ÉCOLE PUBLIQUE D'INGÉNIEURS
CENTRE DE RECHERCHE

Année universitaire 2019–2020

$1^{\text{ère}}$ année
Matériaux et Chimie

# Examen de Mathématiques

Semestre 5 – Partiel, mardi 12 novembre 2019

Durée : 1h 30min

**Documents et calculatrices programmables interdits**

**Les réponses non justifiées ne vaudront pas de point**

*Le barème n'est donné qu'à titre indicatif*

**Exercice 1.** *(4 points)*

Soit $a$ une constante réelle. On cherche toutes les fonctions $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^1$ vérifiant

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) - \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = a.$$

**a.** On pose $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la fonction définie par $g(u, v) = f(\frac{u+v}{2}, \frac{v-u}{2})$. Montrer que

$$\frac{\partial g}{\partial u}(u, v) = \frac{a}{2}.$$

**b.** Déterminer alors l'expression générale de $g(u, v)$.

**c.** Déduire l'expression de $f(x, y)$, et vérifier que la fonction obtenue est bien solution de l'équation initiale.

**Exercice 2.** *(4 points)*

Soit la fonction $f$ définie sur $\mathbb{R}^3$ par $f(x, y, z) = \cos(x) + \cos(y) + \cos(z)$.

**a.** Déterminer tous les points critiques de $f$ qui sont situés dans le pavé $[0, \pi]^3$.

**b.** Déterminer la nature (maximum local, minimum local ou point-selle) de chacun des points critiques $P_1 = (0, 0, 0)$, $P_2 = (\pi, 0, 0)$ et $P_3 = (\pi, \pi, \pi)$.

**Exercice 3.** *(4 points)*

Soit la fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x, y) = x + y.$$

Pour $(x, y) \in ]-\pi, \pi[^2$, déterminer les extrema locaux de $f$ sous la contrainte $\cos(x)+\cos(y) = 1$.

**Exercice 4.** *(4 points)*

Soit $\mathscr{D}$ un solide homogène. Son volume est $V = \iiint_{\mathscr{D}} dV$. Son centre de masse (ou centre d'inertie) est le point $G$ de coordonnées $x_G = \frac{1}{V} \iiint_{\mathscr{D}} x\, dV$, $y_G = \frac{1}{V} \iiint_{\mathscr{D}} y\, dV$ et $z_G = \frac{1}{V} \iiint_{\mathscr{D}} z\, dV$. Calculer l'altitude $z_G$ du centre de masse pour :

**a.** La demi-boule de rayon $R > 0$, définie par $\mathscr{D} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, x^2 + y^2 + z^2 < R^2 \,, z > 0\}$.

**b.** La pyramide $\mathscr{D}$ de sommet $E(0, 0, \frac{\sqrt{2}}{2})$ et de base carrée $ABCD$, avec $A(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0)$, $B(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0)$, $C(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 0)$ et $D(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 0)$.

**Exercice 5.** *(4 points)*

**a.** Dessiner le domaine $\Delta = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2 \,|\quad 1 < v < 4 \quad \text{et} \quad -v < 2u < v\}$.

**b.** On considère la transformation $\Phi : \Delta \to \mathbb{R}^2$ définie par

$$\Phi : (u, v) \mapsto \begin{pmatrix} x \\ \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{\frac{u+v}{2}} \\ \\ \sqrt{\frac{v-u}{2}} \end{pmatrix}.$$

Exprimer $u$ et $v$ en fonction de $x^2$ et $y^2$. Puis montrer que le domaine image $\mathscr{D} = \Phi(\Delta)$ est une portion de couronne (à préciser).

**c.** Rappeler la formule de changement de variables pour l'intégrale double, et calculer

$$I = \iint_{\Delta} \sqrt{\frac{v + u}{v - u}}\, du\, dv.$$