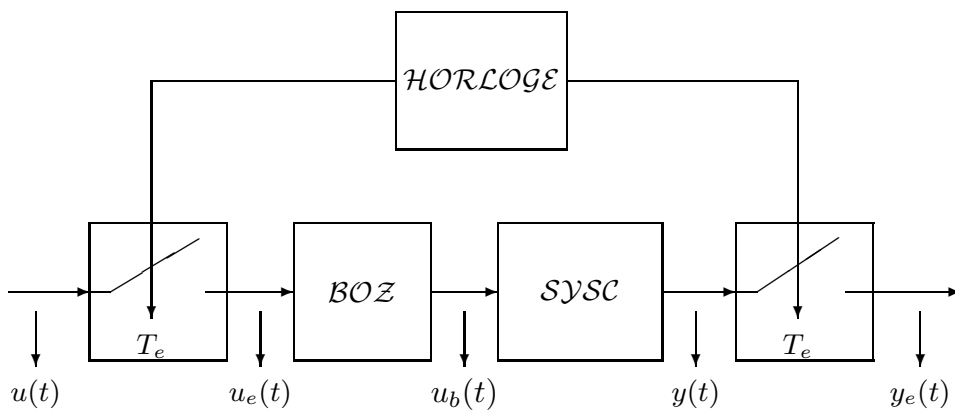
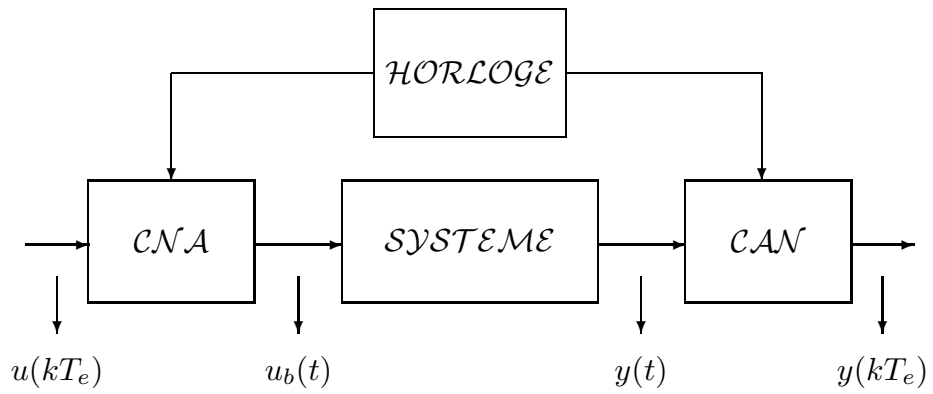
$$F_b(s) = \frac{1 - e^{-T_e s}}{s} F_e(s) = \mathcal{B}_o(s)F_e(s)$$

MODELISATION D'UN CNA



BLOQUEUR D'ORDRE ZERO

MODELISATION DES SYSTEMES

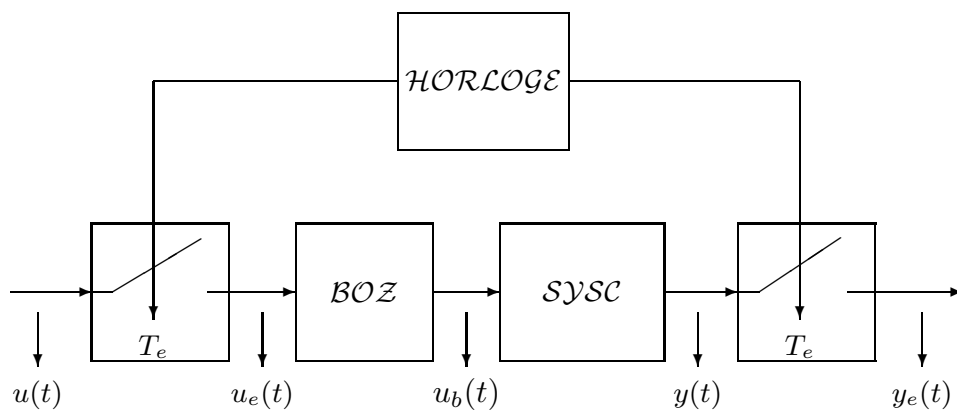


DIVERSES REPRESENTATIONS

$$\begin{aligned} \mathcal{SYSC} : U_b = \{u_b : \mathcal{R}^+ \rightarrow \mathcal{R}\} &\rightarrow Y = \{y : \mathcal{R}^+ \rightarrow \mathcal{R}\} \\ u_b(t) &\rightarrow y(t) = \mathcal{SYSC}[u_b(t)] \end{aligned}$$

↓

$$\begin{aligned} \mathcal{SYSE} : U = \{u : \mathcal{Z}^+ \rightarrow \mathcal{R}\} &\rightarrow Y = \{y : \mathcal{Z}^+ \rightarrow \mathcal{R}\} \\ u(kT_e) &\rightarrow y(kT_e) = \mathcal{SYSE}[u(kT_e)] \end{aligned}$$



UN RESULTAT FONCTIONNEL

*Soient f et g deux fonctions qui admettent des transformées de Laplace alors la fonction échantillonnée du produit de convolution $h = g * f_e$ est donnée par*

$$h_e(t) = g_e(t) * f_e(t)$$

et donc

$$\mathcal{L}\{h_e(t)\} = G_e(s) \times F_e(s)$$

DEMONSTRATION

$$\begin{aligned} h_e(t) &= \left(\int_{-\infty}^{+\infty} g(t - \tau) f_e(\tau) d\tau \right) m(t) \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(t - \tau) m(t) f(\tau) m(\tau) d\tau \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(t - \tau) m(t - \tau) f(\tau) m(\tau) d\tau \\ &= g_e(t) * f_e(t) \end{aligned}$$

OPERATEUR RETARD

$$q^{-1} / \{f : \mathcal{Z} \rightarrow \mathcal{R}\} \rightarrow \{f : \mathcal{Z} \rightarrow \mathcal{R}\}$$

$$\{f(kT_e)\} \rightarrow \{f_{r1}(kT_e)\}$$

avec

$$f_{r1}(kT_e) = f(kT_e - T_e) \text{ pour tout } k \in \mathcal{Z}$$

$$\Downarrow$$

$$A(q^{-1}) (f(kT_e)) = \left(\sum_{i=0}^{na} a_i q^{-i} \right) (f(kT_e))$$

$$\Updownarrow$$

$$A(q^{-1}) (f(kT_e)) = \sum_{i=0}^{na} a_i f_{ri}(kT_e) = \sum_{i=0}^{na} a_i f((k-i)T_e)$$

P1.

$$\begin{aligned} & (\alpha A(q^{-1}) + \beta B(q^{-1})) (f(kT_e)) \\ & = \\ & (\alpha A(q^{-1})) (f(kT_e)) + (\beta B(q^{-1})) (f(kT_e)) \end{aligned}$$

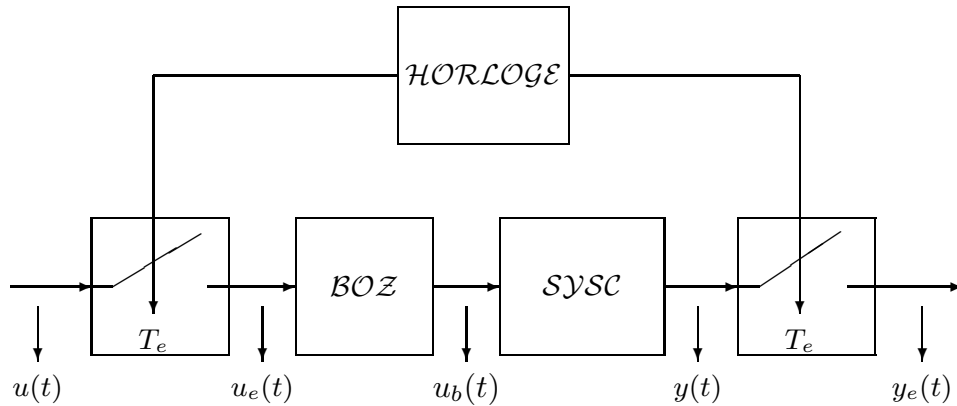
P2.

$$\begin{aligned} A(q^{-1}) (B(q^{-1}) (f(kT_e))) & = (A(q^{-1})B(q^{-1})) (f(kT_e)) \\ & = B(q^{-1}) (A(q^{-1}) (f(kT_e))) \end{aligned}$$

P3.

$$\begin{aligned} F(q^{-1}) (x_f(kT_e)) & = G(q^{-1}) (x(kT_e)) \\ \Leftrightarrow & \\ x_f(kT_e) & = \frac{G(q^{-1})}{F(q^{-1})} (x(kT_e)) \end{aligned}$$

REPOSE IMPULSIONNELLE



$$y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} g_c(\tau) u_b(t - \tau) d\tau = \int_0^t g_c(\tau) u_b(t - \tau) d\tau$$

$$\Downarrow$$

$$y(kT_e) = \int_0^{\infty} g_c(\tau) u_b(kT_e - \tau) d\tau$$

$$= \sum_{\ell=1}^{\infty} \int_{(\ell-1)T_e}^{\ell T_e} g_c(\tau) u_b(kT_e - \tau) d\tau$$

$$= \sum_{\ell=1}^{\infty} \left(\int_{(\ell-1)T_e}^{\ell T_e} g_c(\tau) d\tau \right) u(kT_e - \ell T_e)$$

REPONSE IMPULSIONNELLE

$$y(kT_e) = \sum_{\ell=1}^{\infty} g(\ell T_e) u(kT_e - \ell T_e)$$

avec

$$g(\ell T_e) = \int_{(\ell-1)T_e}^{\ell T_e} g_c(\tau) d\tau$$

↓

$$\left(u(kT_e) = \delta(kT_e) \right) \implies \left(y(kT_e) = g(kT_e) \text{ pour tout } k \in \mathcal{N} \right)$$

$$\mathcal{RIMP} \left\{ y(kT_e) = \mathcal{G}(q^{-1}) u(kT_e) \right.$$

avec

$$\mathcal{G}(q^{-1}) = \sum_{\ell=1}^{\infty} g(\ell T_e) q^{-\ell} = g(T_e) q^{-1} + \dots + g(i T_e) q^{-i} + \dots$$

↓

*le bloqueur d'ordre zéro introduit un retard
d'une période d'échantillonnage
dans le cas d'un système continu strictement propre*

↓

$$\mathcal{G}(q^{-1}) = q^{-1} \frac{b_0 + b_1 q^{-1} + \dots + b_{nb} q^{-nb}}{1 + a_1 q^{-1} + \dots + a_{na} q^{-na}} = q^{-1} \frac{B(q^{-1})}{A(q^{-1})}$$

REPONSE HARMONIQUE

$$y(kT_e) = \mathcal{G}(q^{-1}) e^{j\omega k T_e} = \sum_{\ell=1}^{\infty} g(\ell T_e) e^{j\omega(kT_e - \ell T_e)}$$

⇓

$$\mathcal{RHAR} \left\{ y(kT_e) = \mathcal{G}(e^{-j\omega T_e}) e^{j\omega k T_e} \right.$$

avec

$$\mathcal{G}(e^{-j\omega T_e}) = \sum_{\ell=1}^{\infty} g(\ell T_e) e^{-j\omega \ell T_e}$$

$$\mathcal{G}(e^{-j\omega T_e}) = \mathcal{F}(\{g(kT_e)\}) = \mathcal{M}(j\omega) e^{j\varphi(\omega)}$$

⇓

$$\mathcal{G}(e^{j(\omega+\omega_e)T_e}) = \mathcal{G}(e^{j\omega T_e}) \text{ pour tout } \omega \in \mathcal{R}$$

et

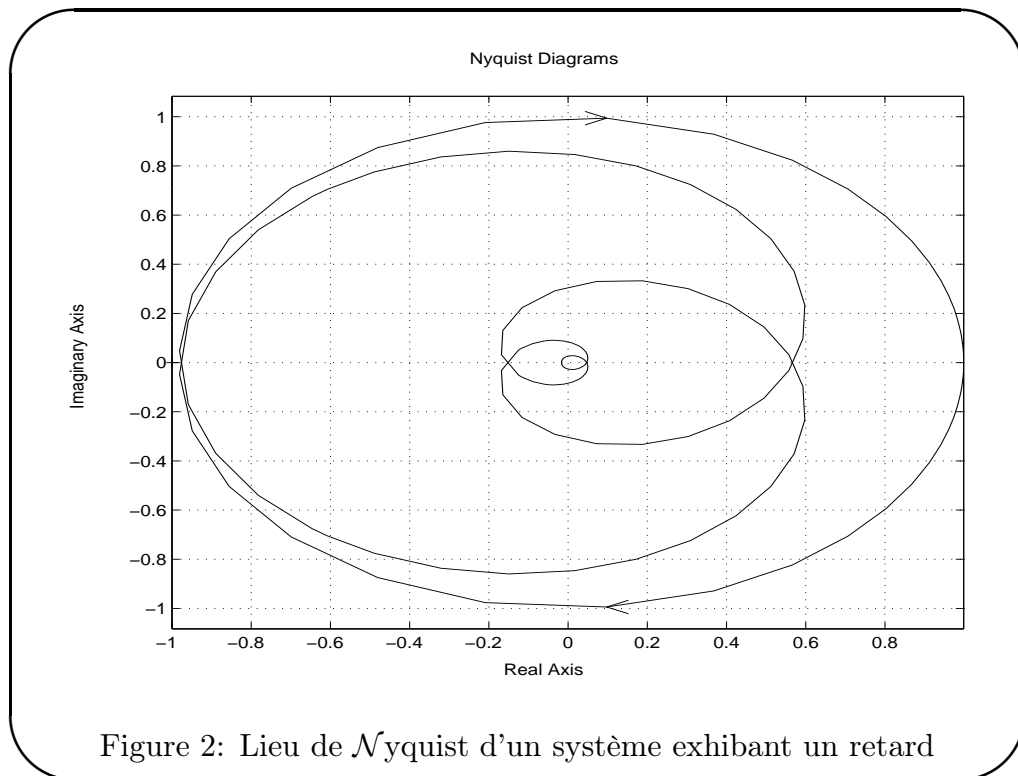
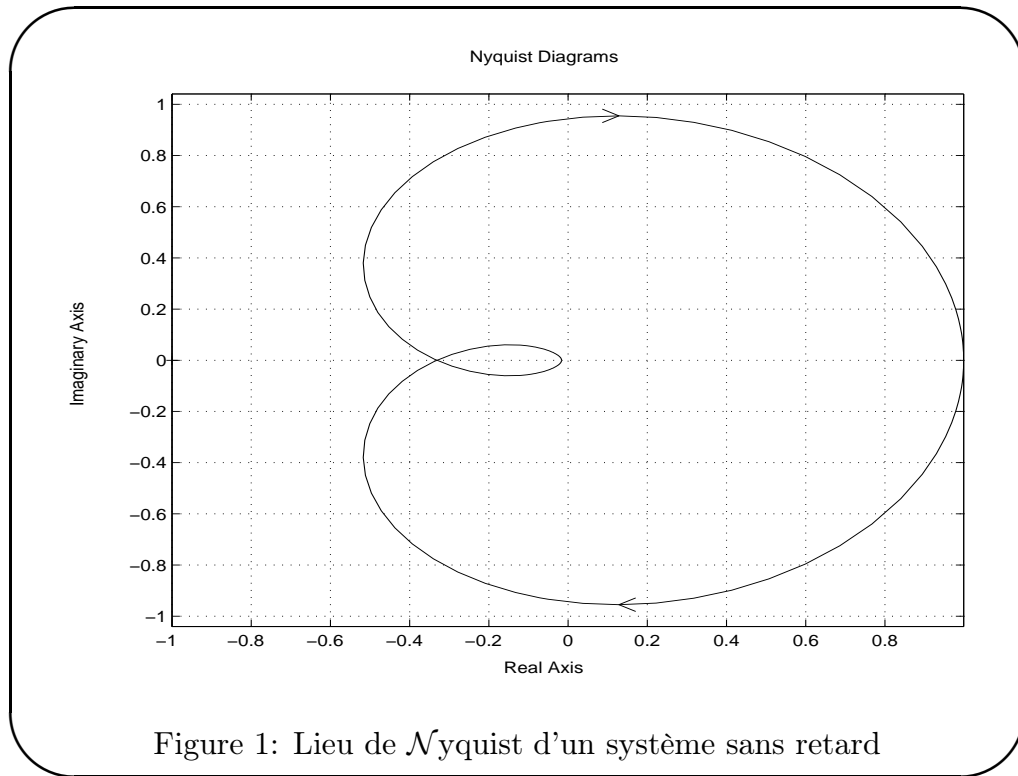
$$\mathcal{G}(e^{-j\omega T_e}) = (\mathcal{G}(e^{j\omega T_e}))^* \text{ pour tout } \omega \in \mathcal{R}$$

⇓

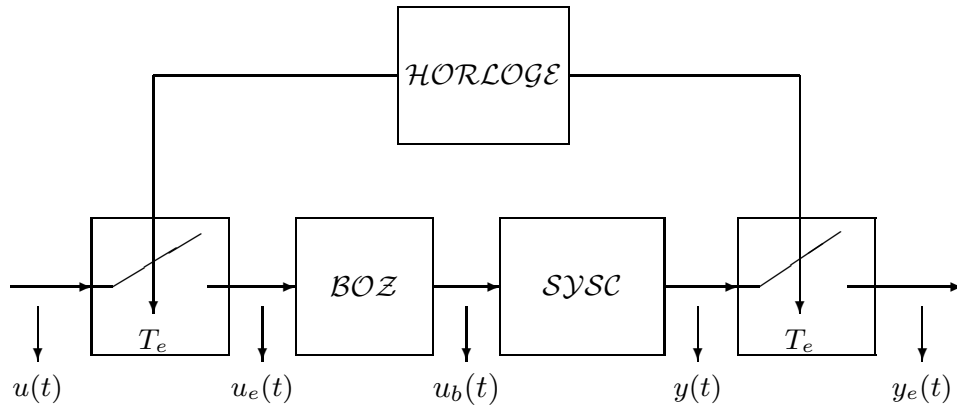
$$\{\mathcal{G}(e^{j\omega T_e})\}_{\omega \in \mathcal{R}} \longrightarrow \{\mathcal{G}(e^{j\omega T_e})\}_{\omega \in [0, \omega_n]}$$

♠

Diagrammes de Bode, Nyquist et Black



FONCTION DE TRANSFERT



$$SYSC \left\{ \begin{array}{l} Y(s) = G_c(s) U_b(s) \text{ et } U_b(s) = B_o(s) U_e(s) \end{array} \right.$$

$$\Downarrow$$

$$Y(s) = \left(G_c(s) B_o(s) \right) U_e(s) = \left(G_c(s) \frac{1 - e^{-T_e s}}{s} \right) U_e(s)$$

$$\Downarrow$$

$$y(t) = (g * u_e)(t)$$

$$\Uparrow$$

$$\mathcal{L}(\{g(t)\}_{t \in \mathcal{R}^+}) = G_c(s) \frac{1 - e^{-T_e s}}{s} = \frac{G_c(s)}{s} - e^{-T_e s} \frac{G_c(s)}{s}$$

$$y(t) = (g * u_e)(t) \implies y_e(t) = (g_e * u_e)(t)$$

$$\uparrow$$

$$g(t) = g_{cind}(t) - g_{cind}(t - T_e)$$

$$\downarrow$$

$$\text{SYSE} \left\{ Y(z) = \mathcal{G}(z) U(z) \text{ avec } \mathcal{G}(z) = \mathcal{Z}(\{g(kT_e)\}_{k \in \mathcal{N}})\right.$$

$$\downarrow$$

$$\mathcal{G}(z) = \frac{z-1}{z} \mathcal{Z}(\{g_{cind}(kT_e)\}_{k \in \mathcal{N}})$$

EXEMPLES

$\mathcal{G}_c(s)$	$\mathcal{G}(z) = \frac{z-1}{z} \mathcal{Z}(\{g_{cind}(kT_e)\}_{k \in \mathcal{N}})$
$\frac{1}{s}$	$\frac{T_e}{z-1}$
$\frac{1}{s^2}$	$\frac{T_e^2(z+1)}{(z-1)^2}$
$\frac{\alpha}{s+\alpha}$	$\frac{1 - e^{-\alpha T_e}}{z - e^{-\alpha T_e}}$
$\frac{\alpha^2}{(s+\alpha)^2}$	$\frac{(1 - e^{-\alpha T_e}(1 + \alpha T_e))z + e^{-\alpha T_e}(e^{-\alpha T_e} + \alpha T_e - 1)}{z^2 - 2e^{-\alpha T_e}z + e^{-2\alpha T_e}}$

CONFIGURATION POLES-ZEROS

$Y(z) = \mathcal{G}(z) U(z)$

avec

$$\mathcal{G}(z) = \frac{Z(z)}{P(z)} = \gamma \frac{\prod_{i=1}^{nz} (z - z_i)}{\prod_{i=1}^{np} (z - p_i)}$$

↓

$$\mathcal{Z}(\text{SYS}) : \{z_1, \dots, z_{nz}\} \longrightarrow \{ ? \}$$

$$\mathcal{P}(\text{SYS}) : \{p_{c1}, \dots, p_{cnp}\} \longrightarrow \{e^{p_{c1}T_e}, \dots, e^{p_{cnp}T_e}\}$$

↑

Diapositives 14 et 19

INTERPRETATION PERTINENTE

- Pôles

des sortie de la forme $y(t) = \gamma_i p_i^k \alpha(kT_e)$

pour une entrée identiquement nulle

- Configuration de zéros

une sortie identiquement nulle

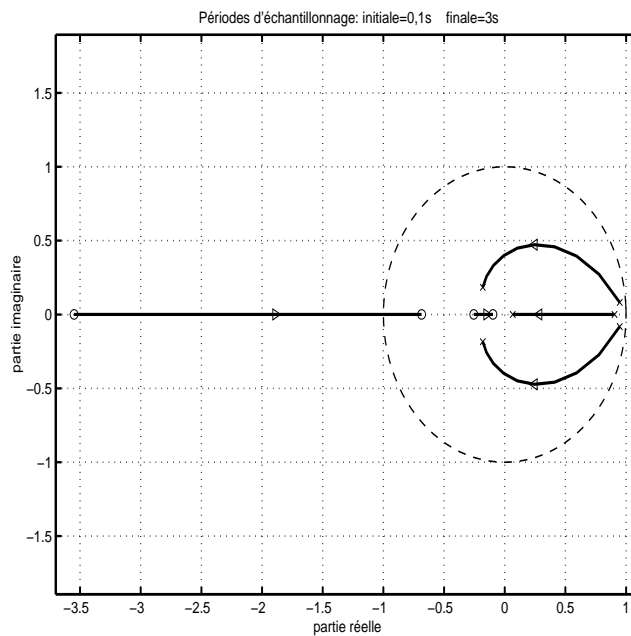
pour des entrées de la forme $u(t) = \beta_i z_i^k \alpha(kT_e)$

EXEMPLE

$$\mathcal{G}(s) = \frac{1}{(s+1)(s^2+2s+1)}$$

↓

$$T_e \in [0.1s, 3s]$$



Pôles et zéros d'un système échantillonné

ZEROS D'ECHANTILLONNAGE

$$\mathcal{G}_c(s) = \frac{1}{s^n}$$

↓

$$\mathcal{G}(z) = \frac{z-1}{z} \mathcal{Z} \left\{ \frac{1}{s^{n+1}} \right\} = \frac{T_e^n}{n!} \frac{B_n(z)}{(z-1)^n}$$

avec

$$B_n(z) = b_1 z^{n-1} + \dots + b_{n-1} z + b_n$$

♠

$$b_k = \sum_{i=1}^k \frac{(n+1)!}{(n+1-k+i)!} i^n (-1)^{k-i}$$

n	$B_n(z)$
1	1
2	$z + 1$
3	$z^2 + 4z + 1$
4	$z^3 + 11z^2 + 11z + 1$
5	$z^4 + 26z^3 + 66z^2 + 26z + 1$

EQUATION AUX DIFFERENCES

$$Y(z) = \mathcal{G}(z) U(z)$$

avec

$$\mathcal{G}(z) = z^{-1} \frac{B(z^{-1})}{A(z^{-1})} = z^{-1} \frac{b_0 + b_1 z^{-1} + \dots + b_{nb} z^{-nb}}{1 + a_1 z^{-1} + \dots + a_{na} z^{-na}}$$

↓

$$A(z^{-1})Y(z) = z^{-1}B(z^{-1})U(z)$$

$$Y(z) + \sum_{i=1}^{na} a_i z^{-i} Y(z) = \sum_{i=0}^{nb} b_i z^{-i} z^{-1} U(z)$$

↓

$$y(kT_e) + \sum_{i=1}^{na} a_i y(kT_e - iT_e) = \sum_{i=0}^{nb} b_i u(kT_e - iT_e - T_e)$$

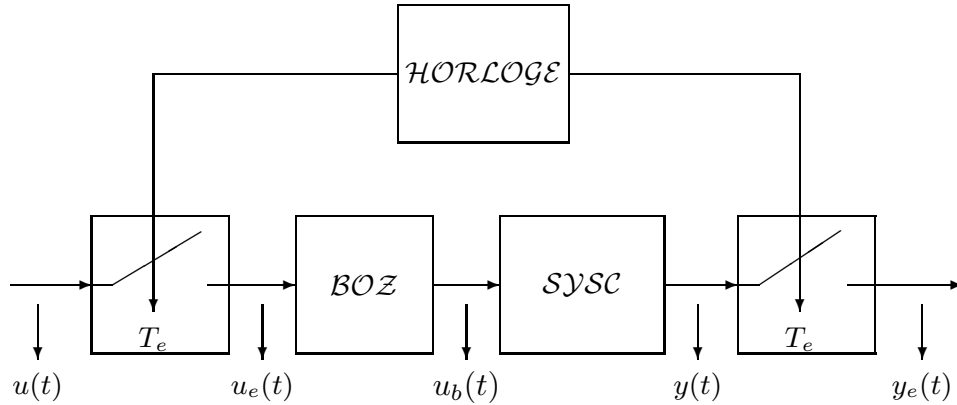
↓

$$\left(1 + \sum_{i=1}^{na} a_i q^{-i}\right) y(kT_e) = \left(\sum_{i=0}^{nb} b_i q^{-i}\right) q^{-1} u(kT_e)$$

⇕

$$A(q^{-1})y(kT_e) = q^{-1}B(q^{-1})u(kT_e)$$

REPRESENTATION D'ETAT



$$SYSC \left\{ \begin{array}{l} \rho x(t) = F_c x(t) + G_c u_b(t) \text{ avec } x(t_o) = x_o \\ y(t) = H_c x(t) + E_c u_b(t) \end{array} \right.$$

$$\Downarrow$$

$$TRÉS \left\{ \begin{array}{l} x(t) = e^{F_c(t-t_o)} x(t_o) + \int_{t_o}^t e^{F_c(t-\tau)} G_c u_b(\tau) d\tau \\ y(t) = H_c e^{F_c(t-t_o)} x(t_o) \\ \quad + \int_{t_o}^t H_c e^{F_c(t-\tau)} G_c u_b(\tau) d\tau + E_c u_b(t) \end{array} \right.$$

$$\begin{aligned}
 x((k+1)T_e) &= e^{F_c((k+1)T_e - kT_e)} x(kT_e) \\
 &\quad + \int_{kT_e}^{(k+1)T_e} e^{F_c((k+1)T_e - \tau)} G_c u_b(\tau) d\tau \\
 &\quad \downarrow \\
 u_b(\tau) &= u(kT_e) \quad \text{pour } \tau \in [kT_e, (k+1)T_e) \\
 (k+1)T_e - \tau &= \eta \\
 &\quad \downarrow \\
 x((k+1)T_e) &= (e^{F_c T_e}) x(kT_e) + \left(\int_0^{T_e} e^{F_c \eta} G_c d\eta \right) u(kT_e)
 \end{aligned}$$

REPRESENTATION D'ETAT

$$\text{SYSC} \begin{cases} \rho x(t) = F_c x(t) + G_c u_b(t) \quad \text{avec } x(t_0) = x_0 \\ y(t) = H_c x(t) + E_c u_b(t) \end{cases}$$

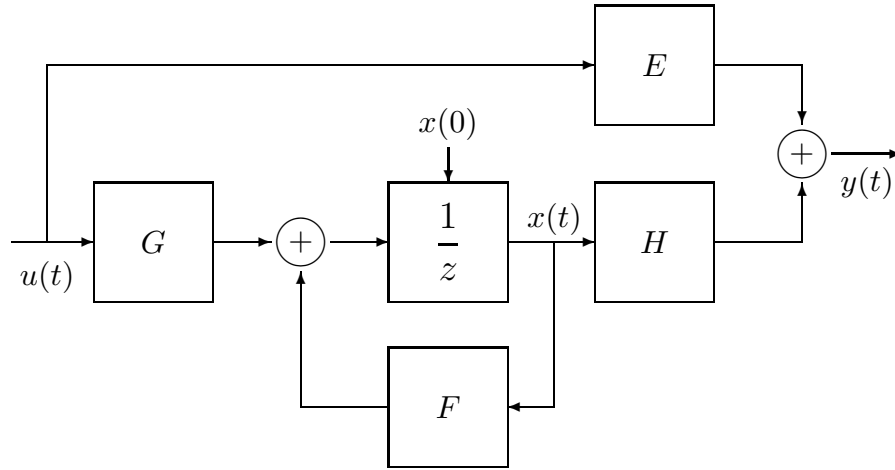
↓

$$\text{SYSE} \begin{cases} x((k+1)T_e) = F x(kT_e) + G u(kT_e) \quad \text{avec } x(0) = x_0 \\ y(kT_e) = H x(kT_e) + E u(kT_e) \end{cases}$$

♠

$$F = e^{F_c T_e}, \quad G = \left(\int_0^{T_e} e^{F_c \tau} d\tau \right) G_c, \quad H = H_c \quad \text{et} \quad E = E_c$$

$$\text{SYS} \begin{cases} x((k+1)T_e) = Fx(kT_e) + Gu(kT_e) \text{ avec } x(0) = x_o \\ y(kT_e) = Hx(kT_e) + Eu(kT_e) \end{cases}$$



TRAJECTOIRE D'ENTREE-SORTIE

$$\mathcal{TES} \begin{cases} x(kT_e) = F^{(k-\ell)}x(\ell T_e) + \sum_{j=\ell}^{k-1} F^{(k-j-1)}Gu(jT_e) \\ y(kT_e) = HF^{(k-\ell)}x(\ell T_e) + \sum_{j=\ell}^{k-1} HF^{(k-j-1)}Gu(jT_e) + Eu(kT_e) \end{cases}$$

$$\Downarrow$$

$$(F, G, H, E) \longrightarrow g(kT_e) = \begin{cases} HF^{(k-1)}G & \text{pour } k > 0 \\ E & \text{ailleurs} \end{cases}$$

REALISATION D'ETAT → FONCTION DE TRANSFERT

$$\text{SYSE} \begin{cases} zX(z) = FX(z) + GU(z) \\ Y(z) = HX(z) + EU(z) \end{cases}$$

$$\Downarrow$$

$$\text{SYSE} \begin{cases} (zI_n - F)X(z) = GU(z) \\ Y(z) = HX(z) + EU(z) \end{cases}$$

$$\Downarrow$$

$$(F, G, H, E) \longrightarrow \mathcal{G}(z) = H(zI_n - F)^{-1}G + E$$

FONCTION DE TRANSFERT → REALISATION D'ETAT

$$?(F, G, H, E) / \mathcal{G}(z) = \frac{B_\sigma(z)}{A_\sigma(z)} = H(zI_n - F)^{-1}G + E$$

$$\downarrow$$

$$\frac{B_\sigma(z)}{A_\sigma(z)} = \frac{H \text{Adj}(zI_n - F)G + \det(zI_n - F)E}{\det(zI_n - F)}$$

$$\downarrow$$

$$\mathcal{CP}(\text{SYS}) \subset \mathcal{CM}(\text{SYS}) \triangleq \mathcal{V}(F)$$

SYSTEMES EXIBANT UN RETARD

(*SYS* exhibe un retard pur τ_σ)

\Leftrightarrow

($g_c(t) = 0$ pour tout $t < \tau_\sigma$)



$\tau_\sigma = (d+1)T_e - \eta$ avec $d \in \mathcal{N}$ et $0 < \eta \leq T_e$

$$g(\ell T_e) = \int_{(\ell-1)T_e}^{\ell T_e} g_c(\tau) d\tau$$

$g(\ell T_e) = 0$ pour tout $\ell \in [1, d]$



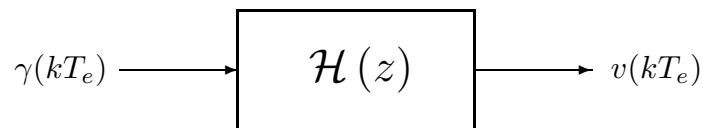
$$\mathcal{G}(q^{-1}) = q^{-d-1} \frac{b_0 + b_1 q^{-1} + \dots + b_{nb} q^{-nb}}{1 + a_1 q^{-1} + \dots + a_{na} q^{-na}}$$



$$\mathcal{G}(z^{-1}) = z^{-d-1} \frac{b_0 + b_1 z^{-1} + \dots + b_{nb} z^{-nb}}{1 + a_1 z^{-1} + \dots + a_{na} z^{-na}}$$

MODELISATION DES PERTURBATIONS

$$V(z) = \mathcal{H}(z) \Gamma(z)$$



♠ Contexte déterministe

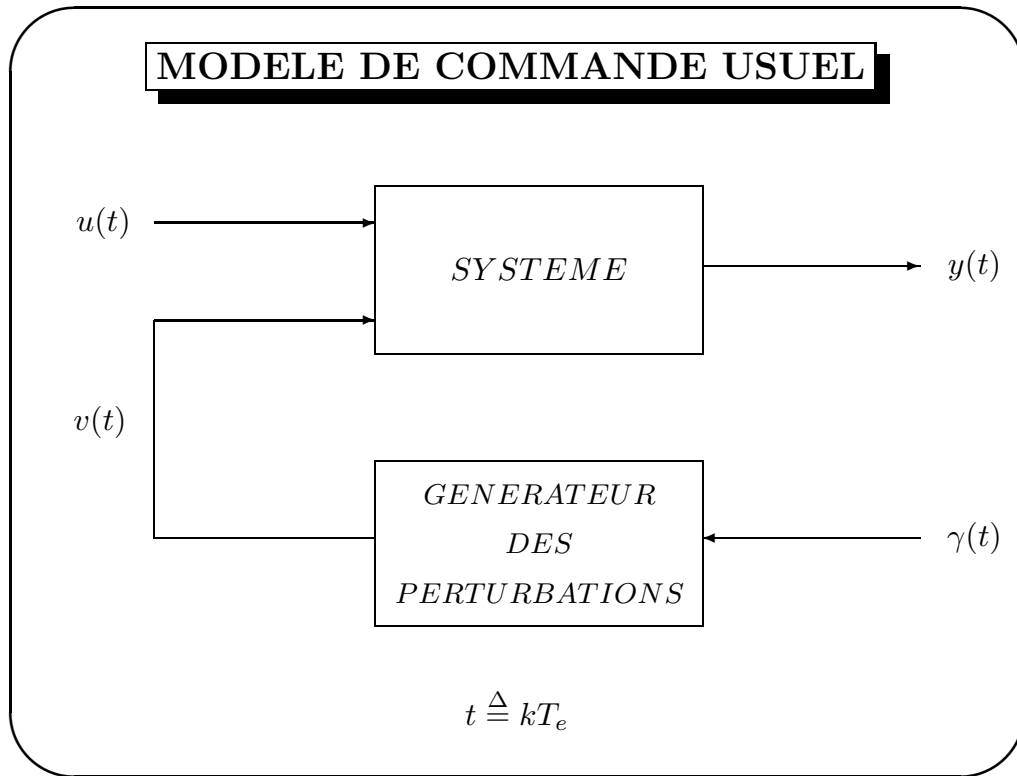
$\{\gamma(kT_e)\}$ est une impulsion d'amplitude inconnue



$\{\gamma(kT_e)\}$ est une séquence d'impulsions largement espacées
d'amplitudes et d'instant d'occurrence inconnus

♠ Contexte stochastique

$\{\gamma(kT_e)\}$ est une séquence de variables aléatoires indépendantes
de moyenne nulle et de variances finies



$$\text{SYS} \begin{cases} A(q^{-1})y(t) = B(q^{-1})u(t-d-1) + E(q^{-1})v(t) \\ D(q^{-1})v(t) = C(q^{-1})\gamma(t) \end{cases}$$

↓

$$A(q^{-1}) = 1 + a_1q^{-1} + \dots + a_{na}q^{-na}$$

$$B(q^{-1}) = b_o + b_1q^{-1} + \dots + b_{nb}q^{-nb}$$

$$C(q^{-1}) = c_o + c_1q^{-1} + \dots + c_{nc}q^{-nc}$$

$$D(q^{-1}) = 1 + d_1q^{-1} + \dots + d_{nd}q^{-nd}$$

$$E(q^{-1}) = e_o + e_1q^{-1} + \dots + e_{ne}q^{-ne}$$

↓

$$v(t) = v\alpha(t) \implies D(q^{-1}) = 1 - q^{-1}$$

$$v(t) = v\sin(\omega t + \phi)\alpha(t) \implies D(q^{-1}) = 1 - 2\cos(\omega T_e)q^{-1} + q^{-2}$$

CONCLUSION

♠ Motivations

♠ Théorèmes fondamentaux

→ *Echantillonnage et Reconstruction*

♠ Modélisation

CNA – SYSTÈME – CAN

♠ Relations entre les diverses représentations

♠ Systèmes à retards

♠ Modélisation usuelle

$$\text{SYS} \begin{cases} A(q^{-1})y(t) = B(q^{-1})u(t-d-1) + E(q^{-1})v(t) \\ D(q^{-1})v(t) = C(q^{-1})\gamma(t) \end{cases}$$

↓

$$A_{\sigma}(z) = \begin{cases} z^{na} A(z^{-1}) & \text{si } na \geq nb + d + 1 \\ z^{nb+d+1-na} z^{na} A(z^{-1}) & \text{si } na < nb + d + 1 \end{cases}$$

$$B_{\sigma}(z) = \begin{cases} z^{na-nb-d-1} z^{nb} B(z^{-1}) & \text{si } na \geq nb + d + 1 \\ z^{nb} B(z^{-1}) & \text{si } na < nb + d + 1 \end{cases}$$

STABILITE

PLAN

- Concepts de stabilité
- Rappel et notations
- Stabilité externe
- Stabilité interne
- Résultats usuels
- Conclusion

CONCEPTS DE STABILITE

- **Stabilité interne**

*Aptitude d'un système à produire
des sorties bornées à partir d'entrées bornées*

- ♠ **Stabilité interne**

*Aptitude d'un système dynamique à recouvrer
son état d'équilibre indépendamment des perturbations*

RAPPEL

$$F_e(s) = \mathcal{L} \{ f_e(t) \} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} f(kT_e) e^{-kT_e s}$$



$$F_e(s) \quad \longrightarrow \quad F(z)$$

$$z = e^{T_e s}$$



$$F_e(s) = F(z) \text{ pour } z = e^{T_e s}$$

NOTATIONS

$$\mathcal{D}_s = \{z \in \mathcal{C} / |z| \leq 1\}$$

$$\mathcal{D}_{sa} = \{z \in \mathcal{C} / |z| < 1\}$$

$$\mathcal{C}_u = \{z \in \mathcal{C} / |z| = 1\}$$

$$\mathcal{R}_{sa}[z] = \{X(z) \in \mathcal{R}(z) / X(z) = 0 \implies z \in \mathcal{D}_{sa}\}$$

$$\mathcal{R}_{us}[z] = \left\{ X(z) \in \mathcal{R}[z] / (X(z) = 0 \implies z \in \mathcal{C}_u) \right. \\ \left. \text{et } (X(z_1) = X(z_2) = 0) \implies (z_1 = z_2) \right\}$$

↓

$$\mathcal{R}_{sm}[z] = \mathcal{R}_{us}[z] \uplus \mathcal{R}_{sa}[z] \quad \text{et} \quad \mathcal{R}[z] = \mathcal{R}_{sm}[z] \cup \mathcal{R}_{ins}[z]$$

STABILITE EXTERNE

$$\text{SYS} \left\{ y(kT_e) = \mathcal{G}(q^{-1}) u(kT_e) = \sum_{\ell=1}^{\infty} g(\ell T_e) u((k-\ell)T_e) \right.$$

↓

- SYS est stable si et seulement si

$$\lim_{k \rightarrow \infty} g(kT_e) = 0$$

- SYS est marginalement stable si et seulement si

$\{g(kT_e)\}$ est bornée *mais* n'est pas asymptotiquement nulle

- SYS est instable si et seulement si

$$\lim_{k \rightarrow \infty} g(kT_e) = \infty$$

RESULTAT FUNDAMENTAL I

Considérons un système linéaire invariant SYS décrit par sa réponse impulsionnelle ou sa fonction de transfert, respectivement notées par

$$\{g(kT_e)\}_{k \in \mathcal{N}}$$

$$\mathcal{G}(z) = z^{-d-1} \frac{B(z^{-1})}{B(z^{-1})} \triangleq \frac{B_\sigma(z)}{A_\sigma(z)}$$

Les propositions suivantes sont équivalentes.

PR1. SYS est stable au sens EBSB.

PR2. La norme suivante de la réponse impulsionnelle est finie

$$\sum_{k=0}^{\infty} |g(kT_e)| \leq B_g < \infty$$

$$\Updownarrow$$

$$\lim_{k \rightarrow \infty} g(kT_e) = 0$$

PR3. Les pôles de la fonction de transfert sont à l'intérieur du disque de centre l'origine et de rayon unitaire, soit

$$A_\sigma(z) \in \mathcal{R}_{sa}[z]$$

RESULTAT FUNDAMENTAL II

$$\mathcal{SYS} \left\{ \begin{array}{l} Y(z) = \mathcal{G}(z) U(z) \text{ avec } \mathcal{G}(z) = \frac{B_\sigma(z)}{A_\sigma(z)} \\ \downarrow \end{array} \right.$$

- \mathcal{SYS} est stable si et seulement si

$$A_\sigma(z) \in \mathcal{R}_{sa}(z)$$

- \mathcal{SYS} est marginalement stable si et seulement si

$$A_\sigma(z) = A_{se}(z) \bullet A_{sm}(z)$$

avec

$$A_{se}(z) \in \mathcal{R}_{dn}(z) \cup \mathcal{R}_{sa}(z) \text{ et } A_{sm}(z) \in \mathcal{R}_{sm}(z)$$

- \mathcal{SYS} est instable si et seulement si

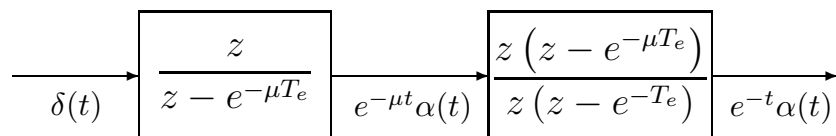
$$A_\sigma(z) \notin \mathcal{R}_{sa}(z) \cup \mathcal{R}_{sm}(z)$$

REMARQUE

Un système est issu d'une interconnection de plusieurs systèmes

↓

Interconnexions en série, en parallèle et en contre réaction



Stabilité externe pour tout $\mu \in \mathcal{R}$

Stabilité interne pour tout $\mu > 0$

STABILITE INTERNE

$$\mathcal{SA} \left\{ \begin{array}{l} x((k+1)T_e) = F x(kT_e) \quad \text{avec} \quad x(0) = x_o \end{array} \right.$$

↓

- \mathcal{SYS} est asymptotiquement stable si et seulement si

$$\lim_{k \rightarrow \infty} x(kT_e) = 0$$

- \mathcal{SYS} est stable si et seulement si

$\{x(kT_e)\}_{k \in \mathcal{N}}$ est bornée *mais* n'est pas asymptotiquement nulle

- \mathcal{SYS} est instable si et seulement si

$$\lim_{k \rightarrow \infty} x(kT_e) = \infty$$

RESULTAT FONDAMENTAL III

$$x((k+1)T_e) = F x(kT_e) \quad \text{avec} \quad x(0) = x_o \implies x(kT_e) = F^k x_o$$

- Stabilité asymptotique

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \|F^k\| = 0$$

⇕

$$\mathcal{V}(F) \subset \mathcal{D}_{sa}$$

⇕

$$\forall Q = Q^T > 0 \exists P = P^T > 0 / F^T P F - P = -Q$$

$$x((k+1)T_e) = F x(kT_e) \text{ avec } x(0) = x_o \implies x(kT_e) = F^k x_o$$

- Stabilité

$\{\|F^k\|\}_{k \in \mathcal{N}}$ est bornée *mais* n'est pas asymptotiquement nulle

$$\Updownarrow$$

$$\left(\mathcal{V}(F) \subset \mathcal{D}_s\right) \text{ et } \left(\lambda_i \in \mathcal{C}_u \implies \lambda_i \text{ n'est pas défective}\right)$$

$$\Updownarrow$$

$$\forall Q = Q^T \geq 0 \exists P = P^T \geq 0 / F^T P F - P = -Q$$

$$x((k+1)T_e) = F x(kT_e) \text{ avec } x(0) = x_o \implies x(kT_e) = F^k x_o$$

- Instabilité

$\{\|F^k\|\}_{k \in \mathcal{N}}$ n'est pas bornée

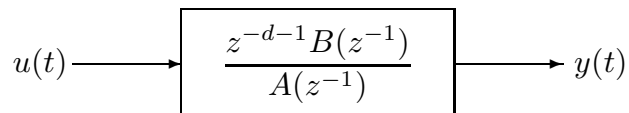
$$\Updownarrow$$

$$\exists i \in [1, n] / \left(\lambda_i \notin \mathcal{D}_s\right) \text{ ou } \left(\lambda_i \in \mathcal{C}_u \implies \lambda_i \text{ est défective}\right)$$

OUTILS FONDAMENTAUX

- Entrées asymptotiquement rejetées
- Principe du modèle interne
- Processus aléatoires

ENTREES ASYMPTOTIQUEMENT REJETEES



$$\begin{array}{c} \uparrow \\ A(z^{-1}) \in \mathcal{R}_{sa}[z] \\ \downarrow \end{array}$$

- Entrées usuelles

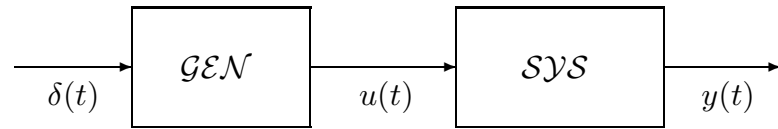
$$u(t) = \delta_a(t)$$

$$u(t) = \mathcal{F}(q^{-1})\delta(t) \text{ avec } \mathcal{CP}(\mathcal{F}(z)) \subset \mathcal{D}_{sa}$$

- Entrées non usuelles

$$B(q^{-1})u(t) = \mathcal{F}(q^{-1})\delta(t) \text{ avec } \mathcal{CP}(\mathcal{F}(z)) \subset \mathcal{D}_{sa}$$

PRINCIPE DU MODELE INTERNE



↑
SYS est stable et GEN est marginalement stable

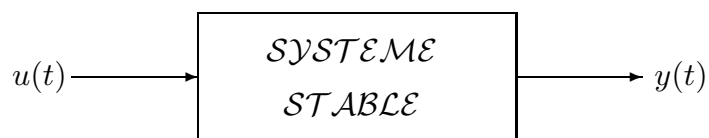
↓

$$\lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = 0 \iff \text{CPSI}(\mathcal{G}\mathcal{E}\mathcal{N}) \subset \text{CZ}(\text{SYS})$$

↑

$$\text{CPSI}(\mathcal{G}\mathcal{E}\mathcal{N}) = \text{CP}(\mathcal{G}\mathcal{E}\mathcal{N}) \cap \mathcal{C}_u$$

PROCESSUS ALEATOIRES



$$\mathcal{E}(u(t)) = 0 \text{ et } \mathcal{E}\left((u(t))^2\right) = \sigma_u^2$$



$$\mathcal{E}(y(t)) = 0 \text{ et } \mathcal{E}\left((y(t))^2\right) = \sigma_y^2$$

CONCLUSION

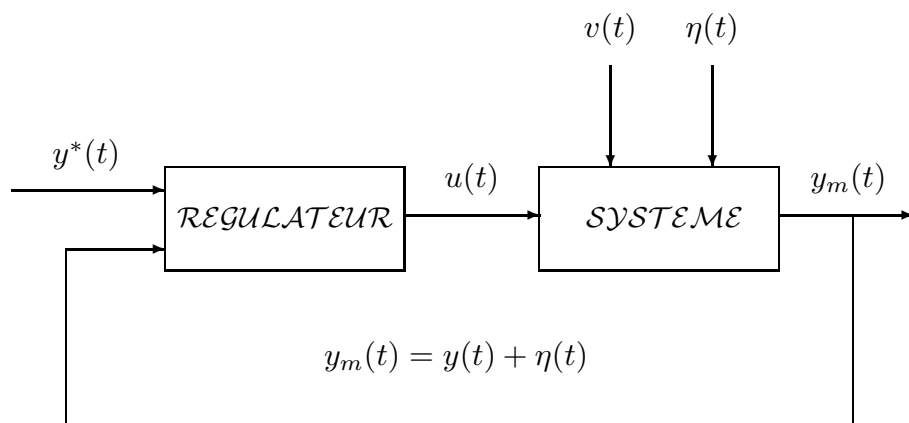
- Stabilité externe → réponse impulsionnelle
- Résultats fondamentaux de stabilité externe
- Limitation de la stabilité externe
- Stabilité interne → trajectoire d'état du système homogène
- Résultat fondamental de stabilité interne
- Outils fondamentaux à retenir

SYSTEMES ASSERVIS

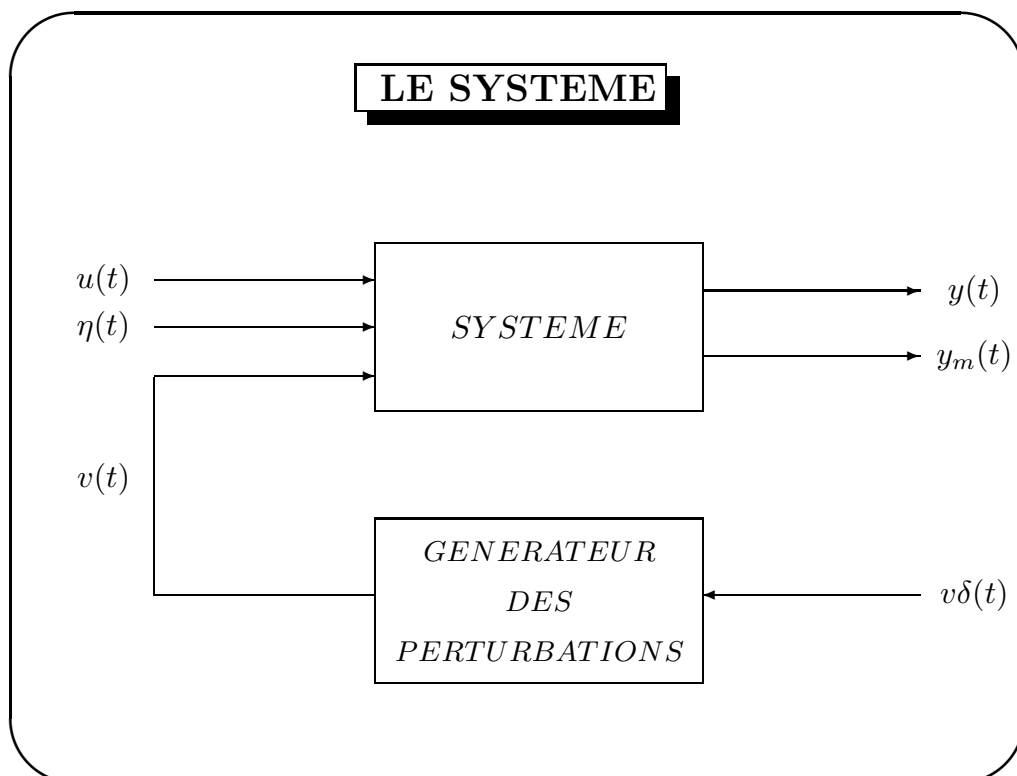
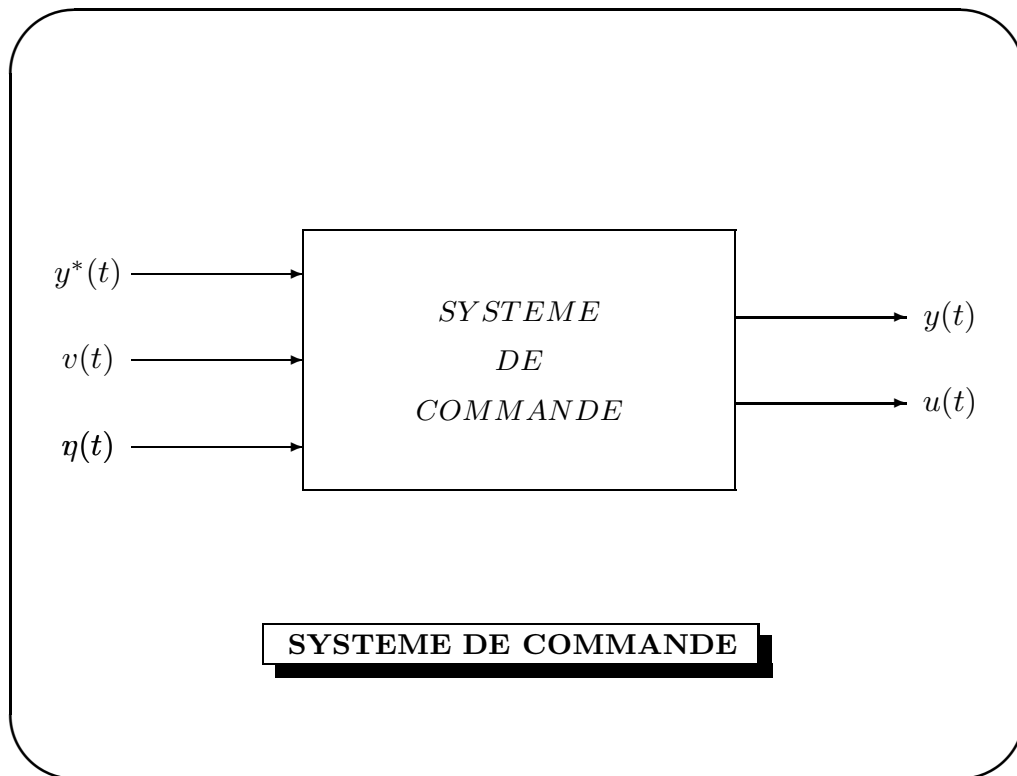
PLAN

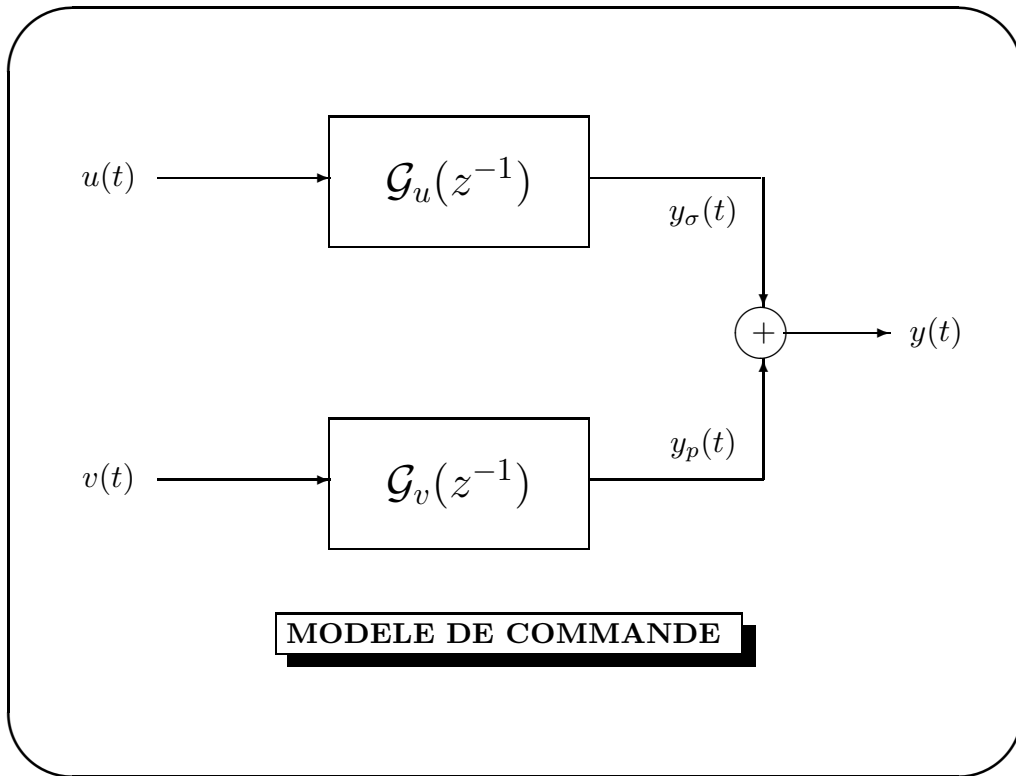
- ♠ Asservissements
- ♠ Le système
- ♠ Le régulateur
- ♠ Système de commande
- ♠ Analyse systémique
- ♠ Régulateurs admissibles

ASSERVISSEMENTS



? $\mathcal{REG} \rightarrow \{u(t)\} / \{y(t)\} \in \mathcal{V}(\{y^*(t)\}) / \{v(t)\}$ et $\{\eta(t)\}$





MODELE DE COMMANDE

$$MOC \left\{ \begin{array}{l} y_{\sigma}(t) = \mathcal{G}_u(q^{-1}) u(t) + \mathcal{G}_v(q^{-1}) v(t) \\ v(t) = \mathcal{H}(q^{-1}) v\delta(t) \\ y_m(t) = y_{\sigma}(t) + y_p(t) \end{array} \right.$$

↓

$$\mathcal{G}_u(z^{-1}) = z^{-d-1} \frac{B(z^{-1})}{A(z^{-1})}$$

$$\mathcal{G}_v(z^{-1}) = \frac{E(z^{-1})}{A(z^{-1})}$$

$$\mathcal{H}(z^{-1}) = \frac{C(z^{-1})}{D(z^{-1})}$$

$$MCOM \left\{ \begin{array}{l} A(q^{-1})y(t) = B(q^{-1})u(t-d-1) + E(q^{-1})v(t) \\ D(q^{-1})v(t) = C(q^{-1})v\delta(t) \\ y_m(t) = y(t) + \eta(t) \end{array} \right.$$

$$\uparrow$$

$$A(q^{-1}) = 1 + a_1q^{-1} + \dots + a_{na}q^{-na}$$

$$B(q^{-1}) = b_o + b_1q^{-1} + \dots + b_{nb}q^{-nb}$$

$$C(q^{-1}) = 1 + c_1q^{-1} + \dots + c_{nc}q^{-nc}$$

$$D(q^{-1}) = 1 + d_1q^{-1} + \dots + d_{nd}q^{-nd}$$

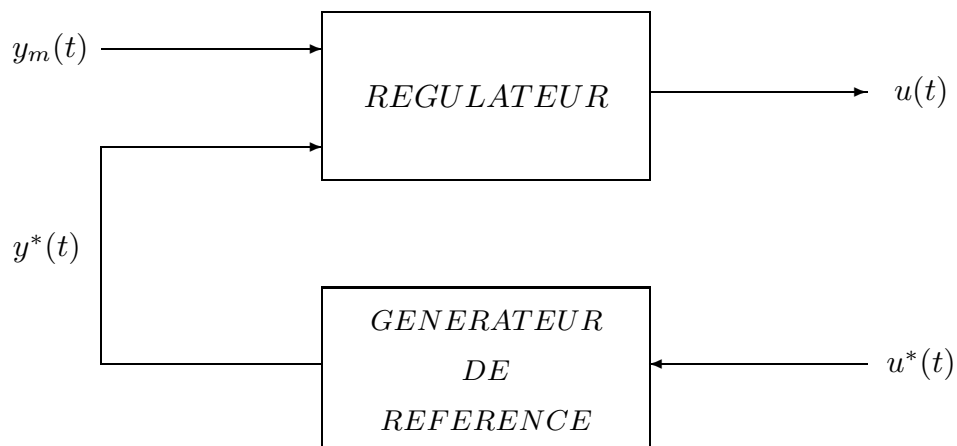
$$E(q^{-1}) = e_o + e_1q^{-1} + \dots + e_{ne}q^{-ne}$$

$$\uparrow$$

$$v(t) = v\alpha(t) \implies D(q^{-1}) = 1 - q^{-1}$$

$$v(t) = v\sin(\omega t + \phi)\alpha(t) \implies D(q^{-1}) = 1 - 2\cos(\omega T_e)q^{-1} + q^{-2}$$

LE REGULATEUR



$$\mathcal{REG} \begin{cases} u(t) = -\mathcal{R}_r(q^{-1}) y_m(t) + \mathcal{R}_p(q^{-1}) y^*(t + d + 1) \\ y^*(t) = \mathcal{G}^*(q^{-1}) u^*(t) \end{cases}$$

↓

$$\mathcal{R}_r(z^{-1}) = \frac{R_n(z^{-1})}{R_d(z^{-1})}, \quad \mathcal{R}_p(z^{-1}) = \frac{R_p(z^{-1})}{R_d(z^{-1})}$$

et

$$\mathcal{G}^*(q^{-1}) = z^{-d-1} \frac{B^*(z^{-1})}{A^*(z^{-1})}$$

↓

$$\mathcal{REG} \begin{cases} R_d(q^{-1})u(t) + R_n(q^{-1})y_m(t) = R_p(q^{-1})y^*(t + d + 1) \\ A^*(q^{-1})y^*(t + d + 1) = B^*(q^{-1})u^*(t) \\ y_m(t) = y(t) + \eta(t) \end{cases}$$

COMMANDE AVEC RETOUR UNITAIRE

$$R_p(q^{-1}) = q^{-d-1} R_n(q^{-1})$$

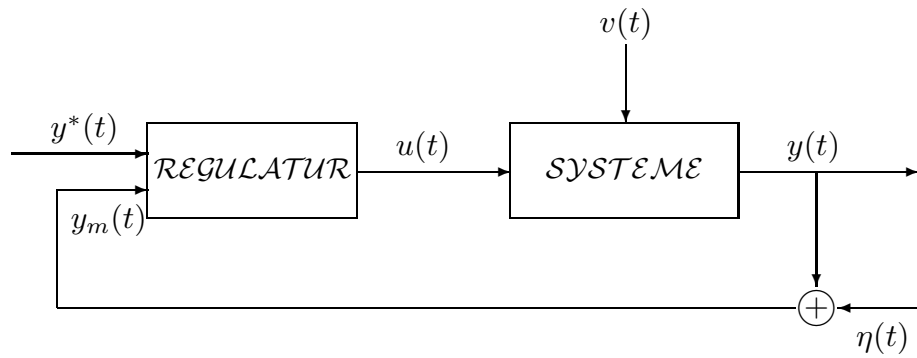
↓

$$\mathcal{REGRU} \begin{cases} u(t) = -\mathcal{R}(q^{-1}) (y^*(t) - y_m(t)) \\ y^*(t) = \mathcal{G}^*(q^{-1}) u^*(t) \end{cases}$$

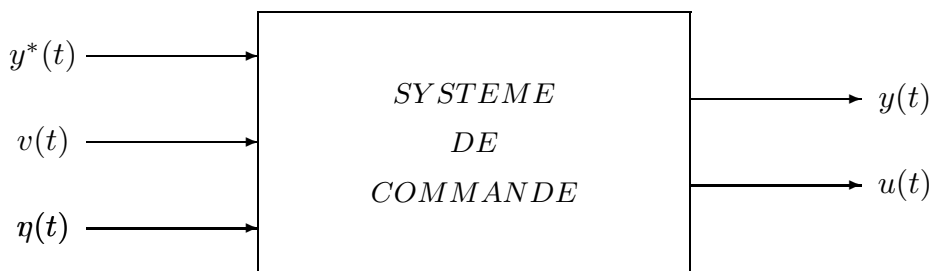
↓

$$\mathcal{R}(z^{-1}) = \frac{R_n(z^{-1})}{R_d(z^{-1})}$$

SYSTEME DE COMMANDE



? $REG \rightarrow \{u(t)\} / \{y(t)\} \in \mathcal{V}(\{y^*(t)\}) / \{v(t)\}$ et $\{\eta(t)\}$



SYSTEME DE COMMANDE

EQUATIONS FONDAMENTALES

♠ *Le système*

$$\mathcal{MC} \left\{ \begin{array}{l} A(q^{-1})y(t) = B(q^{-1})u(t-d-1) + E(q^{-1})v(t) \\ D(q^{-1})v(t) = C(q^{-1})\delta_v(t) \end{array} \right.$$

♠ *Le régulateur*

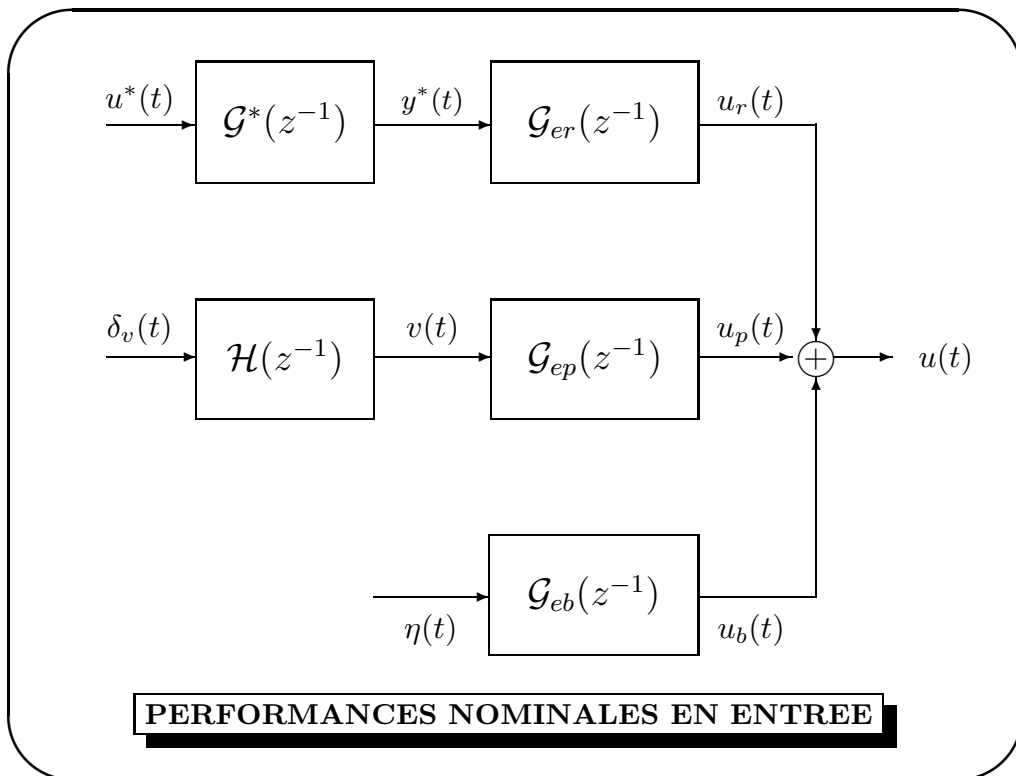
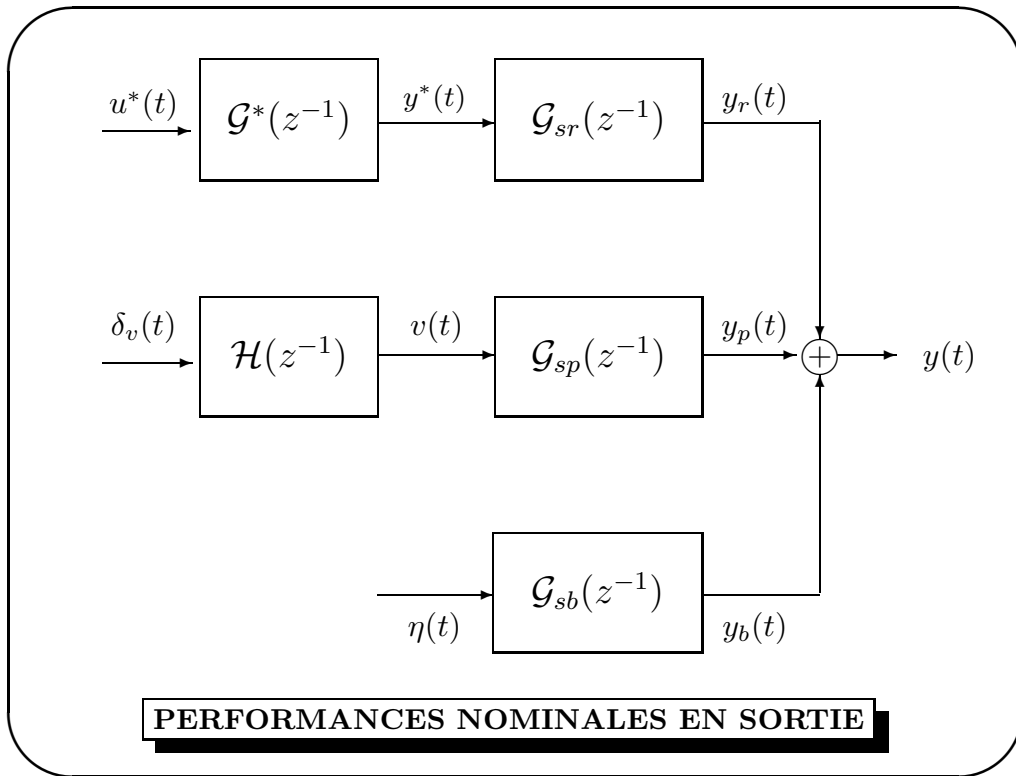
$$\mathcal{REG} \left\{ \begin{array}{l} R_d(q^{-1})u(t) + R_n(q^{-1})y_m(t) = R_p(q^{-1})y^*(t+d+1) \\ y_m(t) = y(t) + \eta(t) \\ A^*(q^{-1})y^*(t+d+1) = B^*(q^{-1})u^*(t) \\ D^*(q^{-1})v(t) = C^*(q^{-1})\delta_v(t) \end{array} \right.$$

SYSTEME DE COMMANDE NOMINAL

$$\mathcal{SAS} \left\{ \begin{array}{l} y(t) = \frac{q^{-d-1}B(q^{-1})R_p(q^{-1})}{P_c(q^{-1})} y^*(t+d+1) \\ \quad + \frac{E(q^{-1})R_d(q^{-1})}{P_c(q^{-1})} v(t) - \frac{q^{-d-1}B(q^{-1})R_n(q^{-1})}{P_c(q^{-1})} \eta(t) \\ u(t) = \frac{A(q^{-1})R_p(q^{-1})}{P_c(q^{-1})} y^*(t+d+1) \\ \quad - \frac{E(q^{-1})R_n(q^{-1})}{P_c(q^{-1})} v(t) - \frac{A(q^{-1})R_n(q^{-1})}{P_c(q^{-1})} \eta(t) \end{array} \right.$$

↑

$$P_c(q^{-1}) = A(q^{-1})R_d(q^{-1}) + q^{-d-1}B(q^{-1})R_n(q^{-1})$$



FONCTION DE TRANSFERT

$$SAS \left\{ Y_{sas}(z) = \mathcal{G}_{sas}(z^{-1}) U_{sas}(z) \right.$$

avec

$$\mathcal{G}_{sas}(z^{-1}) = \begin{pmatrix} \mathcal{G}_{sr}(z^{-1}) & \mathcal{G}_{sp}(z^{-1}) & \mathcal{G}_{sb}(z^{-1}) \\ \mathcal{G}_{er}(z^{-1}) & \mathcal{G}_{ep}(z^{-1}) & \mathcal{G}_{eb}(z^{-1}) \end{pmatrix}$$

↕

$$\mathcal{G}_{sas}(z^{-1}) = [\mathcal{G}_{ij}(z^{-1})] \quad (i, j) \in [s, e] \times [r, p, b]$$

FONCTIONS DE TRANSFERT DU SYSTEME ASSERVI

$$FTR \left\{ \begin{array}{l} \mathcal{G}_{sr}(z^{-1}) \triangleq \frac{B(z^{-1})R_p(z^{-1})}{P_c(z^{-1})} \\ \mathcal{G}_{sp}(z^{-1}) \triangleq \frac{E(z^{-1})R_d(z^{-1})}{P_c(z^{-1})} \\ \mathcal{G}_{sb}(z^{-1}) \triangleq -\frac{z^{-d-1}B(z^{-1})R_n(z^{-1})}{P_c(z^{-1})} \\ \mathcal{G}_{er}(z^{-1}) \triangleq z^{d+1} \frac{A(z^{-1})R_p(z^{-1})}{P_c(z^{-1})} \\ \mathcal{G}_{ep}(z^{-1}) \triangleq -\frac{E(z^{-1})R_n(z^{-1})}{P_c(z^{-1})} \\ \mathcal{G}_{eb}(z^{-1}) \triangleq -\frac{A(z^{-1})R_n(z^{-1})}{P_c(z^{-1})} \end{array} \right.$$

ANALYSE SYSTEMIQUE

- Rappel
- Stabilité nominale
- Dynamique de poursuite
- Dynamique de régulation
- Fonction de sensibilité usuelles
- Erreurs de poursuite
- Régulateurs admissibles

STABILITE NOMINALE

Le système asservi est stable si et seulement si tous ses modes sont situés dans le domaine de stabilité, soit

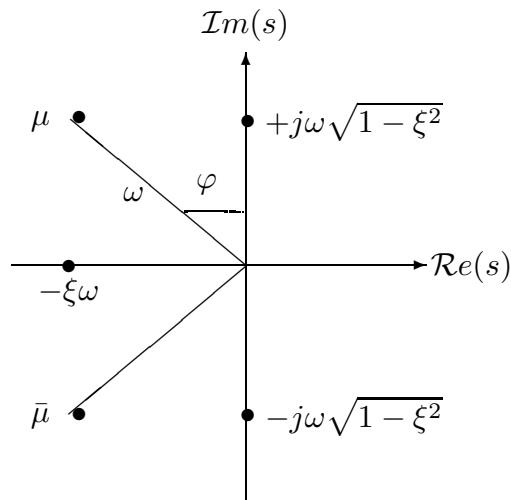
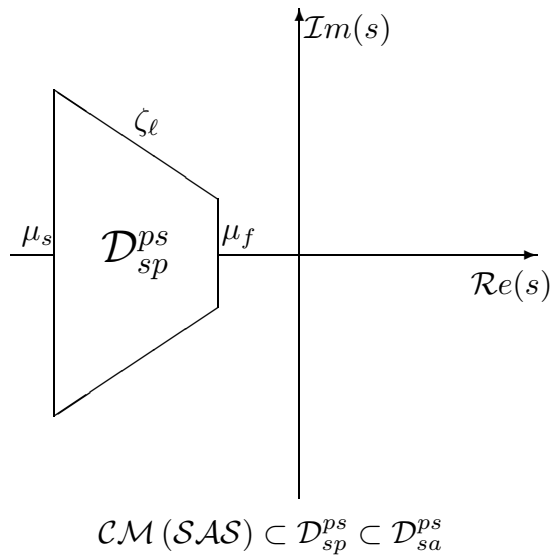
$$SAS \text{ est stable} \iff CM(SAS) \subset \mathcal{D}_{sa}^{pz}$$

ou d'une manière équivalente

$$(SAS \text{ est stable}) \iff (P_c(z^{-1}) = 0 \implies |z| < 1)$$

↑

$$P_c(z^{-1}) = A(z^{-1})R_d(z^{-1}) + z^{-d-1}B(z^{-1})R_n(z^{-1}) \in \mathcal{R}_{sa}[z^{-1}]$$

DOMAINE DE STABILITE ET DE PERFORMANCES


Mode $(\zeta, \omega) \rightarrow s^2 + 2\zeta\omega s + \omega^2$

Mode (ζ, ω)

↓

$$M(s) = s^2 + 2\zeta\omega s + \omega^2$$

↓

$$M(z^{-1}) = 1 - e^{-\zeta\omega T_e} \cos\left(\sqrt{1 - \zeta^2}\omega T_e\right) z^{-1} + e^{-2\zeta\omega T_e} z^{-2}$$

DOMAINE DE STABILITE ET DE PERFORMANCES

DYNAMIQUE DE POURSUITE

$$\begin{aligned}
 \mathcal{DP}(z^{-1}) &= z^{d+1} \mathcal{G}_{sr}(z^{-1}) \\
 &= z^{d+1} \frac{z^{-d-1} B(z^{-1})R_p(z^{-1})}{P_c(z^{-1})} \\
 &= \frac{B(z^{-1})R_p(z^{-1})}{P_c(z^{-1})} \mathcal{G}^*(z^{-1})
 \end{aligned}$$

↓

*Le retard et les zéros du système
sont invariants par rétroaction*

DYNAMIQUE DE POURSUITE EN ENTREE

$$\begin{aligned}
 \mathcal{DP}_e(z^{-1}) &= \mathcal{G}_{er}(z^{-1}) z^{d+1} \\
 &= z^{d+1} \frac{A(z^{-1})R_p(z^{-1})}{P_c(z^{-1})}
 \end{aligned}$$

DYNAMIQUE DE REGULATION

$$\mathcal{DR}(z^{-1}) = \frac{E(z^{-1})R_d(z^{-1})}{P_c(z^{-1})}$$

↓

*Les zéros de la fonction de transfert $\mathcal{G}_v(z^{-1})$
sont invariants par rétroaction*

SENSIBILITE AU BRUIT DE MESURE

$$\mathcal{SB}(z^{-1}) = \begin{pmatrix} \mathcal{G}_{sb}(z^{-1}) \\ \mathcal{G}_{eb}(z^{-1}) \end{pmatrix} \triangleq \begin{pmatrix} -\frac{z^{-d-1}B(z^{-1})R_n(z^{-1})}{P_c(z^{-1})} \\ -\frac{A(z^{-1})R_n(z^{-1})}{P_c(z^{-1})} \end{pmatrix}$$

FONCTIONS DE SENSIBILITE USUELLES

♠ Fonction de sensibilité

$$\mathcal{S}(z^{-1}) \triangleq \frac{A(z^{-1})R_d(z^{-1})}{P_c(z^{-1})} \longrightarrow \mathcal{FPH}$$

♠ Fonction de sensibilité complémentaire

$$\mathcal{T}(z^{-1}) \triangleq \frac{z^{-d-1}B(z^{-1})R_n(z^{-1})}{P_c(z^{-1})} \longrightarrow \mathcal{FPB}$$

↓

$$\mathcal{S}(z) + \mathcal{T}(z) = 1 \quad \text{pour tout } z \in \mathcal{C}$$

♠ Bruit de mesure en sortie.

$$\mathcal{G}_{sb}(z^{-1}) = -\mathcal{T}(z^{-1})$$

♠ Bruit de mesure en entrée.

$$\mathcal{G}_{eb}(z^{-1}) = -\mathcal{R}(z^{-1})\mathcal{S}(z^{-1}) \triangleq -\mathcal{RS}(z^{-1})$$

♠ Perturbations en sortie, i.e. $E(z^{-1}) = A(z^{-1})$.

$$\mathcal{G}_{sp}(z^{-1}) = \mathcal{S}(z^{-1})$$

♠ Perturbations en entrée, i.e. $E(z^{-1}) = z^{-d-1}B(z^{-1})$

$$\mathcal{G}_{sp}(z^{-1}) = \mathcal{G}(z^{-1})\mathcal{S}(z^{-1}) \triangleq \mathcal{GS}(z^{-1})$$

REGULATEURS ADMISSIBLES

- Composantes de la sortie du système asservi
- Erreurs de poursuite
- Classe des régulateurs admissibles
- Performances dynamiques
- Insensibilité aux bruits de mesure
- Compensation parfaite des perturbations
- Poursuite admissible
- Precision maximale
- Dépollution du signal de commande
- Structure canonique d'un régulateur

COMPOSANTES DE LA SORTIE SYSTEME ASSERVI

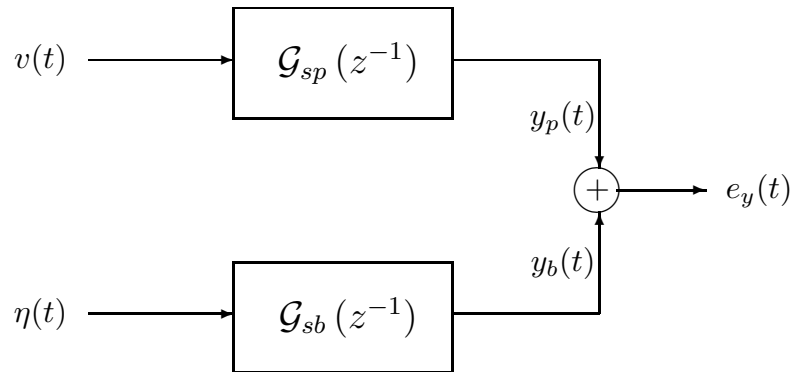
$$SAS \begin{cases} y(t) = y_r(t) + y_p(t) + y_b(t) \\ u(t) = u_r(t) + u_p(t) + u_b(t) \end{cases}$$

↑

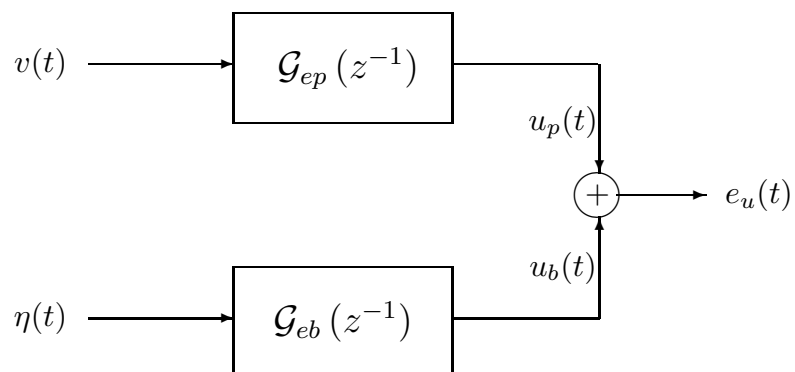
$$CSAS \begin{cases} y_r(t) = \mathcal{G}_{sr}(q^{-1})y^*(t) \\ y_p(t) = \mathcal{G}_{sp}(q^{-1})v(t) \\ y_b(t) = \mathcal{G}_{sb}(q^{-1})\eta(t) \\ u_r(t) = \mathcal{G}_{er}(q^{-1})y^*(t+d+1) \\ u_p(t) = \mathcal{G}_{ep}(q^{-1})v(t) \\ u_b(t) = \mathcal{G}_{eb}(q^{-1})\eta(t) \end{cases}$$

ERREUR DE POURSUITE EN SORTIE

$$e_y(t) \triangleq y(t) - y_r(t) = y_p(t) + y_b(t)$$

**ERREUR DE POURSUITE EN ENTREE**

$$e_u(t) \triangleq u(t) - u_r(t) = u_p(t) + u_b(t)$$



ERREUR DE POURSUITE

$$e_{\sigma}(t) \triangleq y^*(t) - y(t) = e_c(t) - y_p(t) - y_b(t)$$

avec

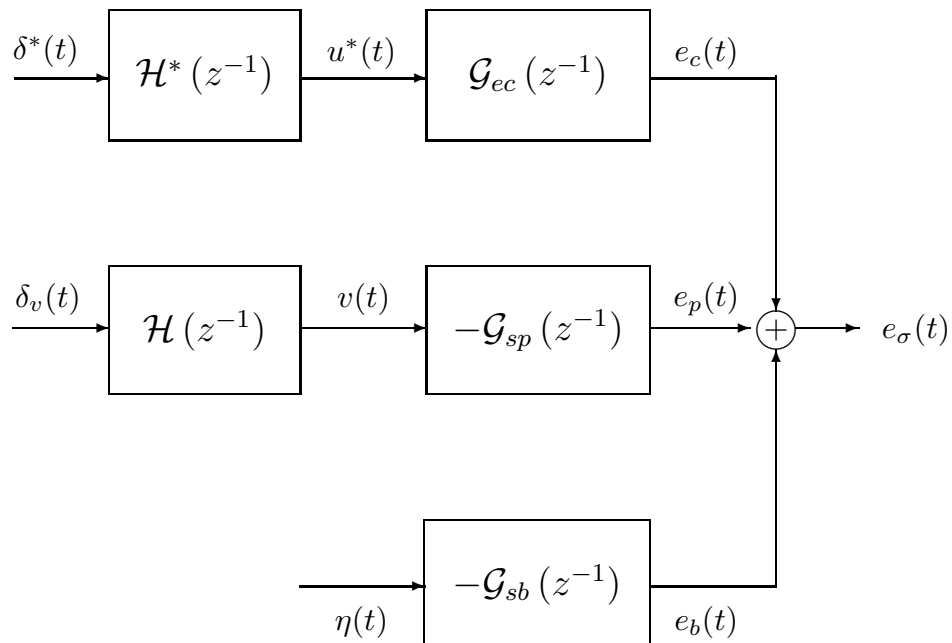
$$e_c(t) = \mathcal{G}_{ec}(q^{-1})u^*(t)$$

↓

$$\mathcal{G}_{ec}(q^{-1})$$

≡

$$\frac{A(q^{-1})R_d(q^{-1}) + B(q^{-1})(q^{-d-1}R_n(q^{-1}) - R_p(q^{-1}))}{P_c(q^{-1})} \mathcal{G}^*(q^{-1})$$



CLASSE DES REGULATEURS ADMISSIBLES

C1. Le système de commande réalise les performances dynamiques requises

$$RPD \left\{ \mathcal{CM}(SAS) \subset \mathcal{D}_{sp} \right.$$

C2. Le système de commande est insensible aux bruits de mesures inéluctables

$$IBM \left\{ \{y_b(t)\} \in \mathcal{SAZI} \text{ et } \{u_b(t)\} \in \mathcal{SAZI} \right.$$

C3. Le système de commande réalise une compensation parfaite des perturbations qui affectent ses performances en sortie

$$CPP \left\{ \lim_{t \rightarrow \infty} y_p(t) = 0 \right.$$

C4. Le système de commande réalise une poursuite admissible (resp. une précision maximale) si l'erreur de poursuite en sortie (resp. l'erreur de poursuite) est aussi petite que possible, i.e.

$$\mathcal{PA} \left\{ \begin{array}{l} \{e_y(t)\} \in \mathcal{SAZI} \\ \updownarrow \\ \lim_{t \rightarrow \infty} e_y(t) = 0 \text{ lorsque } \eta(t) = 0 \text{ pour tout } t \end{array} \right.$$

$$\left(\text{resp. } \mathcal{PM} \left\{ \begin{array}{l} \{e_\sigma(t)\} \in \mathcal{SAZI} \\ \updownarrow \\ \lim_{t \rightarrow \infty} e_\sigma(t) = 0 \text{ lorsque } \eta(t) = 0 \text{ pour tout } t \end{array} \right. \right)$$

C5. Le système de commande réalise, si besoin est, une dépollution du signal de commande des composantes indésirables en sortie

$$\mathcal{DSEC} \left\{ \lim_{t \rightarrow \infty} u_{ind}(t) = 0 \text{ avec } u_{ind}(t) = -\mathcal{RS}(q^{-1})y_{ind}(t) \right.$$

REALISATION DES PERFORMANCES DYNAMIQUES

$$\mathcal{RPD} \left\{ \mathcal{CM}(SAS) \subset \mathcal{D}_{sp} \right.$$

$$\Downarrow$$

$$? \mathcal{R}_r(z^{-1}) = \frac{R_n(z^{-1})}{R_d(z^{-1})} \quad / \quad P_c(z^{-1}) \in \mathcal{D}_{sp}[z^{-1}]$$

SYNTHESE MODALE

$$? \mathcal{R}_r(z^{-1}) \quad / \quad P_c(z^{-1}) = M(z^{-1})\bar{M}(z^{-1})$$

$$\Downarrow$$

$$M(z^{-1}) = M_d(z^{-1})M_a(z^{-1})$$

$$\Uparrow$$

$$M_d(z^{-1}) = 1 - e^{-\xi_r \omega_r T_e} \cos \left(\sqrt{1 - \xi_r^2} \omega_r T_e \right) z^{-1} + e^{-2\xi_r \omega_r T_e} z^{-2}$$

$$\Uparrow$$

Mode (ξ_r, ω_r)

INSENSIBILITE AUX BRUITS DE MESURE

$$\begin{cases} y_b(t) = \mathcal{G}_{sb}(q^{-1})\eta(t) = -\mathcal{T}(q^{-1})\eta(t) \\ u_b(t) = \mathcal{G}_{eb}(q^{-1})\eta(t) = -\mathcal{RS}(q^{-1})\eta(t) \end{cases}$$

et

$\mathcal{T}(z^{-1})$ est un filtre passe bas

↕

SAS est IBM ssi $\mathcal{RS}(z^{-1})$ est un filtre passe bas

COMPENSATION DES PERTURBATIONS

$$y_p(t) = \mathcal{G}_{sp}(q^{-1})v(t) \quad \text{et} \quad v(t) = \mathcal{H}(q^{-1})\delta_v(t)$$

↓

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{E(q^{-1})R_d(q^{-1})}{P_c(q^{-1})} v(t) = 0$$

↕

$$D(q^{-1}) \text{ divise } E(q^{-1})R_d(q^{-1})$$

↑

$$R_d(q^{-1}) = S(q^{-1})D_r(q^{-1}) \quad \text{avec} \quad D_r(q^{-1}) \triangleq \frac{D(q^{-1})}{\text{pgcd}(E(q^{-1}), D(q^{-1}))}$$

POURSUITE PARFAITE

$$y_r(t) = \mathcal{G}_{sr}(q^{-1})y^*(t) = y^*(t) \quad \forall t$$

$$\Downarrow$$

$$\mathcal{G}_{sr}(q^{-1}) = \frac{B(z^{-1})R_p(z^{-1})}{P_c(z^{-1})} = 1 \quad \forall z \in \mathcal{C}$$

$$\Downarrow$$

$$A(z^{-1})R_d(z^{-1}) + B(z^{-1})R_n(z^{-1}) = B(z^{-1})R_p(z^{-1}) \quad \forall z \in \mathcal{C}$$

$$\spadesuit$$

$$\mathcal{CZ}(\mathcal{G}(z^{-1})) \subset \mathcal{D}_{sp} \subset \mathcal{D}_{sa}$$

POURSUITE SEMI PARFAITE

$$y_r(t) = \mathcal{G}_{sr}(q^{-1})y^*(t) = \beta B(q^{-1})y^*(t)$$

$$\Downarrow$$

$$\mathcal{T}_{rs}(z^{-1}) = \beta B(z^{-1}) \quad \text{avec} \quad \beta = \frac{1}{B(1)}$$

$$\Downarrow$$

$$R_p(z^{-1}) = \beta P_c(z^{-1})$$

$$\spadesuit$$

$$1 \notin \mathcal{CZ}(\mathcal{S}\mathcal{Y}\mathcal{S})$$

PRECISION MAXIMALE

$$e_\sigma(t) = e_c(t) + e_p(t) + e_b(t)$$

avec

$$e_c(t) = \mathcal{G}_{ec}(q^{-1})y^*(t)$$

$$e_p(t) = -\mathcal{G}_{sp}(q^{-1})v(t) \quad \text{et} \quad e_b(t) = -\mathcal{G}_{sb}(q^{-1})\eta(t)$$

↕

SAS réalise une *PM* ssi $\{e_\sigma(t)\} \in \mathcal{SAZI}$

↕

SAS réalise une *PM* ssi $\lim_{t \rightarrow \infty} e_c(t) = 0$ et $\lim_{t \rightarrow \infty} e_p(t) = 0$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} e_p(t) = 0 \quad \text{ssi} \quad D(q^{-1}) \text{ divise } E(q^{-1})R_d(q^{-1})$$

↓

$$R_p(q^{-1}) = q^{-d-1}R_n(q^{-1}) \quad \text{et} \quad D^*(q^{-1})u^*(t) = C^*(q^{-1})\delta^*(t)$$

↓

$$\lim_{t \rightarrow \infty} e_c(t) = 0 \quad \text{ssi} \quad D^*(q^{-1}) \text{ divise } A(q^{-1})R_d(q^{-1})$$

SAS réalise une *PM* ssi $R_d(q^{-1}) = S(q^{-1})D_r(q^{-1})$

↑

$$D_r(q^{-1}) = \text{ppcm} \left(\frac{D(q^{-1})}{\text{pgcd}(D(q^{-1}), E(q^{-1}))}, \frac{D^*(q^{-1})}{\text{pgcd}(D^*(q^{-1}), A(q^{-1}))} \right)$$

DEPOLLUTION DU SIGNAL D'ENTREE

$$y_m(t) = y_a(t) + y_{ind}(t) \text{ avec } D_{ind}(q^{-1})y_{ind}(t) = C_{ind}(q^{-1})\delta_{ind}(t)$$

↓

$$u_{ind}(t) = \mathcal{G}_{ep}(q^{-1})y_{ind}(t) \text{ avec } \mathcal{G}_{ep}(q^{-1}) = -\frac{A(q^{-1})R_n(q^{-1})}{P_c(q^{-1})}$$

↓

$$\text{SAS réalise une } \mathcal{DSE} / \{y_{ind}(t)\} \text{ ssi } \lim_{t \rightarrow \infty} u_{ind}(t) = 0$$

↓

$$\lim_{t \rightarrow \infty} u_{ind}(t) = 0 \text{ ssi } D_{ind}(q^{-1}) \text{ divise } A(q^{-1})R_n(q^{-1})$$

↑

$$R_n(q^{-1}) = R(q^{-1})D_c(q^{-1}) \text{ puisque } \text{pgcd}(D_{ind}(q^{-1}), A(q^{-1})) = 1$$

STRUCTURE USUELLE DU REULATEUR

$$\mathcal{R}_r(z^{-1}) \triangleq \frac{R_n(z^{-1})}{R_d(z^{-1})} = \frac{R(z^{-1})}{S(z^{-1})} \frac{D_c(z^{-1})}{D_r(z^{-1})}$$

et

$$R_p(z^{-1}) \triangleq T(z^{-1})$$

↓

$$S(q^{-1})D_r(q^{-1})u(t) + R(q^{-1})D_c(q^{-1})y_m(t) = T(q^{-1})y^*(t+d+1)$$

$$A^*(q^{-1})y^*(t+d+1) = B^*(q^{-1})u^*(t)$$

$$D^*(q^{-1})u^*(t) = C^*(q^{-1})\delta^*(t)$$

REMARQUE

$$P_c(z^{-1}) = A(z^{-1})D_r(z^{-1})S(z^{-1}) + z^{-d-1}B(z^{-1})D_c(z^{-1})R(z^{-1})$$

$$\uparrow$$

$$P_c(z^{-1}) \in \mathcal{R}_{sp}[z^{-1}]$$

$$\downarrow$$

$$\text{pgcd}(D_r(q^{-1}), B(q^{-1})) = \text{pgcd}(D_c(q^{-1}), A(q^{-1})) = 1$$

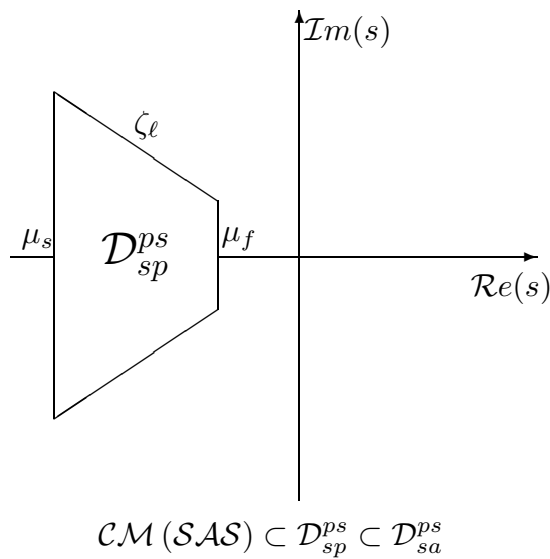
ASPECTS DE SYNTHÈSE

- Le cahier des charges
- Le domaine de stabilité et des performances et la période d'échantillonnage
- La classe des systèmes
- La structure du régulateur
- Synthèse du système de commande
- Mise en oeuvre du régulateur

LE CAHIER DES CHARGES

- $\mathcal{S}1$. Une poursuite admissible caractérisée par un mode d'amortissement ζ_p et de pulsation propre ω_p .
- $\mathcal{S}2$. Une compensation parfaite des perturbations (resp. une précision maximale pour une séquence de points de consigne spécifique) avec une dynamique de régulation caractérisée par un mode dominant d'amortissement ζ_r et de pulsation propre ω_r .
- $\mathcal{S}3$. Une insensibilité aux bruits de mesure inévitables.
- $\mathcal{S}4$. Un blocage en entrée du système des composantes indésirables dans la sortie du système ou un affinement des performances nominales et de robustesse en stabilité.

DOMAINE DE STABILITE ET DE PERFORMANCES



Mode dominant $(\omega_r, \zeta_r) \longrightarrow \omega_{max} \approx \omega_r \gg \omega_p$

↓

$$M_d(z^{-1}) = 1 - e^{-\zeta_r \omega_r T_e} \cos\left(\sqrt{1 - \zeta_r^2} \omega_r T_e\right) z^{-1} + e^{-2\zeta_r \omega_r T_e} z^{-2}$$

↓

$$\mathcal{D}_{sp}^{ps} = \left\{ \text{modes}(\omega, \zeta) / \zeta \geq \zeta_r \quad \text{et} \quad \zeta \omega \gg \zeta_r \omega_r \right\}$$

↓

$$\omega_r T_e < \pi \longrightarrow \omega_r T_e \in \left[\frac{\pi}{10}, \frac{\pi}{4} \right]$$

CLASSE DES SYSTEMES

$$A(q^{-1})y(t) = B(q^{-1})u(t-d-1) + \sum_{i=1}^m E_i(q^{-1})v_i(t)$$

$$D_i(q^{-1})v_i(t) = C_i(q^{-1})\delta_i(t) \text{ avec } \delta_i(t) = v_i\delta(t) \text{ pour } i \in [1, m]$$

$$D_{ind}(q^{-1})y_{ind}(t) = C_{ind}(q^{-1})\delta_{ind}(t) \text{ avec } \delta_{ind}(t) = v_{ind}\delta(t)$$

CLASSE DES REGULATEURS

$$S(q^{-1})D_r(q^{-1})u(t) + R(q^{-1})D_c(q^{-1})y_m(t) = T(q^{-1})y^*(t+d+1)$$

$$A^*(q^{-1})y^*(t+d+1) = B^*(q^{-1})u^*(t)$$

$$D^*(q^{-1})u^*(t) = C^*(q^{-1})\delta^*(t)$$

POLES FIXES DU REGULATEUR

$$D_r(q^{-1}) = \begin{cases} D_{rp}(q^{-1}) & \text{si } \mathcal{PA} \\ \text{ppcm}(D_{rp}(q^{-1}), D_{rc}(q^{-1})) & \text{si } \mathcal{PM} \end{cases}$$

↓

$$D_{rp}(q^{-1}) = \text{ppcm}(D_{r1}(q^{-1}), \dots, D_{rm}(q^{-1}))$$

avec

$$D_{ri}(q^{-1}) = \frac{D_i(q^{-1})}{\text{pgcd}(D_i(q^{-1}), E_i(q^{-1}))}$$

$$D_{rc}(q^{-1}) = \frac{D^*(q^{-1})}{\text{pgcd}(D^*(q^{-1}), A(q^{-1}))}$$

ZEROS FIXES DU REGULATEUR

$$D_c(q^{-1}) = \begin{cases} D_{ind}(q^{-1}) & \text{si } \mathcal{DSE} \\ D_{apa}(q^{-1}) & \text{autrement} \end{cases}$$

↑

$$D_{apa}(q^{-1}) = 1 + q^{-1} \text{ est un choix judicieux}$$

SYNTHESE MODALE

$$? (R(z^{-1}), R(z^{-1})) /$$

$$A(z^{-1})D_r(z^{-1})S(z^{-1}) + z^{-d-1}B(z^{-1})D_c(z^{-1})R(z^{-1})$$

$$=$$

$$M(q^{-1}) = M_d(z^{-1})M_a(z^{-1})\bar{M}(z^{-1})$$

$$\downarrow$$

$$\bar{M}(q^{-1}) = \begin{cases} B(q^{-1}) & \text{si } \mathcal{PP} \\ 1 & \end{cases}$$

$$M_d(z^{-1}) = 1 - e^{-\zeta_r \omega_r T_e} \cos\left(\sqrt{1 - \zeta_r^2} \omega_r T_e\right) z^{-1} + e^{-2\zeta_r \omega_r T_e} z^{-2}$$

$$\longrightarrow \text{Mode } (\omega_r, \zeta_r)$$
RESULTAT FUNDAMENTAL

Soient $\bar{A}(z^{-1})$ et $\bar{B}(z^{-1})$ deux polynômes de degrés respectifs $n_{\bar{a}}$ et $n_{\bar{b}}$ et $\bar{C}(z^{-1})$ un polynôme arbitraire de degré $n_{\bar{c}}$ tels que

$$C1. \quad \text{pgcd}(\bar{A}(z^{-1}), \bar{B}(z^{-1})) = 1$$

$$C2. \quad n_{\bar{c}} \leq n_{\bar{a}} + n_{\bar{b}} - 1$$

Alors, l'équation polynomiale

$$\mathcal{EQP} \left\{ \bar{A}(z^{-1})X(z^{-1}) + \bar{B}(z^{-1})Y(z^{-1}) = \bar{C}(z^{-1}) \right.$$

admet une solution unique pourvu que les degrés des polynômes $X(z^{-1})$ et $Y(z^{-1})$ soient spécifiés comme suit

$$n_x = n_{\bar{b}} - 1 \quad \text{et} \quad n_y = n_{\bar{a}} - 1$$

La solution unique de l'équation polynomiale \mathcal{EQP} n'est autre que celle du système d'équations linéaires sous-jacent, soit

$$\mathcal{A} \mathcal{X} = \mathcal{B}$$

avec

$$\mathcal{A} = \begin{bmatrix} \bar{a}_o & 0 & 0 & \bar{b}_o & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & 0 & \vdots & \ddots & 0 \\ \vdots & & \bar{a}_o & \vdots & & \bar{b}_o \\ \bar{a}_{n\bar{a}} & & \vdots & \bar{b}_{n\bar{b}} & & 0 \\ 0 & \ddots & \vdots & 0 & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \bar{a}_{n\bar{a}} & 0 & 0 & \bar{b}_{n\bar{b}} \end{bmatrix}$$

$$\mathcal{X} = \begin{bmatrix} x_o \\ \vdots \\ x_{n\bar{b}-1} \\ y_o \\ \vdots \\ y_{n\bar{a}-1} \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad \mathcal{B} = \begin{bmatrix} \bar{c}_o \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \bar{c}_{n\bar{a}+n\bar{b}-1} \end{bmatrix}$$

↑

\mathcal{A} est la matrice de Sylvester associée à $(\bar{A}(z^{-1}), \bar{B}(z^{-1}))$

$\bar{c}_i = 0$ pour tout $i \geq n\bar{c}$

REMARQUES

- R1.** Une équation polynomiale admet une infinité de solutions si aucune contrainte n'est imposée sur la structure de la solution recherchée. En effet si $(X(z^{-1}), Y(z^{-1}))$ est une solution, alors $(X(z^{-1}) + \bar{B}(z^{-1})W(z^{-1}), Y(z^{-1}) - \bar{A}(z^{-1})W(z^{-1}))$ est une solution pour tout polynôme arbitraire $W(z^{-1})$.
- R2.** La matrice de Sylvester associée aux polynômes $\bar{A}(z^{-1})$ et $\bar{B}(z^{-1})$ est inversible si et seulement si ces polynômes sont premiers entre eux.

POLYNOME $T(q^{-1})$

$$T(q^{-1}) = \begin{cases} M_d(q^{-1})M_a(q^{-1}) & \text{si } \mathcal{PP} \\ \beta M(q^{-1}) & \text{si } \mathcal{PSP} \\ q^{-d-1}R(q^{-1})D_c(q^{-1}) & \text{si } \mathcal{PM} \end{cases}$$

GENERATEUR DE LA SEQUENCE DE REFERENCE

$$\mathcal{G}^*(z^{-1}) = \frac{z^{-d-1} \left(1 - e^{-\zeta_p \omega_p T_e} \cos \left(\sqrt{(1 - \zeta_p^2)} \omega_p T_e \right) + e^{-2\zeta_p \omega_p T_e} \right)}{1 - e^{-\zeta_p \omega_p T_e} \cos \left(\sqrt{(1 - \zeta_p^2)} \omega_p T_e \right) z^{-1} + e^{-2\zeta_p \omega_p T_e} z^{-2}}$$

→ **Mode (ω_p, ζ_p)**

POURSUITE PARFAITE

- La propriété fondamentale

$$y_r(t) = y^*(t) \text{ pour tout } t$$

$$\Downarrow$$

$$\mathcal{G}_{sr}(z^{-1}) = \frac{B(z^{-1})R_p(z^{-1})}{P_c(z^{-1})} = 1 \quad \forall z \in \mathcal{C}$$

$$\Downarrow$$

$$\bar{M}(z^{-1}) = B(z^{-1})$$

- La condition requise

$$\mathcal{CZ}(\mathcal{SYS}) \subset \mathcal{D}_{sp}$$

- La structure du régulateur

$$D_r(q^{-1})S(q^{-1})u(t) + D_c(q^{-1})R(q^{-1})y_m(t) = T(q^{-1})y^*(t + d + 1)$$

$$y_m(t) = y(t) + \eta(t)$$

$$A^*(q^{-1})y^*(t + d + 1) = B^*(q^{-1})u^*(t)$$

$$\Downarrow$$

$$D_r(z^{-1}) = D_{rp}(z^{-1})$$

$$D_c(z^{-1}) = \begin{cases} D_{ind}(z^{-1}) & \text{si } \mathcal{DSE} \\ D_{apa}(z^{-1}) & \text{autrement} \end{cases}$$

- Le calcul du régulateur

$$T(z^{-1}) = M(z^{-1})$$

$$S(z^{-1}) = B(z^{-1})G(z^{-1})$$

$$A(z^{-1})D_r(z^{-1})G(z^{-1}) + z^{-d-1}D_c(z^{-1})R(z^{-1}) = M(z^{-1})$$

↑

$$M(z^{-1}) = M_d(z^{-1})M_a(z^{-1})$$

↑

$$nm \leq na + nd_r + nd_c + d$$

$$ng = nd_c + d$$

$$nr = na + nd_r - 1$$

POURSUITE SEMI PARFAITE

- La propriété fondamentale

$$y_r(t) = \beta B(q^{-1})y^*(t) \quad \text{avec} \quad \beta = \frac{1}{B(1)}$$

⇕

$$\mathcal{G}_{sr}(z^{-1}) = \beta z^{-d-1} B(z^{-1})$$

- La condition requise

$$1 \notin \mathcal{CZ}(\mathcal{SYS}) \iff B(1) \neq 0$$

- La structure du régulateur

$$D_r(q^{-1})S(q^{-1})u(t) + D_c(q^{-1})R(q^{-1})y_m(t) = T(q^{-1})y^*(t + d + 1)$$

$$y_m(t) = y(t) + \eta(t)$$

$$A^*(q^{-1})y^*(t + d + 1) = B^*(q^{-1})u^*(t)$$

↓

$$D_r(z^{-1}) = D_{rp}(z^{-1})$$

$$D_c(z^{-1}) = \begin{cases} D_{ind}(z^{-1}) & \text{si } \mathcal{DS}\mathcal{E} \\ D_{apa}(z^{-1}) & \text{autrement} \end{cases}$$

- Le calcul du régulateur

$$T(z^{-1}) = \beta M(z^{-1})$$

$$A(z^{-1})D_r(z^{-1})S(z^{-1}) + z^{-d-1}B(z^{-1})D_c(z^{-1})R(z^{-1}) = M(z^{-1})$$

↑

$$M(z^{-1}) = M_d(z^{-1})M_a(z^{-1})$$

↑

$$nm \leq na + nb + nd_r + nd_c + d$$

$$ns = nb + nd_c + d$$

$$nr = na + nd_r - 1$$

PRECISION MAXIMALE

- La propriété fondamentale

$$\{e_\sigma(t)\} \in \mathcal{SAZI}$$

$$\uparrow$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} e_c(t) = 0$$

$$\downarrow$$

$$D^*(q^{-1})u^*(t) = C^*(q^{-1})\delta^*(t) \text{ avec } \delta^*(t) = u^*\delta(t)$$

et

$$\lim_{t \rightarrow \infty} e_p(t) = 0$$

- La structure du régulateur

$$D_r(q^{-1})S(q^{-1})u(t) = D_c(q^{-1})R(q^{-1})(y^*(t) - y_m(t))$$

$$y_m(t) = y(t) + \eta(t)$$

$$A^*(q^{-1})y^*(t+d+1) = B^*(q^{-1})u^*(t)$$

$$D^*(q^{-1})u^*(t) = C^*(q^{-1})\delta^*(t)$$

$$\downarrow$$

$$D_r(z^{-1}) = \text{ppcm}(D_{rp}(z^{-1}), D_{rc}(z^{-1}))$$

$$D_c(z^{-1}) = \begin{cases} D_{ind}(z^{-1}) & \text{si } \mathcal{DS}\mathcal{E} \\ D_{apa}(z^{-1}) & \text{autrement} \end{cases}$$

- Le calcul du régulateur

$$T(z^{-1}) = z^{-d-1}D_c(z^{-1})R(z^{-1})$$

$$A(z^{-1})D_r(z^{-1})S(z^{-1}) + z^{-d-1}B(z^{-1})D_c(z^{-1})R(z^{-1}) = M(z^{-1})$$

↑

$$M(z^{-1}) = M_d(z^{-1})M_a(z^{-1})$$

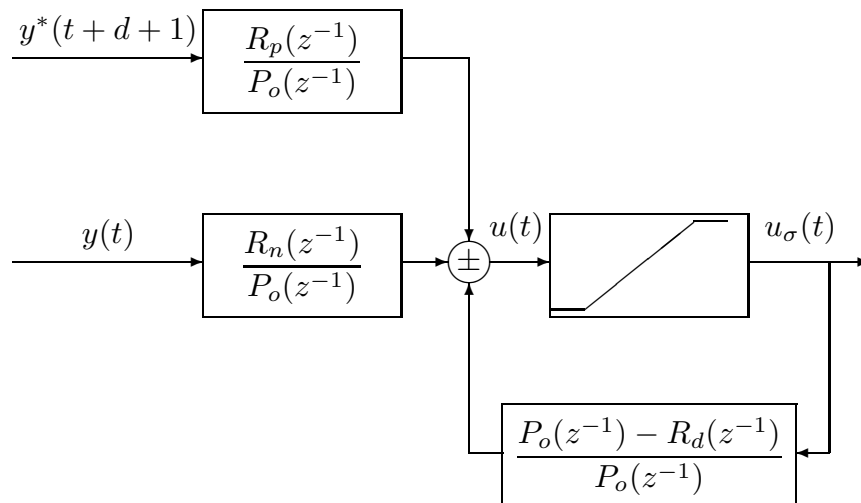
↑

$$nm \leq na + nb + nd_r + nd_c + d$$

$$ns = nb + nd_c + d$$

$$nr = na + nd_r - 1$$

MISE EN OEUVRE DU REGULATERUR



$$P_o(q^{-1}) \in \mathcal{R}_{sp}[q^{-1}] \text{ avec } \uparrow np_o = nr_d \text{ et } p_{oo} = r_{do}$$

$$u(t) - u(t) + \frac{R_d(q^{-1})}{P_o(q^{-1})} u(t) + \frac{R_n(q^{-1})}{P_o(q^{-1})} y_m(t) = \frac{R_p(q^{-1})}{P_o(q^{-1})} y^*(t+d+1)$$

$$\Downarrow$$

$$u(t) = \frac{P_o(q^{-1}) - R_d(q^{-1})}{P_o(q^{-1})} u(t) - \frac{R_n(q^{-1})}{P_o(q^{-1})} y_m(t) + \frac{R_p(q^{-1})}{P_o(q^{-1})} y^*(t+d+1)$$

comme $P_o(q^{-1}) \in \mathcal{R}_{sp}[q^{-1}]$ et $np_o = nr_d$ et $p_{oo} = r_{do}$, toutes les composantes du régulateur sont stables et la composante relative à l'entrée, soit la fonction de transfert

$$\frac{R_d(q^{-1}) - P_o(q^{-1})}{P_o(q^{-1})}$$

exhibe un retard pur d'une période d'échantillonnage; et donc sa sortie ne dépend que du passé de la commande.

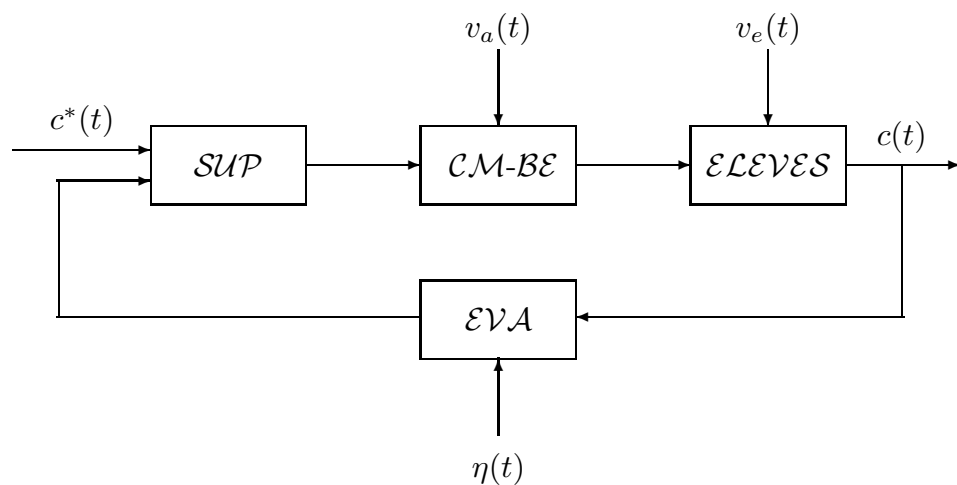
CONCLUSION

- ♠ Asservissement standard
- ♠ Une démarche méthodologique et rationnelle
- ♠ Système
- ♠ Régulateur
- ♠ Système de commande
- ♠ Analyse systémique
- ♠ Spécifications élémentaires
- ♠ Performances essentielles
- ♠ Structure usuelle du régulateur

UNE APPROCHE SYSTEME

DANS

UN CONTEXTE POLYNOMIAL



LA RETROACTION EST AU COEUR DE LA PEDAGOGIE