ASSERVISSEMENTS LINAIRES

UNE APPROCHE POLYNOMIALE

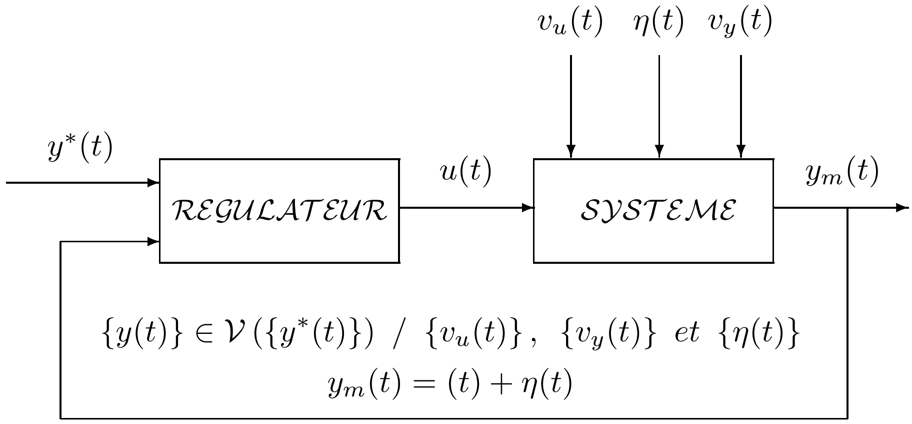
Mohammed M'SAAD

ENSICAEN, 6 Boulevard Maréchal Juin, 14050 Caen Cedex, France

AU MENU

- ♠ Motivations
- ♠ Admissibilité physique
- ♠ Stabilité nominale
- ♠ Performances nominales
- ♠ Stabilité robuste
- ♠ Conclusion

MOTIVATIONS



$$\{y(t)\} \in \mathcal{V}\left(\{y^*(t)\}\right) \ / \ \{v_u(t)\}, \ \{v_y(t)\} \ et \ \{\eta(t)\}$$
$$y_m(t) = (t) + \eta(t)$$

UNE ANALYSE PRAGMATIQUE

STABILISATION

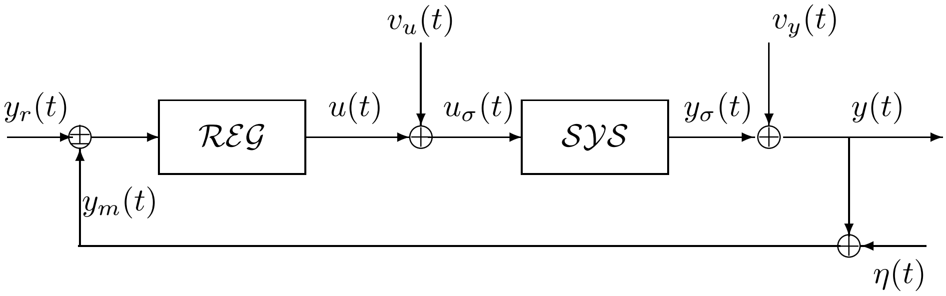
INSENSIBILITE AUX BRUITS DE MESURE

REJET DES PERTURBATIONS

POURSUITE ADMISSIBLE

ROBUSTESSE

ADMISSIBILITE PHYSIQUE



$$\mathcal{SYS} \leftrightharpoons \mathcal{G}(s) \quad et \quad \mathcal{REG} \leftrightharpoons \mathcal{R}(s) \quad et \quad \mathcal{E}(s) \stackrel{\Delta}{=} \mathcal{L}\left\{\eta(t)\right\}$$

$$\downarrow$$

$$\left(I_p + \mathcal{G}(s)\mathcal{R}(s)\right) Y(s) = \mathcal{G}(s)\mathcal{R}(s)\ \left(Y_r(s) - \mathcal{E}(s)\right) + \mathcal{G}(s)V_u(s) + V_y(s)$$

$$\left(I_m + \mathcal{R}(s)\mathcal{G}(s)\right) U_\sigma(s) = \mathcal{R}(s)\ \left(Y_r(s) - V_y(s) - \mathcal{E}(s)\right) + V_u(s)$$

CRITERE D'ADMISSIBILITE PHYSIQUE

Le système à rétroaction considéré est physiquement admissible si et seulement si la propriété suivante est vraie

$$\lim_{s \longrightarrow \infty} I_m + \mathcal{R}(s)\mathcal{G}(s)\ \ (resp.\ I_p + \mathcal{G}(s)\mathcal{R}(s))\ est\ inversible$$

$$\downarrow$$

$$\mathcal{G}(s) = \left(\begin{array}{c|c} F_g & G_g \\ \hline H_g & E_g \end{array}\right) \quad et \quad \mathcal{R}(s) = \left(\begin{array}{c|c} F_r & G_r \\ \hline H_r & E_r \end{array}\right)$$

$$\downarrow$$

$$\mathcal{SAS}\ \ est\ \ physiquement\ \ admissible$$

$$ssi\ I_m + E_gE_r\,(resp.\ I_p + E_rE_g)\ \ est\ \ inversible$$

PERFORMANCES NOMINALES

Supposons que la condition d'admissibilité physique est satisfaite, alors les équations du système asservi standard peuvent se mettre sous la forme

$$
\begin{aligned}
Y(s) \;=\; & (I_p + \mathcal{G}(s)\mathcal{R}(s))^{-1}\, \mathcal{G}(s)\mathcal{R}(s)\ \ (Y_r(s) - \mathcal{E}(s)) \\
& + (I_p + \mathcal{G}(s)\mathcal{R}(s))^{-1}\, \mathcal{G}(s)V_u(s) + (I_p + \mathcal{G}(s)\mathcal{R}(s))^{-1}\, V_y(s)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
U_\sigma(s) \;=\; & (I_m + \mathcal{R}(s)\mathcal{G}(s))^{-1}\, \mathcal{R}(s)\ \ (Y_r(s) - V_y(s) - \mathcal{E}(s)) \\
& + (I_m + \mathcal{R}(s)\mathcal{G}(s))^{-1}\, V_u(s)
\end{aligned}
$$

$$\uparrow$$

$$I_p + \mathcal{G}(s)\mathcal{R}(s) \ \textit{est inversible} \iff I_m + \mathcal{R}(s)\mathcal{G}(s) \ \textit{est inversible}$$

PATRIMOINE D'UN ASSERVISSEMENT

- Les fonctions de transfert en boucle ouverte en entrée et sortie

$$\mathcal{G}_{oe}(s) = \mathcal{R}(s)\ \mathcal{G}(s) \ \ \textit{et} \ \ \mathcal{G}_{os}(s) = \mathcal{G}(s)\mathcal{R}(s)$$

- Les fonctions de différence de retour en entrée et en sortie

$$\mathcal{D}_{re}(s) = I_m + \mathcal{G}_{oe}(s) \ \ \textit{et} \ \ \mathcal{D}_{rs}(s) = I_p + \mathcal{G}_{os}(s)$$

- Les fonctions de sensibilité en entrée et en sortie

$$\mathcal{S}_e(s) = (I_m + \mathcal{G}_{oe}(s))^{-1} \quad \textit{et} \quad \mathcal{S}_s(s) = (I_p + \mathcal{G}_{os}(s))^{-1}$$

- Les fonctions de sensibilité complémentaire en entrée et en sortie

$$\mathcal{T}_e(s) = (I_m + \mathcal{G}_{oe}(s))^{-1}\, \mathcal{G}_{oe}(s) \ \ \textit{et} \ \ \mathcal{T}_s(s) = (I_p + \mathcal{G}_{os}(s))^{-1}\, \mathcal{G}_{os}(s)$$

FONCTIONS DE SENSIBILITE USUELLES

$$\mathcal{S}_s(s) = (I_p + \mathcal{G}(s)\mathcal{R}(s))^{-1}$$

$$\mathcal{T}_s(s) = (I_p + \mathcal{G}(s)\mathcal{R}(s))^{-1}\,\mathcal{G}(s)\mathcal{R}(s) = \mathcal{G}(s)\mathcal{R}(s)\,(I_p + \mathcal{G}(s)\mathcal{R}(s))^{-1}$$

$$\downarrow$$

$$\mathcal{S}_s(s) + \mathcal{T}_s(s) = I_p \quad \textit{pour tout } s \in \mathbb{C}$$

$$\lim_{s\to\infty} \mathcal{S}_s(s) = 1 \quad \textit{et} \quad \lim_{s\to\infty} \mathcal{T}_s(s) = 0$$

$$\mathcal{S}_s\mathcal{G}(s) \triangleq \mathcal{S}_s(s)\mathcal{G}(s) = \mathcal{G}(s)\mathcal{S}_e(s) \triangleq \mathcal{G}\mathcal{S}_e(s)$$

$$\mathcal{S}_e(s) = (I_m + \mathcal{R}(s)\mathcal{G}(s))^{-1}$$

$$\mathcal{T}_e(s) = (I_m + \mathcal{R}(s)\mathcal{G}(s))^{-1}\,\mathcal{R}(s)\mathcal{G}(s) = \mathcal{R}(s)\mathcal{G}(s)\,(I_m + \mathcal{R}(s)\mathcal{G}(s))^{-1}$$

$$\downarrow$$

$$\mathcal{S}_e(s) + \mathcal{T}_e(s) = I_m \quad \textit{pour tout } s \in \mathbb{C}$$

$$\lim_{s\to\infty} \mathcal{S}_e(s) = 1 \quad \textit{et} \quad \lim_{s\to\infty} \mathcal{T}_e(s) = 0$$

$$\mathcal{S}_e\mathcal{R}(s) \triangleq \mathcal{S}_e(s)\mathcal{R}(s) = \mathcal{R}(s)\mathcal{S}_s(s) \triangleq \mathcal{R}\mathcal{S}_s(s)$$

FONCTION DE TRANSFERT

$$Y_{sas}(s) = \mathcal{G}_{sas}(s) U_{sas}(s)$$

$$\downarrow$$

$$\mathcal{G}_{sas}(s) = [\mathcal{G}_{ij}(s)] \quad avec \;\; i \in [s, e] \; et \; j \in [r, pe, ps, b]$$

$$\uparrow$$

$$\mathcal{G}_{sas}(s) = \begin{bmatrix} \mathcal{G}_{sr}(s) & \mathcal{G}_{spe}(s) & \mathcal{G}_{sps}(s) & \mathcal{G}_{sb}(s) \\ \mathcal{G}_{er}(s) & \mathcal{G}_{epe}(s) & \mathcal{G}_{eps}(s) & \mathcal{G}_{sb}(s) \end{bmatrix}$$

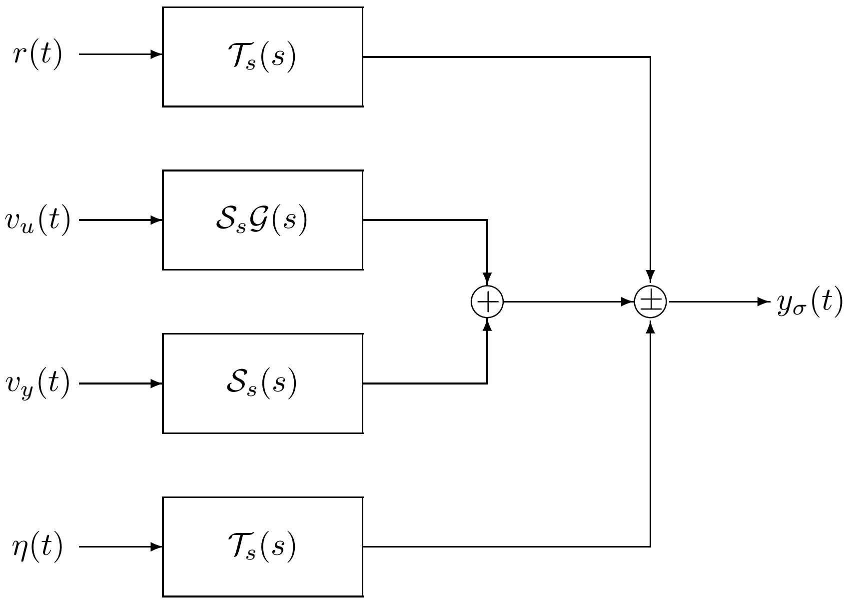
$$\mathcal{G}_{sas}(s)$$

$$=$$

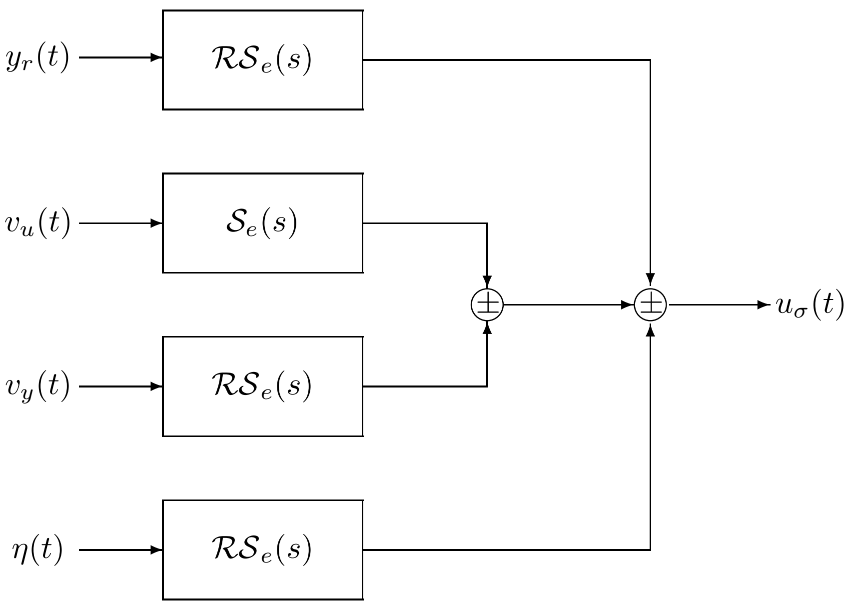
$$\mathcal{G}_{sas}(s) = \begin{bmatrix} \mathcal{G}_{sr}(s) & \mathcal{G}_{spe}(s) & \mathcal{G}_{sps}(s) & \mathcal{G}_{sb}(s) \\ \mathcal{G}_{er}(s) & \mathcal{G}_{epe}(s) & \mathcal{G}_{eps}(s) & \mathcal{G}_{sb}(s) \end{bmatrix}$$

$$=$$

$$\mathcal{G}_{sas}(s) = \begin{bmatrix} \mathcal{T}_s(s) & \mathcal{S}\mathcal{G}_s(s) & \mathcal{S}_s(s) & -\mathcal{T}_s(s) \\ \mathcal{R}\mathcal{S}_e(s) & \mathcal{S}_e(s) & -\mathcal{R}\mathcal{S}_e(s) & -\mathcal{R}\mathcal{S}_e(s) \end{bmatrix}$$



PERFORMANCES NOMINALES EN SORTIE



PERFORMANCES NOMINALES EN ENTREE

RECOMMANDATIONS ESSENTIELLES

$\mathcal{R}1$. Une bonne réduction des effets des perturbations en sortie (resp. en entrée) sur la sortie du système requiert que la fonction de sensibilité usuelle $\mathcal{S}_s(s)$ (*resp.* $\mathcal{GS}_e(s)$) soit relativement petite.

$\mathcal{R}2$. Une bonne réduction des effets des perturbations en sortie (resp. en entrée) sur l'entrée du système requiert que la fonction de sensibilité usuelle $\mathcal{S}_e(s)$ (*resp.* $\mathcal{RS}_s(s)$) soit relativement petite.

$\mathcal{R}3$. Une bonne réduction des effets des bruits de mesure sur la sortie (resp. l'entrée) du système requiert que la fonction de sensibilité usuelle $\mathcal{T}_s(s)$ (*resp.* $\mathcal{RS}_s(s)$) soit relativement petite.

RESULTATS FONDAMENTAUX

Trois résultats qui constituent l'essence d'une meilleure perception des performances d'un système de commande compte tenu de la composition des spectres des perturbations et des bruits de mesure

Les fonctions de sensibilité et de sensibilité complémentaire ne peuvent pas être petites simultanément comme le montrent les propriétés suivantes

$$|\sigma_{max}(\mathcal{S}(s)) - 1| \leq \sigma_{max}(\mathcal{T}(s)) \leq \sigma_{max}(\mathcal{S}(s)) + 1$$

$$|\sigma_{max}(\mathcal{T}(s)) - 1| \leq \sigma_{max}(\mathcal{S}(s)) \leq \sigma_{max}(\mathcal{T}(s)) + 1$$

$$|\sigma_{max}(\mathcal{S}(s)) - \sigma_{max}(\mathcal{T}(s))| \leq 1$$

Les fonctions de sensibilité et de sensibilité complémentaires d'un système de commande asymptotiquement stable vérifient les propriétés suivantes.

$$\bar{\sigma}\left(\mathcal{S}_s(s)\right) \ll 1 \iff \underline{\sigma}\left(\mathcal{G}_{os}(s)\right) \gg 1$$

$$\bar{\sigma}\left(\mathcal{S}_e(s)\right) \ll 1 \iff \underline{\sigma}\left(\mathcal{G}_{oe}(s)\right) \gg 1$$

et

$$\bar{\sigma}\left(\mathcal{T}_s(s)\right) \ll 1 \iff \bar{\sigma}\left(\mathcal{G}_{os}(s)\right) \ll 1$$

$$\bar{\sigma}\left(\mathcal{T}_e(s)\right) \ll 1 \iff \bar{\sigma}\left(\mathcal{G}_{oe}(s)\right) \ll 1$$

L'évaluation de sa fonction de transfert d'un système de commande asymptotiquement stable sur l'axe imaginaire vérifie les deux propriétés suivantes.

$\mathcal{P}1$. *Supposons que*

$$\left(\sigma_{max}\left(\mathcal{G}_{os}(j\omega)\right) \gg 1 \text{ et } \sigma_{max}\left(\mathcal{G}_{oe}(j\omega)\right) \gg 1\right) pour \omega \geq \omega_h,$$

alors on a

$$\mathcal{G}_{sas}\left(j\omega\right) \approx \begin{pmatrix} \mathcal{G}_{os}\left(j\omega\right) & \mathcal{G}\left(j\omega\right) & I_m & -\mathcal{G}_{os}\left(j\omega\right) \\ \mathcal{R}\left(j\omega\right) & -\mathcal{G}_{oe}\left(j\omega\right) & -\mathcal{R}\left(j\omega\right) & -\mathcal{R}\left(j\omega\right) \\ \mathcal{R}\left(j\omega\right) & -I_m & -\mathcal{R}\left(j\omega\right) & -\mathcal{R}\left(j\omega\right) \\ I_p & -\mathcal{G}\left(j\omega\right) & -I_p & \mathcal{G}_{os}\left(j\omega\right) \end{pmatrix}$$

$\mathcal{P}2$. *Supposons que*

$$(\sigma_{min}\left(\mathcal{G}_{os}(j\omega)\right) \gg 1 \; et \; \sigma_{min}\left(\mathcal{G}_{oe}(j\omega)\right) \gg 1) \, pour 0 < \omega \leq \omega_b$$

et $\mathcal{G}(s)$ *et* $\mathcal{R}(s)$ *sont inversibles sur l'axe imaginaire, alors on a*

$$\mathcal{G}_{sas}\left(j\omega\right) \approx \begin{pmatrix} I_p & \mathcal{R}^{-1}\left(j\omega\right) & \mathcal{G}_{os}^{-1}\left(j\omega\right) & -I_p \\ \mathcal{G}^{-1}\left(j\omega\right) & -I_m & -\mathcal{G}^{-1}\left(j\omega\right) & -\mathcal{G}^{-1}\left(j\omega\right) \\ \mathcal{G}^{-1}\left(j\omega\right) & -\mathcal{G}_{oe}^{-1}\left(j\omega\right) & -\mathcal{G}^{-1}\left(j\omega\right) & -\mathcal{G}^{-1}\left(j\omega\right) \\ \mathcal{G}_{os}^{-1}\left(j\omega\right) & -\mathcal{R}^{-1}\left(j\omega\right) & -\mathcal{G}_{o}^{-1}\left(j\omega\right) & I_p \end{pmatrix}$$

PERFORMANCES $\leftrightharpoons$ GAINS EN BOUCLE OUVERTE

$\mathcal{P}1$. Un système de commande réalisant une bonne performances sur une zone de fréquences $(0, \ \omega_\ell)$ réalise un rejet des perturbations sur la sortie du système requiert que le gain de la fonction de transfert de la boucle ouverte en sortie soit relativement large sur toute la bande de fréquences où les perturbations que l'on peut ramener en sortie du système sont importantes et que le gain du régulateur soit relativement élevé sur sur toute la bande de fréquences où les perturbations que l'on peut ramener en entrée du système sont importantes, soit

$$\sigma_{min}\left(\mathcal{G}_{os}\left(s\right)\right) \gg 1 \;\; et \;\; \sigma_{min}\left(\mathcal{R}\left(s\right)\right) \gg 1$$

$\mathcal{P}2$. Un système de commande réalisant une bonne performances sur une zone de fréquences $(0,\ \omega_\ell)$ réalise un rejet des perturbations sur l'entrée du système requiert que le gain de la fonction de transfert de la boucle ouverte en entrée soit relativement large sur toute la bande de fréquences où les perturbations que l'on peut ramener en entrée du système sont importantes et que le gain du système soit relativement élevé sur sur toute la bande de fréquences où les perturbations que l'on peut ramener en sortie du système sont importantes, soit

$$\sigma_{min}\left(\mathcal{G}_{oe}\left(s\right)\right) \gg 1 \quad et \quad \sigma_{min}\left(\mathcal{R}\left(s\right)\right) \gg 1$$

$\mathcal{P}3$. Un système de commande est insensible aux bruits de mesures sur une zone de fréquences (ω_h, ∞) requiert que les gains des fonctions de transfert en boucle ouverte soient relativement petits et que le gain du régulateur ait une valeur raisonnable sur toute la bande de fréquences considéré, soit

$$\sigma_{max}\left(\mathcal{G}_{os}\left(s\right)\right) \ll 1, \quad \sigma_{max}\left(\mathcal{G}_{oe}\left(s\right)\right) \ll 1 \quad et \quad \sigma_{max}\left(\mathcal{R}\left(s\right)\right) \leq \gamma$$

$$\uparrow$$

γ n'est pas grand et ω_ℓ et ω_h sont des fréquences spécifiques qui dépendent du problème de commande considéré et des connaissances disponibles sur les perturbations, les bruits de mesure et les erreurs de modélisation.

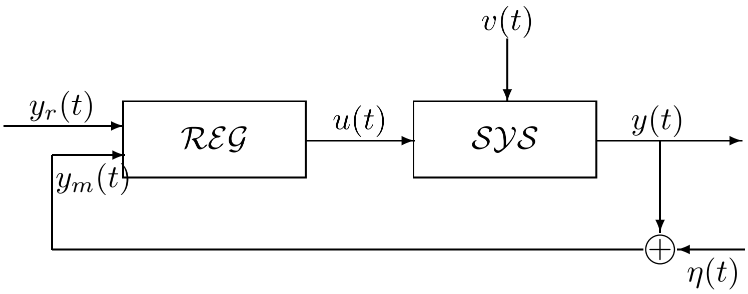
ROBUSTESSE EN STABILITE

↓

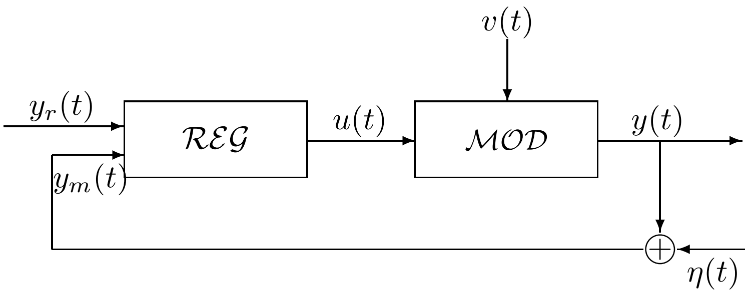
THEOREME DU PETIT GAIN

↑

INCERTITUDES NON STRUCTUREES



SYSTEME DE COMMANDE REEL



SYSTEME DE COMMANDE NOMINAL

ROBUSTESSE

capacité d'un système de commande à préserver sa stabilité en présence des erreurs de modélisation

$$\downarrow$$

$$\mathcal{G}_\sigma(s) = \Big(\mathcal{G}(s)\ ,\ \Delta\mathcal{G}(s)\Big)$$

$$\updownarrow$$

$$\Delta\mathcal{G}(s) = W_g(s)\Delta(s)W_d(s) \quad \textit{avec} \quad \Delta(s) \in \mathcal{RH}_\infty$$

$$\downarrow$$

$(W_g(s),\ W_d(s)) \in \mathcal{RH}_\infty \times \mathcal{RH}_\infty$ *est connue permet d'incorporer une information pertinente sur la dépendance fréquentielle et directionnelle de* $\Delta(s)$

ROBUSTESSE

$$\downarrow$$

$$\mathcal{G}_\sigma(s) = \Big(\mathcal{G}(s)\ ,\ \Delta\mathcal{G}(s)\Big)$$

$$\updownarrow$$

$$\Delta\mathcal{G}(s) = W_g(s)\Delta(s)W_d(s)$$

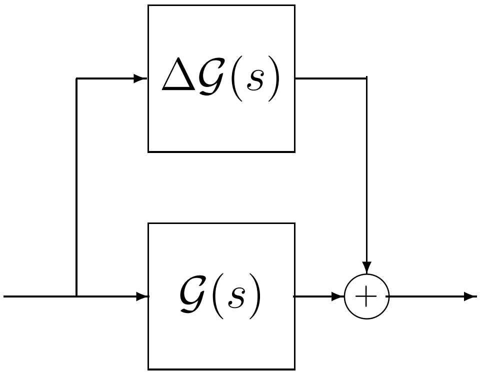
$$\downarrow$$

$$\Delta(s) \in \mathcal{RH}_\infty \quad \textit{avec} \quad \sigma_{max}\left(\Delta(s)\right) < 1$$

$(W_g(s),\ W_d(s)) \in \mathcal{RH}_\infty \times \mathcal{RH}_\infty$ *est connue*

INCERTITUDES NON STRUCTUREES

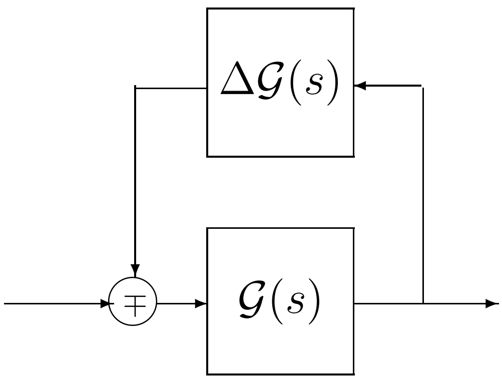
♠ Forme additive directe



$\downarrow$

$$\mathcal{G}_\sigma(s) = \mathcal{G}(s) + \Delta\mathcal{G}(s)$$

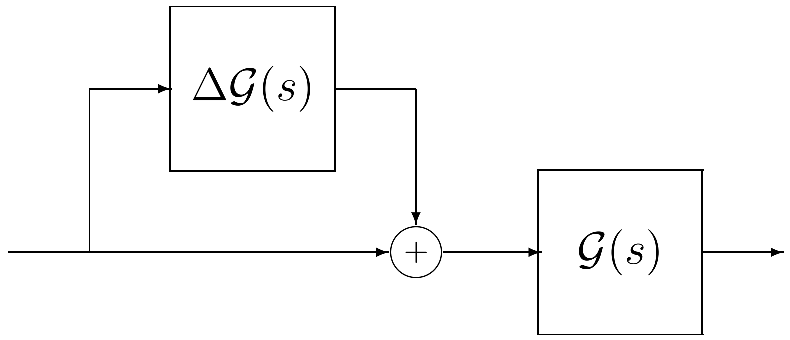
♠ Forme additive inverse



$\downarrow$

$$\mathcal{G}_\sigma(s) = \left(I_p + \mathcal{G}(s)\,\Delta\mathcal{G}(s)\right)^{-1}\mathcal{G}(s) = \mathcal{G}(s)\left(I_m + \Delta\mathcal{G}(s)\,\mathcal{G}(s)\right)^{-1}$$

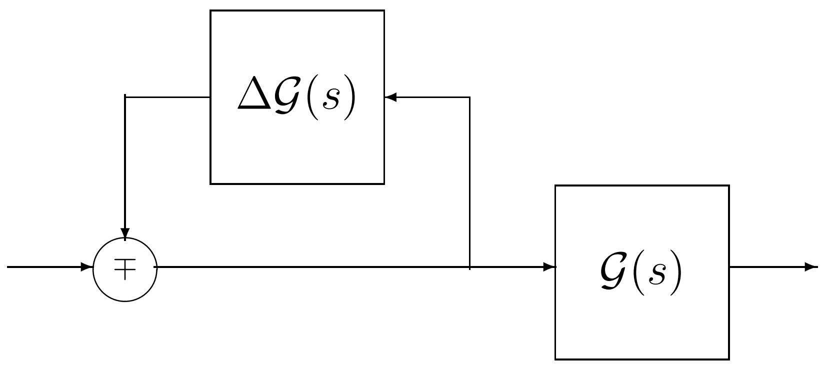
♠ Forme multiplicative directe en entrée



↓

$$\mathcal{G}_\sigma(s) = \mathcal{G}(s)\left(I_m + \Delta\mathcal{G}(s)\right)$$

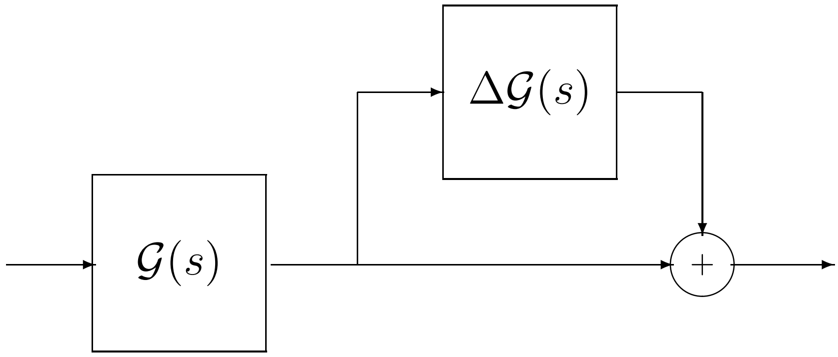
♠ Forme multiplicative inverse en entrée



↓

$$\mathcal{G}_\sigma(s) = \mathcal{G}(s)\left(I_p + \Delta\mathcal{G}(s)\right)^{-1}$$

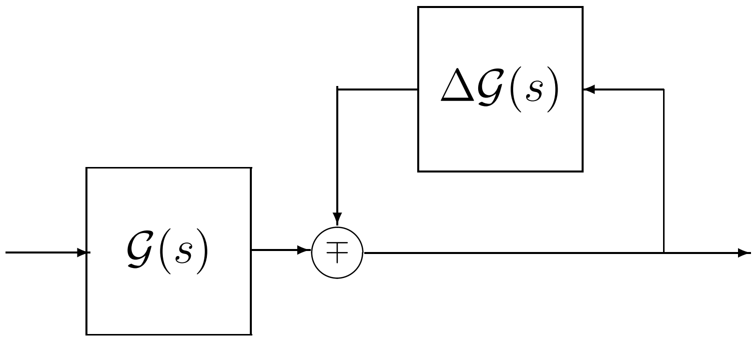
♠ Forme multiplicative directe en sortie



↓

$$\mathcal{G}_\sigma\left(s\right) = \left(I_m + \Delta\mathcal{G}\left(s\right)\right)\mathcal{G}\left(s\right)$$

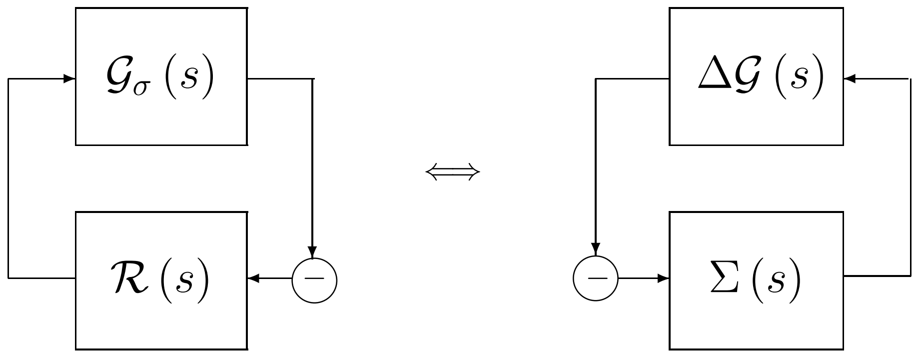
♠ Forme multiplicative inverse en sortie



↓

$$\mathcal{G}_\sigma\left(s\right) = \left(I_m + \Delta\mathcal{G}\left(s\right)\right)^{-1}\mathcal{G}\left(s\right)$$

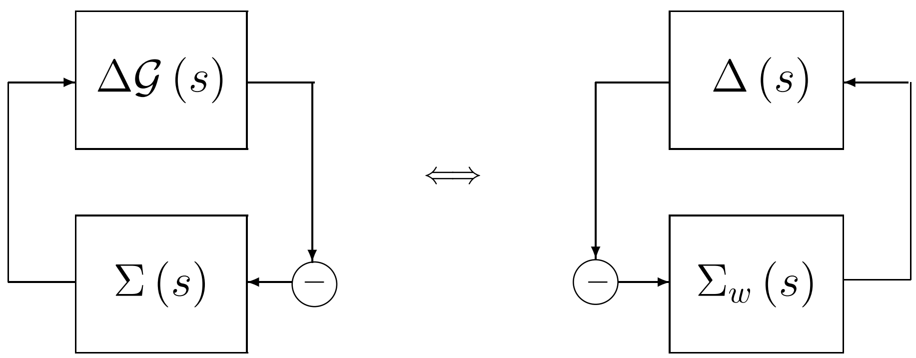
SYSTEME A RETROACTION EQUIVALENT



$\uparrow$

$\Sigma(s)$ *est la function de sensibilité usuelle associée au type d'incertitude* $\Delta\mathcal{G}(s) = \mathcal{W}_g(s)\Delta\mathcal{G}(s)\mathcal{W}_d(s)$

SYSTEME A RETROACTION EQUIVALENT



$\uparrow$

$\Sigma_w(s) = \mathcal{W}_g(s)\Sigma(s)\mathcal{W}_d(s)$ *est la function de sensibilité usuelle associée au type d'incertitude* $\Delta(s)$

FONCTIONS DE SENSIBILITE USUELLES

Forme d'incertitude	Fonction de sensibilité $\Sigma(s)$
Forme additive directe	$\mathcal{SR}_s(s) = \mathcal{RS}_e(s)$
Forme additive inverse	$\mathcal{S}_s\mathcal{G}(s) = \mathcal{GS}_e(s)$
Forme multiplicative directe en entrée	$\mathcal{T}_e(s)$
Forme multiplicative directe en sortie	$\mathcal{T}_s(s)$
Forme multiplicative inverse en entrée	$\mathcal{S}_e(s)$
Forme multiplicative inverse en sortie	$\mathcal{S}_s(s)$

$$\Updownarrow$$

$$\Sigma_w(s) = \mathcal{W}_g(s)\Sigma(s)\mathcal{W}_d(s)$$

THEOREME DU PETIT GAIN

Résultat 1 *Le système à rétroaction équivalent est stable pour toute matrice de transfert $\Delta(s)$ propre et stable et telle que*

$$\sigma_{max}\left(\Delta\left(j\omega\right)\right) \leq 1 \quad \textit{pour tout } \omega \in \mathbb{R}$$

si et seulement la matrice de transfert $\Sigma_w(s)$ est propre, stable et telle que

$$\sigma_{max}\left(W_d(j\omega)\Sigma(j\omega)W_g(j\omega)\right) < 1 \quad \textit{pour tout } \omega \in \mathbb{R}$$

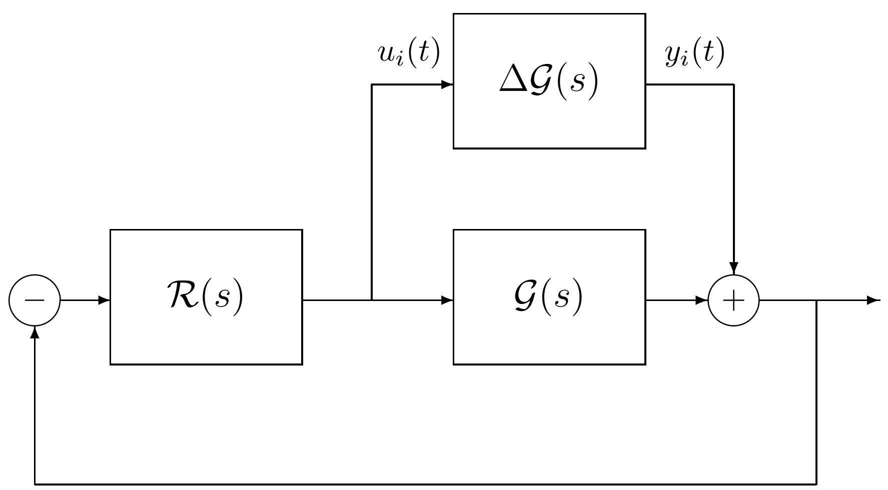
RECOMMANDATIONS ESSENTIELLES

$\mathcal{R}1$ Un système de commande réalisant une bonne robustesse aux incertitudes additives directes (resp. inverses) a nécessairement une matrice de sensibilité usuelle $\mathcal{R}\mathcal{S}_e(s)$ (resp. $\mathcal{G}\mathcal{S}_e(s)$) relativement petite.

$\mathcal{R}2$ Un système de commande réalisant une bonne robustesse aux incertitudes multiplicatives directes en entrée (resp. en sortie) a nécessairement une matrice de sensibilité complémentaire en entrée $\mathcal{T}_e(s)$ (resp. en sortie $\mathcal{T}_s(s)$) relativement petite.

$\mathcal{R}3$ Un système de commande réalisant une bonne robustesse aux incertitudes multiplicatives inverses en entrée (resp. en sortie) a nécessairement une matrice de sensibilité en entrée $\mathcal{S}_e(s)$ (resp. en sortie $\mathcal{S}_s(s)$) relativement petite.

EXEMPLE ILLUSTRATIF



$$U_i(s) = -\,\mathcal{R}(s)\left(\mathcal{G}(s)U_i(s) + Y_i(s)\right)$$

$$\Downarrow$$

$$U_i(s) = -\left(I_m + \mathcal{R}(s)\mathcal{G}(s)\right)^{-1}\mathcal{R}(s)Y_i(s)$$

$$\Downarrow$$

$$U_i(s) = -\mathcal{R}(s)\left(I_p + \mathcal{G}(s)\mathcal{R}(s)\right)^{-1}Y_i(s)$$

$$\downarrow$$

$$\Sigma(s) = \mathcal{R}\mathcal{S}_e(s) = \mathcal{R}\mathcal{S}_s(s)$$

$$\Updownarrow$$

$$\Sigma_w(s) = \mathcal{W}_g(s)\mathcal{R}\mathcal{S}_e(s)\mathcal{W}_d(s) = \mathcal{W}_g(s)\mathcal{S}_s\mathcal{R}(s)\mathcal{W}_d(s)$$

CONCLUSION

- Admissibilité physique
- Fonctions de sensibilité usuelles

  → Quantificateurs de performances nominales

  → Quantificateurs de stabilité robuste

- Open loop shaping