

COMMANDE OPTIMALE

UNE APPROCHE DETERMINISTE

VERSUS

UNE APPROCHE STOCHASTIQUE

Mohammed M'SAAD
Ecole Nationale Supérieure d'Ingénieurs de Caen

PLAN

- ♠ Motivations
- ♠ Acronymes
- ♠ Contexte déterministe \cong Contexte stochastique
- ♠ Commande linéaire quadratique déterministe
- ♠ Estimation optimale stochastique
- ♠ Commande linéaire quadratique gaussienne
- ♠ Conclusion

MOTIVATIONS

- ♠ Une approche d'état rigoureuse et pragmatique
 - des œuvres pédagogiques reconnues
- ♠ Des outils numériques efficaces
 - analyse, synthèse et mise en œuvre
- ♠ Des conceptions assistées par ordinateurs dédiées
 - conduite de procédés
 - pilotage des véhicules
- ♠ De nombreuses applications industrielles réussies
 - AEROSPATIALE, CNES, EDF, PSA, AREVA, TOTAL ..

ACRONYMES

CLQ : Commande Linéaire Quadratique

OLQ : Observeur Linéaire Quadratique

CLQD : Commande Linéaire Quadratique Déterministe

↓

RTB : Recouvrement du *T*ransfer de la Boucle

↑

CLQG : Commande Linéaire Quadratique Gaussienne

EVM : Estimation à Variance Minimale

CLQ : Commande Linéaire Quadratique

ENVIRONNEMENT DETERMINISTE

VERSUS

ENVIRONNEMENT STOCHASTIQUE

MODELISATION DETERMINISTE

$$\mathcal{MCLQ} \begin{cases} \rho x(t) = Fx(t) + Gu(t) + Ew(t) \\ y(t) = Hx(t) + v(t) \end{cases} \quad (1)$$

↓

$$w(t) = w\delta(t) \text{ et } v(t) = v\delta(t) \text{ avec } (w, v) \in \mathbb{R}^q \times \mathbb{R}^p$$

(F, G, H) est une réalisation d'état minimale

MODELISATION STOCHASTIQUE

$$\mathcal{MCLQG} \begin{cases} \rho x(t) = Fx(t) + Gu(t) + \Gamma w(t) \\ y(t) = Hx(t) + v(t) \end{cases} \quad (2)$$

↓

$$\{u(t)\} \in \mathcal{R}^m, \{y(t)\} \in \mathcal{R}^p \text{ et } \{x(t)\} \in \mathcal{R}^n \Leftrightarrow (F, G, \Gamma, H)$$

$$\{w(t)\} \in \mathcal{R}^\ell \text{ et } \{v(t)\} \in \mathcal{R}^p$$

↓

$$\mathcal{E} \{w(t)\} = \mathcal{E} \{v(t)\} = 0$$

$$\mathcal{E} \left\{ \begin{bmatrix} w(t) \\ v(t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w^T(t-\tau) & v^T(t-\tau) \end{bmatrix} \right\} = \begin{bmatrix} Q_e & 0 \\ 0 & R_e \end{bmatrix} \delta(\tau)$$

$$\{x(t_o)\} \in \mathcal{R}^n$$

↓

$$\mathcal{E} \{x(t_o)\} = x_o$$

$$\mathcal{E} \left\{ (x(t_o) - x_o)(x(t_o) - x_o)^T \right\} = \Sigma_o$$

$$\mathcal{E} \{x(t_o)x^T(t_o)\} = \mathcal{M}_o$$

↑

$$\mathcal{E} \left\{ (\Gamma w(t))(\Gamma w(t-\tau))^T \right\} = \Gamma Q_e \Gamma^T \delta(\tau)$$

↓

$$GQ_eG^T \triangleq Q_o = G_oG_o^T$$

COMMANDE OPTIMALE

- ♠ Commande \mathcal{LQ}
- ♠ Dualité Observation \Leftrightarrow Commande
- ♠ Observateur \mathcal{LQ}
- ♠ Commande $\mathcal{LQD}/\mathcal{LQD}$
- ♠ Synthèse \mathcal{LQD}

COMMANDE \mathcal{LQ}

- ♠ Formulation du problème
- ♠ Commande \mathcal{LQ} à horizon fini
- ♠ Commande \mathcal{LQ} à horizon infini
- ♠ Ingénierie de la commande \mathcal{LQ}
- ♠ Le point sur la commande \mathcal{LQ}

FORMULATION DU PROBLEME

On cherche la loi de commande

$$u : \tau \in [t, \infty] \subset \mathcal{R}^+ \longrightarrow u(\tau) \in \mathcal{R}^m$$

qui minimise le critère quadratique suivant

$$J(u(t)) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_t^{t+T} (x^T(\tau)Q_c x(\tau) + u^T(\tau)R_c u(\tau)) d\tau \quad (3)$$

où $Q_c = H_c^T H_c \geq 0$ et $R_c = R_c^T > 0$ pour des systèmes décrits par le modèle de commande optimale déterministe (1) en supposant que

$$\mathcal{HC} (F, G) \text{ est stabilisable et } (H_c, F) \text{ est détectable}$$

COMMANDE \mathcal{LQ} A HORIZON FINI

Minimiser, par rapport à la séquence de commande $\{u(\tau)\}_{\tau \in [t, t+T]}$, le critère quadratique

$$J(u) = x^T(t+T)P_f x(t+T) + \int_t^{t+T} (x^T(\tau)Q_c x(\tau) + u^T(\tau)R_c u(\tau)) d\tau \quad (4)$$

où $P_f = P_f^T \geq 0$, $Q_c = H_c^T H_c \geq 0$ et $R_c = R_c^T > 0$ pour la classe des systèmes décrits par

$$\mathcal{CLQH} \left\{ \begin{array}{l} \rho x(t) = Fx(t) + Gu(t) + Ew(t) \end{array} \right. \quad (5)$$

en supposant que l'hypothèse \mathcal{HC} est satisfaite.

RESULTAT FONDAMENTAL I

La séquence de commande $\{u(\tau)\}_{\tau \in [t, t+T]}$ qui minimise le critère quadratique à horizon fini (10) sous la contrainte (5) existe et est donnée par la loi de commande avec retour d'état

$$u(t) = -K(t)x(t) \quad (6)$$

avec

$$K(t) = R_c^{-1}G^T P(t) \quad (7)$$

$$-\rho P(t) = P(t)F + F^T P(t) - P(t)GR_c^{-1}G^T P(t) + Q_c \quad (8)$$

avec $P(t+T) = P_f$. Et le minimum du critère quadratique obtenu avec une cette loi de commande vaut

$$J^* = x^T(t_o)P(t_o)x(t_o) = \text{trace}(P(t_o)x_o x_o^T) \quad (9)$$

COMMANDE \mathcal{LQ} A HORIZON INFINI

Minimiser, par rapport à la séquence de commande $\{u(t)\}_{t \in \mathcal{R}^+}$, le critère quadratique

$$J(u(t)) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_t^{t+T} (x^T(\tau)Q_c x(\tau) + u^T(\tau)R_c u(\tau)) d\tau \quad (10)$$

avec

$$Q_c = H_c^T H_c \geq 0 \quad \text{et} \quad R_c = R_c^T > 0$$

sous la commande sous la contrainte du modèle de commande (5) en supposant que l'hypothèse \mathcal{HC} est satisfaite.

RESULTAT FONDAMENTAL II

La séquence de commande $\{u(t)\}_{t \in \mathbb{R}^+}$ qui minimise le critère quadratique à horizon infini (10) sous la contrainte (5) existe et est donnée par la loi de commande avec retour d'état stationnaire

$$u(t) = -Kx(t) \quad (11)$$

avec

$$K = R_c^{-1}G^T P \quad (12)$$

$$PF + F^T P - PGR_c^{-1}G^T P + Q_c = 0 \quad (13)$$

Le système de commande avec retour d'état correspondant est asymptotiquement stable et le coût optimal associé est donné par

$$J^* = x_o^T P_c x_o \quad (14)$$

PREUVE : APPROCHE LYAPUNOV

COMMANDE \mathcal{LQ} D'UN DOUBLE INTEGRATEUR

$$F = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad G = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

↓

$$Q_c = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \mu \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \sqrt{\mu} \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \sqrt{\mu} \end{bmatrix} \geq 0 \quad \text{et} \quad R_c = 1$$

$$PF + F^T P - PGR_c^{-1}G^T P + Q_c = 0$$

↓

$$P = \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{12} & p_{22} \end{bmatrix}$$

↓

$$p_{11} = p_{22} = \sqrt{\mu + 2} \quad \text{et} \quad p_{12} = 1$$

↓

$$K = R_c^{-1}G^T P = \begin{bmatrix} 1 & \sqrt{\mu + 2} \end{bmatrix}$$

↓

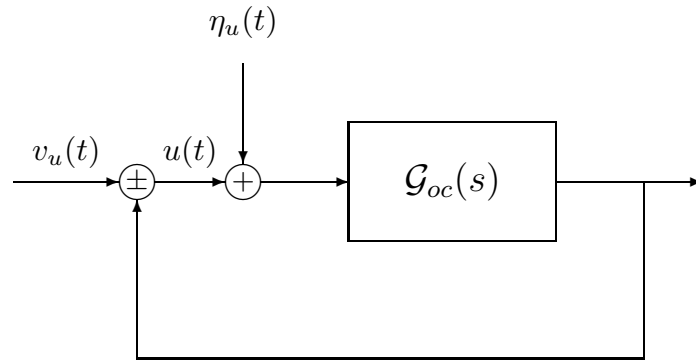
$$P_{ccre}(s) = \det(sI_2 - F + GK) = s^2 + \sqrt{\mu + 2}s + 1$$

↓

$$\text{mode} \left(\omega = 1, \zeta = \frac{\sqrt{\mu + 2}}{2} \right)$$

INGENIERIE DE LA COMMANDE \mathcal{LQ}

Considérons le système de commande avec retour d'état de la figure suivante où $\{v_u(t)\}_{t \in \mathcal{R}^+}$ et $\{\eta_u(t)\}_{t \in \mathcal{R}^+}$ désignent respectivement des perturbations de charge et des bruits de mesure en entrée.



Les performances de ce système de commande en entrée sont données par

$$U(s) = \mathcal{S}_c(s)V_u(s) - \mathcal{T}_c(s)\mathcal{E}_u(s)$$

avec

$$\mathcal{S}_c(s) = (I_m + \mathcal{G}_{oc}(s))^{-1} \quad \text{et} \quad \mathcal{T}_c(s) = \mathcal{G}_{oc}(s) (I_m + \mathcal{G}_{oc}(s))^{-1}$$

où $\mathcal{G}_{oc}(s)$ est la fonction de transfert obtenue en ouvrant la boucle à l'entrée du système, soit

$$\mathcal{G}_{oc}(s) = K (sI_n - F)^{-1} G$$

$\mathcal{S}_c(s)$ et $\mathcal{T}_c(s)$ désignent respectivement les fonctions de sensibilité et de sensibilité complémentaire du système de commande \mathcal{LQ} en entrée. On notera que $I_m + \mathcal{G}_{oc}(s)$ est dite matrice de différence de retour puisque

$$E(s) - S(s) = (I_m + \mathcal{G}_{oc}(s)) E(s)$$

RESULTAT FONDAMENTAL III

Le système de commande \mathcal{LQ} possède les propriétés suivantes.

$\mathcal{P}1$. L'égalité de différence de retour (EDRC)

$$(I_m + \mathcal{G}_{oc}(-s))^T R_c (I_m + \mathcal{G}_{oc}(s)) = R_c + (\mathcal{M}_{oc}(-s))^T (\mathcal{M}_{oo}(s))$$

avec

$$\mathcal{M}_{oc}(s) = H_c (sI_n - F)^{-1} G$$

est toujours vérifiée pour tout $s \in \mathcal{C}$

$\mathcal{P}2$. La robustesse du système de commande \mathcal{LQ} est donnée par

$$\sigma_{max}(\mathcal{S}_c(j\omega)) \leq \frac{\sigma_{max}(R_c)}{\sigma_{min}(R_c)} \text{ pour tout } \omega \in \mathcal{R}$$

$\mathcal{P}3$. Les modes du système de commande peuvent être obtenus à partir de l'équation

$$\begin{aligned} & \frac{P_{cclq}(-s)P_{cclq}(s)}{P_{csys}(-s)P_{csys}(s)} \\ & = \\ & \frac{1}{\det(R_c)} \det \left(R_c + G^T (-sI_n - F^T)^{-1} Q_c (sI_n - F)^{-1} G \right) \end{aligned}$$

avec

$$P_{cclq}(s) = \det(sI_n - F + GK) \text{ et } P_{csys}(s) = \det(sI_n - F)$$

$\mathcal{P}4$. La fonction de transfert en boucle ouverte $\mathcal{G}_{oc}(s)$ admet un retard minimal et ses zéros sont situés dans le domaine de stabilité, soit

$$KG \neq 0_m \text{ et } \mathcal{CZ}(\mathcal{G}_{oc}(s)) \in \mathcal{D}_{sa}$$

REMARQUES

$\mathcal{R}1$. Les systèmes de commande \mathcal{LQ} sont naturellement robustes par rapport aux erreurs de modélisation multiplicatives en entrée en vertu de la propriété $\mathcal{P}2$, e.g. une marge de module maximale dans le cas d'une matrice de pondération diagonale sur la commande

$$R_c = \rho_c I_m \implies \sigma_{\min}(I_m + \mathcal{G}_{oc}(j\omega)) \geq 1$$

Dans le cas des systèmes monovariables, cette propriété stipule que le lieu de Nyquist de la fonction de transfert en boucle ouverte des systèmes de commande \mathcal{LQ} se trouve à l'extérieur d'un cercle de centre le point critique et de rayon unitaire, soit des marge de gain et de phase $MG \in [\frac{1}{2}, \infty[$ et $MP \geq \frac{\pi}{3}$.

$\mathcal{R}2$. La configuration modale d'un système de commande \mathcal{LQ} lorsque la matrice Q_o (resp. R_o) est relativement petite est donnée par

$$Q_c \approx O_n \implies P_{csclq}(-s)P_{csclq}(s) \approx P_{csys}(-s)P_{csys}(s)$$

$$\left(\text{resp. } R_c \approx O_n \implies P_{csclq}(-s)P_{csclq}(s) \approx P_{zmoc}(-s)P_{zmoc}(s) \right)$$

où $P_{zmoc}(s)$ désigne le polynôme des zéros de la fonction de transfert $\mathcal{M}_{oc}(s)$. Ainsi, on retrouve d'une part les modes stables du système avec des modes stables issus de la réflexion des modes instables du système par rapport à l'axe imaginaire (resp. les zéros stables de la fonction de transfert $\mathcal{M}_{oc}(s)$ avec des modes stables issus de la réflexion des zéros instables de la fonction de transfert $\mathcal{M}_{oc}(s)$ par rapport à l'axe imaginaire).

$\mathcal{R}3$. Les systèmes de commande \mathcal{LQ} sont vulnérables aux hautes fréquences puisque leurs fonctions de transfert en boucle ouverte exhibent manifestement une décroissance de -20 db/décade qui ne favoriserait pas la robustesse par rapport aux imperfections de modélisation inéluctables, notamment des modes souples occultés. Cette vulnérabilité de la synthèse \mathcal{LQ} est essentiellement due au fait que les matrices de pondération sont constantes

$\mathcal{R}4$. Une procédure pour la spécification des paramètres de synthèse dans le cas des systèmes stables proposée par de Larminat

$$Q_c = (T_c \mathcal{G}_c(F, G))^{-1} \quad \text{et} \quad R_c = I_m$$

Les modes du système de commande \mathcal{LQ} sont situés à gauche de la verticale d'abscisse $-\frac{1}{T_c}$.

PRECISION MAXIMALE

$$\begin{aligned} \lim_{R_c \rightarrow 0} J(u^*) &= \int_0^\infty (x^{*T}(t) Q_c x^*(t) + u^{*T}(t) R_c u^*(t)) dt \\ &= x_o^T P_o x_o \end{aligned}$$

Considérons le problème de \mathcal{CLC} avec $R_c = \rho_c \Lambda_c$ et supposons que les matrices d'entrée et de sortie G et H soient de rang plein. Alors on a les propriétés suivantes.

$\mathcal{P}1$. *La solution de l' \mathcal{EARC} admet une limite lorsque la pondération de la commande est suffisamment petite, soit*

$$\exists P_o = P_o^T \geq 0 / \lim_{\rho_c \rightarrow 0} P = P_o = P_o^T \geq 0$$

$\mathcal{P}2.$ Si $m < p$ alors on a $P_o = P_o^T > 0$

$\mathcal{P}3.$ Si $m = p$ alors $P_o = 0$ si et seulement si tous les zéros du système par rapport à l'entrée sont situés dans le domaine de stabilité asymptotique, soit

$$\left(m = p \text{ et } \mathcal{CZ}(\mathcal{G}(s)) \in \mathcal{D}_{sa} \right) \iff \left(P_o = 0_n \right)$$

$\mathcal{P}4.$ Si $m > p$ alors $P_o = 0$ pourvu qu'il existe une matrice de normalisation $N \in \mathcal{R}^{m \times p}$ telle que tous les zéros du système normalisé par rapport à l'entrée sont situés dans le domaine de stabilité asymptotique, soit

$$\left(m > p \text{ et } \exists N \in \mathcal{R}^{m \times p} / \mathcal{CZ}(\mathcal{G}(s)N) \in \mathcal{D}_{sa} \right) \iff \left(P_o = 0_n \right)$$

EXEMPLE

$$F = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}, \quad G = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad H = \begin{bmatrix} 1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\downarrow$$

$$\mathcal{G}(s) = \frac{-s+1}{s(s+2)} \quad \longrightarrow \quad z_1 = 1$$

$$\downarrow$$

$$J(u) = \int_0^\infty (y^2(t) + \rho_c u^2(t)) dt \quad \text{avec} \quad \rho_c \geq 0$$

↑

Faisable puisque (F, G, H) est une réalisation minimale

↓

$$PF + F^T P - \frac{1}{\rho_c} PGG^T P + H^T H = 0$$

↓

$$P = \begin{bmatrix} 1 + \sqrt{1 + 4\rho_c + 2\sqrt{\rho_c}} & \sqrt{\rho_c} \\ \sqrt{\rho_c} & \rho_c \left(-2 + \sqrt{4 + \frac{1}{\rho_c} + \frac{2}{\sqrt{\rho_c}}} \right) \end{bmatrix}$$

↓

$$\lim_{\rho_c \rightarrow 0} P = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \neq 0$$

↓

$$K = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{\rho_c}} & \frac{\sqrt{1+2\sqrt{\rho_c}}}{\sqrt{\rho_c}} \end{bmatrix}$$

↓

$$p_{1,2} = \frac{1}{2} \left(-\sqrt{4 + \frac{1}{\rho_c} + \frac{2}{\sqrt{\rho_c}}} \pm \sqrt{4 + \frac{1}{\rho_c} - \frac{2}{\sqrt{\rho_c}}} \right)$$

↓

$$\lim_{\rho_c \rightarrow 0} p_1 = -1 \quad \text{et} \quad \lim_{\rho_c \rightarrow 0} p_2 = -\infty$$

LE POINT SUR LA COMMANDE \mathcal{LQ}

- ♠ Une formulation judicieuse

Commande \mathcal{LQ} à horizon fini $\rightarrow \mathcal{EDRC}$

Commande \mathcal{LQ} à horizon infini $\rightarrow \mathcal{EARC}$

- ♠ Performances dynamiques \Leftrightarrow Paramètres de synthèse Q_c et R_c

- ♠ Une marge de module maximale

- ♠ Une vulnérabilité aux hautes fréquences

\rightarrow Retard minimal de $\mathcal{G}_{oc}(s)$

- ♠ Précision maximale

$\rightarrow m \geq p$ et $\mathcal{CZ}(\mathcal{SYS}) \subset \mathcal{D}_{sp}$

DUALITE OBSERVATION \Leftrightarrow COMMANDE

Les concepts de commande avec retour d'état et d'injection de sortie sont respectivement définis à partir des opérations suivantes

$$\mathcal{SYS} \left\{ \left(\begin{array}{c|c} F & G \\ \hline H & E \end{array} \right) \right. \rightarrow \mathcal{SCRE} \left\{ \left(\begin{array}{c|c} F - GK & G \\ \hline H - EK & E \end{array} \right) \right.$$

et

$$\mathcal{SYS} \left\{ \left(\begin{array}{c|c} F & G \\ \hline H & E \end{array} \right) \right. \rightarrow \mathcal{SIS} \left\{ \left(\begin{array}{c|c} F - MH & G - ME \\ \hline H & E \end{array} \right) \right.$$

où $K \in \mathcal{R}^{m \times n}$ et $M \in \mathcal{R}^{n \times p}$ désignent respectivement le gain de commande avec retour d'état et d'injection de sortie.

Et compte tenu que le dual du système de commande avec retour d'état est donné par

$$\begin{aligned}
 \mathcal{SCRE} \left\{ \left(\begin{array}{c|c} F - GK & G \\ \hline H - EK & E \end{array} \right) \right. &\longrightarrow \\
 \mathcal{DSCRE} \left\{ \left(\begin{array}{c|c} F^T - K^T G^T & H^T - K^T E^T \\ \hline G^T & E^T \end{array} \right) \right. &
 \end{aligned}$$

on peut en déduire que le dual du système de commande avec retour d'état sur le dual du système est donné par

$$\begin{aligned}
 \mathcal{SCRED} \left\{ \left(\begin{array}{c|c} F^T - H^T K_d & H^T \\ \hline G^T - E^T K_d & E^T \end{array} \right) \right. &\longrightarrow \\
 \mathcal{DSCRED} \left\{ \left(\begin{array}{c|c} F - K_d^T H & G - K_d^T E \\ \hline H & E \end{array} \right) \right. &
 \end{aligned}$$

Il apparaît alors clairement que le concept d'injection de sortie peut être obtenu à partir du dual du concept de commande avec retour d'état sur le dual du système, soit

$$\mathcal{SIS} = \left(\mathcal{DSCRED} \right)_{K_d^T = M}$$

Par ailleurs, comme le concept d'injection de sortie sur le dual du système est donnée par

$$\mathcal{DSYS} \left\{ \left(\begin{array}{c|c} F^T & H^T \\ \hline G^T & E^T \end{array} \right) \right. \rightarrow \\ \left. \mathcal{SISD} \left\{ \left(\begin{array}{c|c} F^T - M_d G^T & H^T - M_d E^T \\ \hline G^T & E^T \end{array} \right) \right. \right.$$

et que le dual du système obtenu par une injection de sortie à partir du dual du système est donné par

$$\mathcal{SISD} \left\{ \left(\begin{array}{c|c} F^T - M_d G^T & H^T - M_d E^T \\ \hline G^T & E^T \end{array} \right) \right. \rightarrow \\ \left. \mathcal{DSISD} \left\{ \left(\begin{array}{c|c} F - G M_d^T & G \\ \hline H - E M_d^T & E \end{array} \right) \right. \right.$$

on peut postuler naturellement que le concept de commande avec retour d'état peut être obtenu à partir du dual du concept d'injection de sortie sur le dual du système, soit

$$\mathcal{SCRE} = \left(\mathcal{DSISD} \right)_{M_d^T = K}$$

DUALITE \Leftrightarrow SIMPLICITE**OBSERVATEUR \mathcal{LQ}**

- ♠ Formulation du problème
- ♠ Observateur \mathcal{LQ}
- ♠ Ingénierie de l'observation \mathcal{LQ}
- ♠ Reconstruction parfaite
- ♠ Le point sur l'observation \mathcal{LQ}

FORMULATION DU PROBLEME

On cherche un observateur du type \mathcal{LQ} uenberger, soit

$$\mathcal{OLQ} \begin{cases} \rho \hat{x}(t) = F\hat{x}(t) + Gu(t) + M(y(t) - \hat{y}(t)) \\ \hat{y}(t) = H\hat{x}(t) \end{cases} \quad (15)$$

en exploitant la dualité entre l'observation et la commande \mathcal{LQ} , notamment le gain d'observation est déterminé à partir de la transposée du gain de la commande \mathcal{LQ} du dual du système

$$\mathcal{DSYS} \begin{cases} \rho x_d(t) = F^T x_d(t) + H^T u_d(t) \\ y(t) = G^T x(t) \end{cases} \quad (16)$$

SYNTHESE \mathcal{LQ}

Minimiser, par rapport à la séquence de commande $\{u_d(t)\}_{t \in \mathcal{R}^+}$, qui minimise le critère quadratique

$$J(u_d) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T (x_d^T(t) Q_o x_d(t) + u_d^T(t) R_o u_d(t)) dt \quad (17)$$

où $Q_o = G_o G_o^T \geq 0$ et $R_o = R_o^T > 0$ pour le dual du système (16) en supposant que l'hypothèse \mathcal{HO} est satisfaite, soit

$\mathcal{HO} (F, G_o, H)$ est une réalisation d'état minimale

RESULTAT FONDAMENTAL I

Considérons la classe des systèmes (1), alors l'observateur \mathcal{LQ} est donné par les équations

$$\mathcal{OLQ} \begin{cases} \rho \hat{x}(t) = F \hat{x}(t) + Gu(t) + M (y(t) - \hat{y}(t)) \\ \hat{y}(t) = H \hat{x}(t) \end{cases} \quad (18)$$

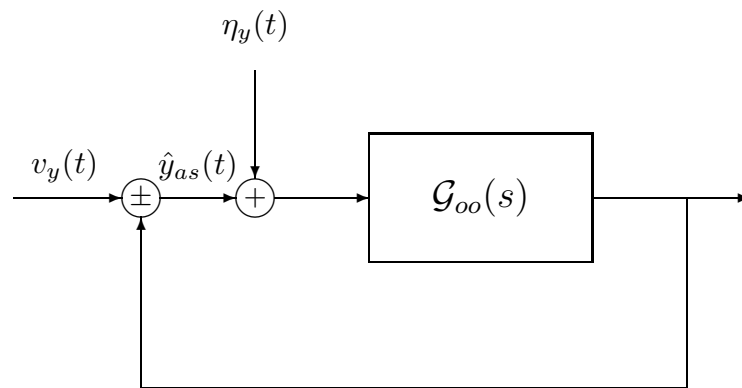
avec

$$M = \Sigma H^T R_o^{-1} \quad (19)$$

$$F \Sigma + \Sigma F^T - \Sigma H^T R_o^{-1} H \Sigma + Q_o = 0 \quad (20)$$

INGENIERIE DE L'OBSERVATEUR \mathcal{LQ}

La figure ci-dessous représente le système de rétroaction sous-jacent de l'observateur avec des perturbations de charge et des bruits de mesure en sortie.



Les performances en sortie de ce système sont données par

$$\hat{Y}_{as}(s) = \mathcal{S}_o(s)V_y(s) - \mathcal{T}_o(s)\mathcal{E}_y(s)$$

avec

$$\mathcal{S}_o(s) = (I_p + \mathcal{G}_{oo}(s))^{-1}$$

$$\mathcal{T}_o(s) = \mathcal{G}_{oo}(s) (I_p + \mathcal{G}_{oo}(s))^{-1}$$

où $\mathcal{G}_o(s)$ est la fonction de transfert obtenue en ouvrant la boucle à la sortie du système, soit

$$\mathcal{G}_{oo}(s) = H (sI_n - F)^{-1} M$$

Notons que $\mathcal{S}_o(s)$ et $\mathcal{T}_o(s)$ désignent respectivement les fonctions de sensibilité et de sensibilité complémentaire de l'observateur en sortie et que $I_p + \mathcal{G}_{oo}(s)$ est dite matrice de différence de retour.

RESULTAT FONDAMENTAL II

L'observateur \mathcal{LQ} se distingue par les propriétés suivantes.

P1. L'égalité de différence de retour pour l'observation (EDRO)

$$(I_p + \mathcal{G}_{oo}(s)) R_o (I_p + \mathcal{G}_{oo}(-s))^T = R_o + (\mathcal{M}_{oo}(s)) (\mathcal{M}_{oo}(-s))^T$$

avec

$$\mathcal{M}_{oo}(s) = H (sI_n - F)^{-1} G_o$$

est toujours vérifiée pour tout $s \in \mathcal{C}$

P2. La robustesse du l'observateur \mathcal{LQ} est donnée par

$$\sigma_{max}(\mathcal{S}_o(j\omega)) \leq \frac{\sigma_{max}(R_o)}{\sigma_{min}(R_o)} \text{ pour tout } \omega \in \mathcal{R}$$

$\mathcal{P}3$. La fonction de transfert en boucle ouverte $\mathcal{G}_{oo}(s)$ admet un retard minimal et ses zéros sont situés dans le domaine de stabilité, soit

$$HF \neq 0_p \quad \text{et} \quad \mathcal{CZ}(\mathcal{G}_{oo}(s)) \in \mathcal{D}_{sa}$$

$\mathcal{P}4$. Les modes de l'observateur \mathcal{LQ} peuvent être obtenus à partir de l'équation

$$\frac{P_{colq}(-s)P_{colq}(s)}{P_{csys}(-s)P_{csys}(s)} = \frac{\det(R_o(\mathcal{M}_{oo}(s))(\mathcal{M}_{oo}(-s))^T)}{\det(R_o)}$$

avec

$$P_{colq}(s) = \det(sI_n - F + MH) \quad \text{et} \quad P_{csys}(s) = \det(sI_n - F)$$

REMARQUES

$\mathcal{R}1$. Les observateurs \mathcal{LQ} sont naturellement robustes par rapport aux erreurs de modélisation multiplicatives en sortie, e.g. une marge de module maximale dans le cas d'une matrice de pondération diagonale sur la commande

$$R_o = \rho_o I_p \implies \sigma_{\min}(I_p + \mathcal{G}_{oo}(j\omega)) \geq 1$$

Dans le cas des systèmes monovariables, cette propriété stipule que le lieu de Nyquist de la fonction de transfert en boucle ouverte des observateurs \mathcal{LQ} se trouve à l'extérieur d'un cercle de centre le point critique et de rayon unitaire, soit des marge de gain et de phase $MG \in [\frac{1}{2}, \infty[$ et $MP \geq \frac{\pi}{3}$.

$\mathcal{R}2$. La configuration modale d'un observateur \mathcal{LQ} lorsque la matrice Q_o (resp. R_o) est relativement petite est donnée par

$$Q_o \approx O_n \implies P_{colq}(-s)P_{colq}(s) \approx P_{csys}(-s)P_{csys}(s)$$

$$\left(\text{resp. } R_o \approx O_n \implies P_{colq}(-s)P_{colq}(s) \approx P_{zmo0}(-s)P_{zmo0}(s) \right)$$

où $P_{zmo0}(s)$ désigne le polynôme des zéros de la fonction de transfert $\mathcal{M}_{oo}(s)$. Ainsi, on retrouve d'une part les modes stables du système avec des modes stables issus de la réflexion des modes instables du système par rapport à l'axe imaginaire (resp. les zéros stables de la fonction de transfert $\mathcal{M}_{oo}(s)$ avec des modes stables issus de la réflexion des zéros instables de la fonction de transfert $\mathcal{M}_{oo}(s)$ par rapport à l'axe imaginaire).

$\mathcal{R}3$. Les observateurs \mathcal{LQ} sont vulnérables aux hautes fréquences puisque leurs fonctions de transfert en boucle ouverte exhibent manifestement une décroissance de -20 db/décade qui ne favoriserait pas la robustesse par rapport aux imperfections de modélisation inéluctables, notamment des modes souples occultés. Cette vulnérabilité de la synthèse \mathcal{LQ} est essentiellement due au fait que les matrices de pondération sont constantes.

$\mathcal{R}4$. Une procédure pour la spécification des paramètres de synthèse dans le cas des systèmes stables proposée par de Larminat

$$Q_o = (T_o \mathcal{G}_o(H, F))^{-1} \quad \text{et} \quad R_o = I_p$$

Les modes du système de commande \mathcal{LQ} sont situés à gauche de la verticale d'abscisse $-\frac{1}{T_o}$.

RECONSTRUCTION PARFAITE

Considérons le problème d'observation optimale avec $R_o = \rho_o \Lambda_o$ et supposons que les matrices d'entré-sortie $E \in \mathcal{R}^{n \times q}$ et $H \in \mathcal{R}^{p \times 1}$ soient de rang plein. Si l'on pose

$$\mathcal{H}(s) = H (sI_n - F)^{-1} E$$

alors on a les propriétés suivantes

$\mathcal{P}1$. La solution de l'EARO admet une limite lorsque la variance des bruits de mesure est suffisamment petite, soit

$$\exists \Sigma_o = \Sigma_o^T \geq 0 \quad / \quad \lim_{\rho_o \rightarrow 0} \Sigma = \Sigma_o$$

$\mathcal{P}2$. Si $p < q$ alors on a $\Sigma_o = \Sigma_o^T > 0$

$\mathcal{P}3$. Si $p = q$ alors $\Sigma_o = 0$ si et seulement si tous les zéros de la fonction de transfert $\mathcal{H}(s)$ sont situés dans le domaine de stabilité asymptotique, soit

$$\left(p = q \text{ et } \mathcal{CZ}(\mathcal{H}(s)) \in \mathcal{D}_{sa} \right) \iff \left(\Sigma_o = 0_n \right)$$

$\mathcal{P}4$. Si $p > q$ alors $\Sigma_o = 0$ pourvu qu'il existe une matrice de normalisation $N \in \mathcal{R}^{q \times p}$ telle que tous les zéros de la fonction de transfert normalisée $N\mathcal{H}(s)$ sont situés dans le domaine de stabilité asymptotique

$$\left(p > q \text{ et } \exists N \in \mathcal{R}^{m \times p} \quad / \quad \mathcal{CZ}(N\mathcal{H}(s)) \in \mathcal{D}_{sa} \right) \iff \left(\Sigma_o = 0_n \right)$$

LE POINT SUR L'OBSERVATION \mathcal{LQ}

- ♠ Une synthèse \mathcal{LQ} sous la bénédiction de la dualité
- ♠ Performances dynamiques \Leftrightarrow Paramètres de synthèse Q_o et R_o
- ♠ Une marge de module maximale
- ♠ Une vulnérabilité aux hautes fréquences
 - \rightarrow Retard minimal de $\mathcal{G}_{oo}(s)$
- ♠ Une reconstruction parfaite
 - $\rightarrow p \geq q$ et $\mathcal{CZ}(N\mathcal{H}(s)) \subset \mathcal{D}_{sp}$

VRAISSEMBLANCE AVEC LE \mathcal{FKB}

COMMANDE \mathcal{LQD}

- ♠ Synthèse \mathcal{LQD}
- ♠ Justification du principe d'équivalence certitude
- ♠ Système de commande \mathcal{LQD}
- ♠ Forme polynomiale du régulateur \mathcal{LQD}
- ♠ Spécification des paramètres de synthèse
- ♠ Le point sur la commande \mathcal{LQD}

SYNTHESE \mathcal{LQD}

La synthèse \mathcal{LQD} consiste à concevoir un système de commande

$$u : t \in [0, T] \subset \mathcal{R}^+ \longrightarrow u(t) \in \mathcal{R}^m$$

qui minimise, pour les systèmes (1), le critère quadratique suivant

$$J(u(t)) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_t^{t+T} (x^T(\tau)Q_c x(\tau) + u^T(\tau)R_c u(\tau)) d\tau \quad (21)$$

où $Q_c = H_c^T H_c \geq 0$ et $R_c = R_c^T > 0$ pour les systèmes décrits par une réalisation d'état (F, G, H) satisfaisant les hypothèses \mathcal{HC} et \mathcal{HO} lorsque les variables d'état ne sont pas accessibles à la mesure.

RESULTAT FONDAMENTAL I

Considérons la classe des systèmes raisonnablement décrits par le modèle de commande optimale (1) satisfaisant les hypothèses \mathcal{HC} et \mathcal{HO} , la loi de commande \mathcal{LQD} est donnée par

$$\mathcal{RLQD} \begin{cases} \rho \hat{x}(t) = F \hat{x}(t) + Gu(t) + M (y(t) - H \hat{x}(t)) \\ u(t) = -K \hat{x}(t) \end{cases} \quad (22)$$

où K et M sont respectivement les gains du retour d'état et d'observation de la \mathcal{CLQ} et de l' \mathcal{OLQ} sous-jacents, soit

$$K = R_c^{-1} G^T P \quad \text{avec} \quad PF + F^T P - PGR_c^{-1} G^T P + Q_c = 0 \quad (23)$$

$$M = \Sigma H^T R_o^{-1} \quad \text{avec} \quad F \Sigma + \Sigma F^T - \Sigma H^T R_o^{-1} H \Sigma + Q_o = 0 \quad (24)$$

UNE JUSTIFICATION RIGOUREUSE

Compte tenu de la convergence exponentielle de l' \mathcal{OLQ} , utilisé pour la réalisation de l'estimation de l'état, on a

$$\begin{aligned} & \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_t^{t+T} (x^T(\tau) Q_c x(\tau) + u^T(\tau) R_c u(\tau)) d\tau \\ & = \\ & \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_t^{t+T} \left((\hat{x}(\tau) + \tilde{x}(\tau))^T Q_c (\hat{x}(\tau) + \tilde{x}(\tau)) + u^T(\tau) R_c u(\tau) \right) d\tau \\ & = \\ & \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_t^{t+T} (\hat{x}^T(\tau) Q_c \hat{x}(\tau) + u^T(\tau) R_c u(\tau)) d\tau \end{aligned}$$

puisque

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_t^{t+T} \hat{x}^T(\tau) Q_c \tilde{x}(\tau) dt = 0$$

La synthèse du système de commande \mathcal{LQD} est ainsi naturellement effectuée à partir de la minimisation du critère quadratique

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_t^{t+T} (\hat{x}^T(\tau) Q_c \hat{x}(\tau) + u^T(\tau) R_c u(\tau)) d\tau$$

pour le système dynamique

$$\rho \hat{x}(t) = (F - MH) \hat{x}(t) + Gu(t) + My(t)$$

et qui n'est autre que l'observateur \mathcal{LQ} .

SYSTEME DE COMMANDE \mathcal{LQD}

En combinant les équations du système (1) et celles du régulateur (22), on obtient la description suivante du système de commande \mathcal{LQD} .

$$SCLQD \left\{ \begin{array}{l} \rho \begin{bmatrix} x(t) \\ \tilde{x}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F - GK & GK \\ 0 & F - MH \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) \\ \tilde{x}(t) \end{bmatrix} \\ y(t) = \begin{bmatrix} H & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) \\ \tilde{x}(t) \end{bmatrix} \end{array} \right. \quad (25)$$

RESULTAT FUNDAMENTAL II

Le système de commande \mathcal{LQD} est asymptotiquement stable puisque le système de commande \mathcal{LQ} et l'observateur \mathcal{LQ} sous-jacents sont asymptotiquement stable, soit

$$\mathcal{V}(F - GK) \subset \mathcal{D}_s \quad \text{et} \quad \mathcal{V}(F - MH) \subset \mathcal{D}_s$$

PREUVE

Le polynôme caractéristique du système de commande \mathcal{LQD} est donné par

$$\begin{aligned} P_{cclqd}(s) &= \det \begin{pmatrix} sI_n - F + GK & -GK \\ 0 & sI_n - F + MH \end{pmatrix} \\ &= \\ \det(sI_n - F + GK) \det(sI_n - F + MH) &= P_{cclq}(s)P_{colq}(s) \end{aligned}$$

Et comme le système de commande \mathcal{LQ} (resp. l'observateur \mathcal{LQ}) est asymptotiquement stable en vertu de l'hypothèse \mathcal{HC} (resp. \mathcal{HO}), i.e. $P_{cclq}(s) \in \mathbb{R}_{sa}[s]$ (resp. $P_{colq}(s) \in \mathbb{R}_{sa}[s]$), on peut conclure naturellement que $P_{cclqd}(s) \in \mathbb{R}_{sa}[s]$ et donc le système de commande \mathcal{LQD} est bien asymptotiquement stable.

INTERPRETATION POLYNOMIALE

Si l'on applique la transformée de \mathcal{L} aplace aux équations du régulateur (22) tout en supposant que les conditions initiales sont nulles, on aura

$$\mathcal{R}QG \left\{ \begin{array}{l} U(s) = -K\hat{X}(s) \\ s\hat{X}(s) = F\hat{X}(s) + GU(s) + M(Y(s) - H\hat{X}(s)) \end{array} \right.$$

$$\Downarrow$$

$$U(s) = -\mathcal{R}(s)Y(s)$$

avec

$$\mathcal{R}(s) = K(sI_n - F + GK + MH)^{-1}M$$

Et comme toutes les loi de commande avec retour d'état utilisant un observateur, le régulateur $\mathcal{L}QD$ peut se mettre sous la forme usuelle

$$\frac{S(s)}{P_o(s)} U(s) + \frac{R(s)}{P_o(s)} Y(s) = 0$$

$$\Uparrow$$

$$S(s) = P_o(s)I_m + KAdj(sI_n - F + MH)G$$

$$R(s) = KAdj(sI_n - F + MH)M$$

INTERPRETATION FREQUENTIELLE

On a

$$\begin{bmatrix} X(s) \\ U(s) \end{bmatrix} = \mathcal{T}_{bf}(s) \begin{bmatrix} W(s) \\ V(s) \end{bmatrix}$$

avec

$$\mathcal{T}_{bf}(s) = \begin{bmatrix} (I_n - \Phi(s)G\mathcal{R}(s)\mathcal{S}(s)H)\Phi(s) & -\Phi(s)G\mathcal{R}(s)\mathcal{S}(s) \\ -\mathcal{S}(s)\mathcal{R}(s)H\Phi(s) & -\mathcal{S}(s)\mathcal{R}(s) \end{bmatrix}$$

$$\mathcal{G}(s) = H\Phi(s)G$$

$$\mathcal{R}(s) = K(sI_n - F + GK + MH)^{-1}M$$

$$\mathcal{S}(s) = (1 + \mathcal{R}(s)\mathcal{G}(s))^{-1}$$

$$J(u)$$

=

$$\mathcal{E} \left\{ \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T \begin{bmatrix} (H_c x(t))^T & (\sqrt{R_c} u(t))^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} H_c x(t) \\ \sqrt{R_c} u(t) \end{bmatrix} \right\}$$

⇕

$$J(u(t)) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \text{trace}(\mathcal{H}(j\omega)^* \mathcal{H}(j\omega)) d\omega$$

avec

$$\mathcal{H}(s) = \begin{bmatrix} H_c & 0 \\ 0 & \sqrt{R_c} \end{bmatrix} \mathcal{T}_{bf}(s) \begin{bmatrix} G_o & 0 \\ 0 & \sqrt{R_o} \end{bmatrix}^T$$

un bon compromis performance / robustesse est réalisable

⇕

$$(Q_c = H_c^T H_c, R_c) \text{ et } (Q_o = G_o G_o^T, R_o)$$

COMMANDE $\mathcal{LQD}/\mathcal{RTB}$

- ♠ Une intuition fausse
- ♠ Le concept \mathcal{RTB}
- ♠ Recouvrement en entrée
- ♠ Recouvrement en sortie
- ♠ Remarques

UNE INTUITION FAUSSE

les systèmes de commande \mathcal{LQD} possèdent des propriétés de robustesse aussi importantes que celles des systèmes optimaux de commande et d'observation sous-jacents

↑

Une meilleure illustration peut être faite sous Matlab

LE CONCEPT \mathcal{RTB}

Le \mathcal{RTB} comme Recouvrement du Transfert de la Boucle est une technique de synthèse des systèmes de commande \mathcal{LQD} réalisant un recouvrement du transfert de la boucle ouverte du système de commande \mathcal{LQ} (resp. de l'observateur \mathcal{LQ}) sous-jacent

Les fonctions de transfert en boucle ouverte à l'entrée et à la sortie du système de commande \mathcal{LQD} sont respectivement données par

$$\mathcal{G}_{oe}(s) = \mathcal{R}(s)\mathcal{G}(s) \quad \text{et} \quad \mathcal{G}_{os}(s) = \mathcal{G}(s)\mathcal{R}(s)$$

$$\Downarrow$$

$$\mathcal{G}(s) = H (sI_n - F)^{-1} G$$

et

$$\mathcal{R}(s) = -K (sI_n - F + GK + MH)^{-1} M$$

PROBLEMES DE RECOUVREMENT

1. **Recouvrement en entrée :** étant donné un système de commande \mathcal{LQ} , comment choisir les paramètres de synthèse de l'observateur \mathcal{LQ} pour que la fonction de transfert en boucle ouverte en entrée du système de commande \mathcal{LQD} associé se comporte comme celle du système de commande \mathcal{LQ} , soit

$$\mathcal{G}_{oe}(s) \approx \mathcal{G}_{oc}(s) = K (sI_n - F)^{-1} G$$

2. **Recouvrement en sortie :** étant donné un observateur \mathcal{LQ} , comment choisir les paramètres de synthèse du système de commande \mathcal{LQ} pour que la fonction de transfert en boucle ouverte en sortie du système de commande \mathcal{LQD} correspondant se comporte comme celle de l'observateur \mathcal{LQ} .

$$\mathcal{G}_{os}(s) \approx \mathcal{G}_{oo}(s) = H (sI_n - F)^{-1} M$$

RECOUVREMENT EN ENTREE

Considérons le problème de commande \mathcal{LQD} et supposons que $p \geq m$ et que la fonction de transfert $H(sI_n - F)^{-1}G$ n'ait aucun zéro à partie réelle positive. Si les matrices de covariance des perturbations d'état et des bruits de mesure sont respectivement spécifiées comme suit

$$Q_o = GG^T \quad \text{et} \quad R_o = \rho_o \Lambda_o$$

alors la FTBO du système de commande \mathcal{LQ} en entrée peut être restaurée lorsque ρ_o est suffisamment petit, soit la propriété de recouvrement

$$\lim_{\rho_o \rightarrow 0} \mathcal{R}(s)\mathcal{G}(s) = \mathcal{G}_{oc}(s)$$

est vérifiée pour tout $s \in \mathcal{C}$. La configuration des pôles de l'observateur \mathcal{LQ} résultant est donnée par les zéros du systèmes.

RECOUVREMENT EN SORTIE

Considérons le problème de commande \mathcal{LQD} et supposons que $m \geq p$ et que la fonction de transfert $H(sI_n - F)^{-1}G$ n'ait aucun zéro à partie réelle positive. Si les matrices de pondération de l'état et de la commande sont respectivement données par

$$Q_c = H^T H \quad \text{et} \quad R_c = \rho_c \Lambda_c$$

alors la propriété suivante de recouvrement de la FTBO de l'observateur \mathcal{LQ} en sortie

$$\lim_{\rho_c \rightarrow 0} \mathcal{G}(s)\mathcal{R}(s) = \mathcal{G}_{oo}(s)$$

est vérifiée pour tout $s \in \mathcal{C}$.

REMARQUES

- $\mathcal{R}1$. Le recouvrement en entrée peut être réalisé avec les paramètres de synthèse $R_o = I_p$ et $Q_o = Q_{or} + q_o GG^T$ avec $q_o \rightarrow \infty$
- $\mathcal{R}2$. Le recouvrement en sortie peut être réalisé avec les paramètres de synthèse $R_c = I_p$ et $Q_c = Q_{cr} + q_c GG^T$ avec $q_c \rightarrow \infty$
- $\mathcal{R}3$. La procédure $\mathcal{LQD} - \mathcal{RTB}$ conduit à une compensation des zéros du système qui pourrait être néfaste si ces derniers ne sont pas situés dans le domaine de stabilité et performances requis en présence d'erreurs de modélisation aussi petites que possible. Le paramètre de synthèse ρ ou q doit être alors choisi de manière à réaliser un bon compromis entre les performance et la robustesse : réaliser la propriété \mathcal{RTB} uniquement dans la bande passante du système de commande.

LE POINT SUR LA COMMANDE \mathcal{LQD}

- ♠ Commande avec retour d'état \mathcal{LQ} incorporant un observateur \mathcal{LQ}
- ♠ Un régulateur strictement propre avec une interprétation \mathcal{H}_2
 \rightarrow un compromis performances/robustesse admissible
- ♠ La robustesse du système de commande \mathcal{LQ} (resp. de l'observateur \mathcal{LQ}) ne sont pas préservées
 \rightarrow le concept \mathcal{RTB}
- ♠ Une synthèse \mathcal{LQD}
 \rightarrow \mathcal{BE} sur l'ingénierie de la commande \mathcal{LQD}

ESTIMATION OPTIMALE

- ♠ Motivations
- ♠ Préliminaires
- ♠ Estimation optimale
- ♠ Le filtre de \mathcal{K} alman et \mathcal{B} ucy
- ♠ Application : commande linéaire quadratique gaussienne
- ♠ Conclusion

MOTIVATIONS

- $\mathcal{M}1$. Un grand événement dans l'histoire de la théorie des systèmes
→ \mathcal{K} alman est l'un des auteurs les plus cités
- $\mathcal{M}2$. Des outils puissants
→ analyse, synthèse et mise en œuvre
- $\mathcal{M}3$. Des méthodologies spécifiques
→ Détection de ruptures de modèles
- $\mathcal{M}4$. De nombreuses applications industrielles réussies
→ Télécommunications

PRELIMINAIRES

- ♠ Calcul différentiel stochastique
- ♠ Equations de *Riccati*
- ♠ Gramien de commandabilité
- ♠ Gramien d'observabilité

LA MATHÉMATIQUE AU SERVICE DE L'INGÉNIEUR

CALCUL DIFFERENTIEL STOCHASTIQUE

Considérons le système différentiel stochastique

$$\rho x(t) = A(t)x(t) + \nu(t)$$

où $\{\nu(t)\}$ est un processus stochastique stationnaire de moyenne nulle et de covariance $\mathcal{Q}(t) = \mathcal{Q}^T(t) \geq 0$ et $x(t_0)$ est une variable aléatoire indépendante de $\{\nu(t)\}$ de moyenne x_o , de covariance $\Omega_o = \Omega_o^T \geq 0$ et dont le moment d'ordre deux est $\mathcal{M}_o = \mathcal{M}_o^T \geq 0$.

Posons

$$x_m(t) = \mathcal{E} \{x(t)\}$$

$$\Omega(t) = \mathcal{E} \left\{ (x(t) - x_m(t)) (x(t) - x_m(t))^T \right\}$$

$$\mathcal{V}(t, t+T) = \mathcal{E} \left\{ \int_t^{t+T} x^T(\tau) W(\tau) x(\tau) d\tau + x^T(t+T) W_f x(t+T) \right\}$$

avec $W(\tau) = W^T(\tau) \geq 0$ pour tout $\tau \in [t, t+T]$ et $\mathcal{P}_f = \mathcal{P}_f^T \geq 0$.

Alors les deux propriétés suivantes sont vraies.

$\mathcal{P}1$. La moyenne et la covariance de la solution du système différentiel stochastique sont respectivement données par les équations différentielles

$$\rho x_m(t) = A(t)x_m(t) \quad \text{avec} \quad x_m(0) = x_o$$

et

$$\rho \Omega(t) = A(t)\Omega(t) + \Omega(t)A^T(t) + \mathcal{Q}(t) \quad \text{avec} \quad \Omega(t_0) = \Omega_o$$

$\mathcal{P}2$. La fonction coût $\mathcal{V}(t, t+T)$ est donnée par

$$\mathcal{V}(t, t+T) = \text{trace} \left(\Lambda(t) \mathcal{M}_o + \int_t^{t+T} \mathcal{Q}(\tau) \Lambda(\tau) d\tau \right)$$

où $\Lambda(\tau)$ est une matrice symétrique définie non négative qui vérifie l'équation différentielle

$$-\rho \Lambda(\tau) = A^T(\tau) \Lambda(\tau) + \Lambda(\tau) A(\tau) + W(\tau) \quad \text{avec} \quad \Lambda(t+T) = W_f$$

EQUATION ALGEBRIQUE DE RICCATI

$$\mathcal{A}^T \mathcal{X} + \mathcal{X} \mathcal{A} - \mathcal{X} \mathcal{B} \mathcal{R}^{-1} \mathcal{B}^T \mathcal{X} + \mathcal{Q} = 0$$

avec

$$\mathcal{R} = \mathcal{R}^T > 0 \text{ et } \mathcal{Q} = \mathcal{C}^T \mathcal{C} \geq 0$$

↓

les solutions symétriques et définies non négatives dites stabilisantes caractérisées par la propriété suivante

$$\mathcal{V}(\mathcal{A} - \mathcal{B} \mathcal{R}^{-1} \mathcal{B}^T \mathcal{X}) \subset \mathcal{D}_{sa}$$

RESULTAT FONDAMENTAL

Supposons que $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ est stabilisable et $(\mathcal{C}, \mathcal{A})$ est observable, alors l'équation algébrique de Riccati

$$\mathcal{A}^T \mathcal{X} + \mathcal{X} \mathcal{A} - \mathcal{X} \mathcal{B} \mathcal{R}^{-1} \mathcal{B}^T \mathcal{X} + \mathcal{C}^T \mathcal{C} = 0$$

admet une solution stabilisante unique qui est symétrique et définie positive. En outre, cette solution s'obtient comme la limite, lorsque t tend vers l'infini, de toute solution de l'équation différentielle de Riccati

$$-\rho \dot{\mathcal{X}}(t) = \mathcal{A}^T \mathcal{X}(t) + \mathcal{X}(t) \mathcal{A} - \mathcal{X}(t) \mathcal{B} \mathcal{R}^{-1} \mathcal{B}^T \mathcal{X}(t) + \mathcal{C}^T \mathcal{C}$$

pour toute condition initiale symétrique et définie non négative.

GRAMIEN DE COMMANDABILITE

Un système linéaire invariant commandable décrit par une réalisation d'état (F, G, H) est asymptotiquement stable si et seulement si l'équation algébrique

$$FW_c + W_c F^T + GG^T = 0$$

admet une solution symétrique définie positive qui n'est autre que le gramien de commandabilité du système.

GRAMIEN D'OBSERVABILITE

Un système linéaire invariant observable décrit par une réalisation d'état (F, G, H) est asymptotiquement stable si et seulement si l'équation algébrique

$$F^T W_o + W_o F + H^T H = 0$$

admet une solution symétrique définie positive qui n'est autre que le gramien d'observabilité du système.

ESTIMATION OPTIMALE

- ♠ Modèle d'estimation optimale
- ♠ Critère d'estimation optimale
- ♠ Problème du filtrage de *Kalman* et *Bucy*
- ♠ *Filtre* de *Kalman* et *Bucy*
- ♠ *Filtre* de *Kalman* et *Bucy* stationnaire
- ♠ $FKB \Leftrightarrow OLQ$

CRITERE D'ESTIMATION OPTIMALE

Le problème d'estimation optimale consiste à déterminer en temps réel une trajectoire d'état $\{\hat{x}(t)\}_{t \in \mathcal{R}^+}$ qui minimise le critère quadratique

$$J(\hat{x}(t)) = \mathcal{E} \left\{ (x(t) - \hat{x}(t))^T Q_{es}(t) (x(t) - \hat{x}(t)) \right\}$$

avec

$$Q_{es}(t) = Q_{es}^T(t) \geq 0 \text{ pour tout } t$$

Un tel problème a été résolu **en 1964 par *Kalman* et *Bucy*** en supposant que

$$(F, G_o, H) \text{ est détectable et stabilisable}$$

PROBLEME DE FILTRAGE DE KALMAN et BUCY

Kalman et Bucy ont montré que l'estimation optimale peut être réalisée par un observateur

$$\mathcal{FKB} \begin{cases} \rho \hat{x}(t) = F\hat{x}(t) + Gu(t) + M(t)(y(t) - \hat{y}(t)) \\ \hat{y}(t) = H\hat{x}(t) \end{cases}$$

où le gain d'observation, i.e. $\{M(t)\}_{t \in \mathcal{R}^+} \in \mathcal{R}^{n \times p}$, est déterminé de manière à réaliser la minimisation requise du critère quadratique

$$J(\hat{x}(t)) = \mathcal{E} \{ \tilde{x}^T(t) Q_{es}(t) \tilde{x}(t) \}$$

↑

$$\tilde{x}(t) \triangleq x(t) - \hat{x}(t)$$

FILTRE DE KALMAN et BUCY

Considérons la classe des systèmes décrits par MESOP, le filtre de Kalman et Bucy est un estimateur à variance minimal donné par

$$\mathcal{FKB} \begin{cases} \rho \hat{x}(t) = (F - M(t)) \hat{x}(t) + Gu(t) + M(t)y(t) \\ M(t) = \Sigma(t)H^T R_o^{-1} \\ \rho \Sigma(t) = F\Sigma(t) + \Sigma(t)F^T - \Sigma(t)H^T R_o^{-1} H \Sigma(t) + Q_o \end{cases}$$

avec $\hat{x}(0) = \hat{x}_o$ et $\Sigma(0) = \Sigma_o$.

PREUVE PARTIELLE : UNE REMARQUE PERTINENTE

Les propriétés du \mathcal{FKB} peuvent être étudiées à partir de l'analyse de l'équation différentielle stochastique de l'erreur d'observation associée, soit

$$\rho \tilde{x}(t) = (F - M(t)H) \tilde{x}(t) + Ew(t) - M(t)v(t)$$

Pour ce faire, posons

$$\tilde{x}_m(t) = \mathcal{E}\{\tilde{x}(t)\} \text{ et } \Sigma(t) = \mathcal{E}\{(\tilde{x}(t) - \tilde{x}_m(t))(\tilde{x}(t) - \tilde{x}_m(t))^T\}$$

On aura

$$\rho \tilde{x}_m(t) = (F - M(t)H) \tilde{x}_m(t)$$

$$\rho \Sigma(t) = (F - M(t)H) \Sigma(t) + \Sigma(t) (F - M(t)H)^T + Q_o + M(t)R_o M^T(t)$$

Notons que

$$\hat{x}(0) = \mathcal{E}\{x(0)\} = x_o \implies \tilde{x}_m(t) = 0 \text{ pour tout } t$$

Et si la dynamique en moyenne de l'erreur d'estimation est asymptotiquement stable, alors on a

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \tilde{x}_m(t) = 0$$

Par ailleurs, on a

$$J(\hat{x}(t)) = \tilde{x}_m^T(t) Q_{es}(t) \tilde{x}_m(t) + \text{trace}(\Sigma(t) Q_{es}(t))$$

↓

*on peut chercher le gain d'observation $\{M(t)\}_{t \in \mathcal{R}^+}$
qui minimise la variance de l'erreur d'observation*

PREUVE PARTIELLE : UN LEMME TECHNIQUE

Soient $\{\Sigma(t)\}$ et $\{\bar{\Sigma}(t)\}$ les solutions des équations différentielles

$$\begin{aligned} \rho \Sigma(t) &= F \Sigma(t) + \Sigma(t) F^T + Q_o \\ &\quad - (M(t) H \Sigma(t) + \Sigma(t) H^T M(t)^T - M(t) R_o M(t)^T) \end{aligned}$$

et

$$\rho \bar{\Sigma}(t) = F \bar{\Sigma}(t) + \bar{\Sigma}(t) F^T + Q_o - \bar{\Sigma}(t) H^T R_o^{-1} H \bar{\Sigma}(t)$$

avec $\Sigma(0) = \bar{\Sigma}(0) = \Sigma_o$. Supposons que $\Sigma_o = \Sigma_o^T \geq 0$, alors on a

$$\Sigma(t) - \bar{\Sigma}(t) \geq 0 \quad \forall t \quad \text{et} \quad \Sigma(t) = \bar{\Sigma}(t) \quad \text{pour} \quad M(t) = \bar{\Sigma}(t) H^T R_o^{-1}$$

PREUVE DU LEMME

Soit $\{\psi(t, \tau)\}$ la matrice de transition du \mathcal{FKB} , i.e. la solution de l'équation différentielle

$$\rho \psi(t, \tau) = (F - M(t) H) \psi(t, \tau) \quad \text{avec} \quad \psi(t, t) = I_n$$

et posons

$$\Delta M(t) \triangleq M(\tau) - \bar{\Sigma}(\tau) H^T R_o^{-1}$$

Compte tenu des équations différentielles matricielles considérées, on a

$$\begin{aligned} \rho (\Sigma(t) - \bar{\Sigma}(t)) &= F (\Sigma(t) - \bar{\Sigma}(t)) + (\Sigma(t) - \bar{\Sigma}(t)) F^T \\ &\quad - M(t) H \Sigma(t) - \Sigma(t) H^T M^T(t) + M(t) R_o M^T(t) \\ &\quad + \bar{\Sigma}(t) H^T R_o^{-1} H \bar{\Sigma}(t) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \rho(\Sigma(t) - \bar{\Sigma}(t)) &= (F - M(t)H) (\Sigma(t) - \bar{\Sigma}(t)) - M(t)H\Sigma(t) \\ &\quad + (\Sigma(t) - \bar{\Sigma}(t)) (F - M(t)H)^T \\ &\quad + (M(t) - \bar{\Sigma}(t)H^T R_o^{-1}) R_o (M(t) - \bar{\Sigma}(t)H^T R_o^{-1})^T \end{aligned}$$

Et en vertu du résultat sur le calcul différentiel stochastique, on en déduit aisément que

$$\Sigma(t) - \bar{\Sigma}(t) = \int_o^t \psi(t, \tau) (\Delta M(\tau)) R_o (\Delta M(\tau))^T \psi^T(t, \tau) d\tau$$

Ceci conduit naturellement au résultat escompté puisque

$$\int_o^t \psi(t, \tau) (\Delta M(\tau)) R_o (\Delta M(\tau))^T \psi^T(t, \tau) d\tau > 0$$

PREUVE PARTIELLE

COMPORTEMENT ASYMPTOTIQUE DU \mathcal{FKB}

$$\exists \Sigma = \Sigma^T > 0 \quad / \quad \lim_{t \rightarrow \infty} \Sigma(t) = \Sigma$$

↓

$$\mathcal{FKBVS} \left\{ \begin{array}{l} \rho \hat{x}(t) = (F - MH) \hat{x}(t) + My(t) \\ M = \Sigma H^T R_o^{-1} \\ F\Sigma + \Sigma F^T - \Sigma H^T R_o^{-1} H \Sigma + Q_o = 0 \end{array} \right.$$

PREUVE PARTIELLE : STABILITE DU FKBS

$$F\Sigma + \Sigma F^T - \Sigma H^T R_o^{-1} H \Sigma + Q_o = 0$$

et

$$M = \Sigma H^T R_o^{-1}$$

\Downarrow

$$(F - MH)\Sigma + \Sigma(F - MH)^T = -(Q_o + MR_o M^T)$$

\Downarrow

$$\mathcal{V}(F - MH) \subset \mathcal{D}_s$$

RESULTAT FONDAMENTAL

Comme la réalisation d'état (F, G_o, H) est minimale, les propriétés suivantes sont vraies

P1. L'EAR admet une solution unique symétrique définie positive et stabilisante $\Sigma = \Sigma^T > 0$.

P2. Le problème d'estimation optimale est réalisé par le FKBS

P3. Le FKBS réalise les propriétés statistiques suivantes

$$\mathcal{E} \{ \tilde{x}(t) \hat{x}(t)^T \} = 0$$

$$\mathcal{E} \{ \tilde{y}(t) \hat{x}(t)^T \} = 0 \text{ avec } \tilde{y}(t) = y(t) - \hat{y}(t)$$

$$\mathcal{E} \{ \tilde{y}(t) \tilde{y}(t - \tau)^T \} = R_o \delta(\tau)$$

INGENIERIE DU *FILTRE DE KBS*

$\uparrow (Q_o, R_o) \downarrow$

INGENIERIE DE L'OBSERVATEUR *LQ*

APPLICATION : COMMANDE *LQG*

- ♠ Formulation du problème
- ♠ Commande *LQ*
- ♠ Commande *LQG*
- ♠ Conclusion

FORMULATION DU PROBLEME

Minimiser, au sens d'un horizon fuyant, le critère quadratique

$$J(u(t)) = \mathcal{E} \left\{ \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_t^{t+T} (x^T(\tau) Q_c x(\tau) + u^T(\tau) R_c u(\tau)) d\tau \right\}$$

avec

$$Q_c = H_c^T H_c \geq 0 \quad \text{et} \quad R_c = R_c^T > 0$$

pour la classe des systèmes (2) assujettis aux hypothèses \mathcal{HC} et \mathcal{HO} .

COMMANDE LQ

Minimiser, au sens d'un horizon fuyant, le critère quadratique

$$J(u(t)) = \mathcal{E} \left\{ \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_t^{t+T} (x^T(\tau) Q_c x(\tau) + u^T(\tau) R_c u(\tau)) d\tau \right\}$$

pour la classe des systèmes (2) satisfaisant \mathcal{HC} en supposant que toutes les variables d'état sont mesurables, soit

$$\mathcal{E} \{x(t)\} = x(t)$$

RESULTAT FONDAMENTAL

Les performances de la commande \mathcal{LQ} sont réalisées par la loi de commande avec retour d'état stationnaire

$$\mathcal{CLQ} \left\{ \begin{array}{l} u(t) = -Kx(t) \\ K = R_c^{-1}G^T P \\ PF + F^T P - PGR_c^{-1}G^T P + Q_c = 0 \end{array} \right.$$

Le système de commande avec retour d'état correspondant est asymptotiquement stable et le coût optimal associé est donné par

$$J(u^*(t)) = \text{trace}(PQ_o)$$

COMMANDE \mathcal{LQG}

↑↓

COMMANDE $\mathcal{LQ} \oplus$ FILTRE \mathcal{KB} **COMMANDE \mathcal{LQD}**

↑↓

COMMANDE $\mathcal{LQ} \oplus$ OBSERVATEUR \mathcal{LQ}

COMMANDE \mathcal{LQG}

$$J(u^*(t)) = \text{trace}(PQ_o) \quad \uparrow \quad \mathcal{MJ}^*\mathcal{D} \quad \downarrow \quad J(u^*(t)) = \text{trace}(Px_o x_o^T)$$

COMMANDE \mathcal{LQD} **\mathcal{K} alman bless you**