

SYSTEMES LINEAIRES

APPROCHE D'ETAT

Mohammed M'SAAD

ENSICAEN, 6 Boulevard Maréchal Juin, 14050 Caen Cedex, France

AU MENU

- ♠ Motivations
- ♠ Les diverses représentations
- ♠ Stabilité
- ♠ Propriétés structurelles
- ♠ Modes, pôles et zéros
- ♠ Commande avec retour d'état et observateurs asymptotiques
- ♠ Composition des systèmes
- ♠ Normes H_2 et H_∞

INRIA, INRA, ONERA
SUPAERO, SUPELEC, INPG, INPL, ENSTA, ENS
ECN, ENSEIRB, ENSICAEN, Télécom PS, ENSIP, ECL

MOTIVATIONS

AEROSPACIALE, AREVA, EDF, SAGEM, THALES
ORANGE, PSA, RENAULT
AIRBUS, CNES
CEA, IFP, STmicroelectronics

MOTIVATIONS

- ♠ Une approche d'état soutenue par
des interprétations polynomiales
- ♠ Une présentation ludique des représentations, des concepts de stabilité et des propriétés structurelles
- ♠ Un focus sur les zéros et les pôles
- ♠ Une synthèse ingénieuse sur les concepts de retour d'état et d'injection de la sortie
- ♠ Un exercice fructueux de composition des systèmes avec un focus sur leurs normes usuelles

LES DIVERSES REPRESENTATIONS

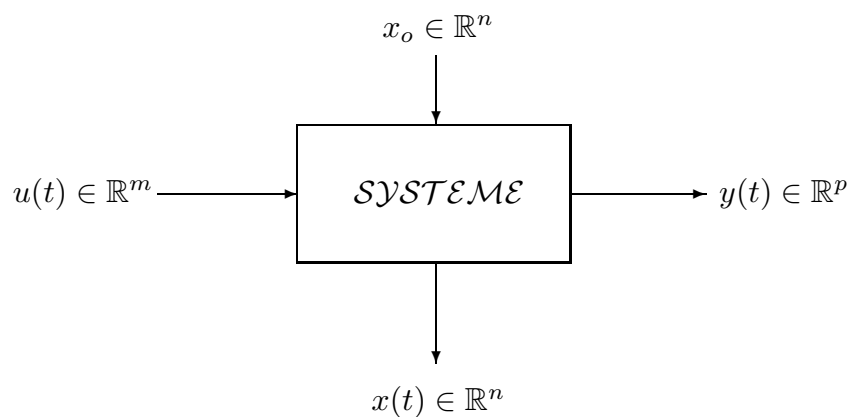
♠ Représentation d'état

Trajectoires d'état et de sortie, Réponse impulsionnelle,
Fonction de transfert et Matrice système
Interprétation des conditions initiales

♠ Représentations polynomiales

Fonction de transfert
Factorisation polynomiale première à gauche
Factorisation polynomiale première à droite

REPRESENTATIONS D'UN SYSTEME



OPERATEUR DIFFERENTIEL

$$\begin{aligned} \rho : \{f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}\} &\rightarrow \{\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}\} \\ \varphi &\rightarrow \rho\varphi = \frac{d}{dt}\varphi \end{aligned}$$

$$\mathbb{R}[\rho] = \left\{ X(\rho) = \sum_{i=0}^{nx} x_i \rho^{nx-i} \text{ avec } (x_0, \dots, x_{nx}) \in \mathbb{R}^{nx+1} \right\}$$

$$\Downarrow$$

$$X(\rho) [\varphi(t)] = \left(\sum_{i=0}^{nx} x_i \rho^{nx-i} \right) [\varphi(t)] = \sum_{i=0}^{nx} x_i (\rho^{nx-i} \varphi(t))$$

$$M(\rho) \in \mathbb{R}^{p \times m} [\rho]$$

$$\Downarrow$$

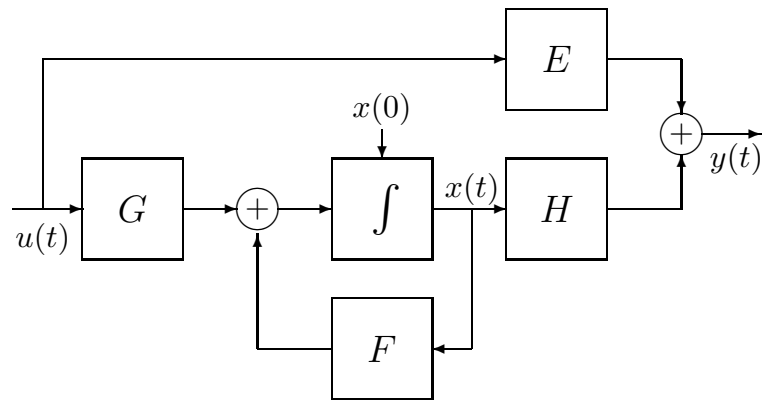
$$M(\rho) = [M_{ij}(\rho)]_{(i,j) \in [1,p] \times [1,m]} \text{ avec } M_{ij}(\rho) \in \mathbb{R}[\rho]$$

$$\Downarrow$$

$$\varphi(t) = \begin{pmatrix} \varphi_1(t) \\ \vdots \\ \varphi_m(t) \end{pmatrix} \rightarrow M(\rho) [\varphi(t)] = \begin{pmatrix} \sum_{j=1}^m M_{1j}(\rho) \varphi_j(t) \\ \vdots \\ \sum_{j=1}^m M_{pj}(\rho) \varphi_j(t) \end{pmatrix}$$

REPRESENTATION D'ETAT

$$\text{SYS} \begin{cases} \dot{x}(t) = Fx(t) + Gu(t) & \text{avec } x(0) = x_0 \\ y(t) = Hx(t) + Eu(t) \end{cases}$$



TRAJECTOIRES D'ETAT ET DE SORTIE

$$\text{SYS} \begin{cases} \dot{x}(t) = Fx(t) + Gu(t) & \text{avec } x(0) = x_0 \\ y(t) = Hx(t) + Eu(t) \end{cases}$$

↕

$$\text{SYS} \begin{cases} x(t) = e^{Ft}x(0) + \int_0^t e^{F(t-\tau)}Gu(\tau)d\tau \\ y(t) = He^{Ft}x(0) + \int_0^t He^{F(t-\tau)}Gu(\tau)d\tau + Eu(t) \end{cases}$$

REPONSE IMPULSIONNELLE

$$y(t) = He^{Ft}x(0) + \int_0^t He^{F(t-\tau)}Gu(\tau)d\tau + Eu(t)$$

$$\Downarrow$$

$$g(t) = \begin{cases} He^{Ft}G\alpha(t) & \text{pour } t > 0 \\ E\delta(t) & \text{ailleurs} \end{cases}$$

FONCTION DE TRANSFERT

$$\text{SYS} \begin{cases} \rho x(t) = Fx(t) + Gu(t) & \text{avec } x(0) = 0 \\ y(t) = Hx(t) + Eu(t) \end{cases}$$

$$\Downarrow$$

$$\text{SYS} \begin{cases} sX(s) = FX(s) + GU(s) \\ Y(s) = HX(s) + EU(s) \end{cases}$$

$$\downarrow$$

$$\mathcal{G}(s) = H (sI_n - F)^{-1} G + E$$

INTERPRETATION DES CONDITIONS INITIALES

$$\text{SYS} \begin{cases} \rho x(t) = Fx(t) + Gu(t) & \text{avec } x(0) = x_o \\ y(t) = Hx(t) + Eu(t) \end{cases}$$

$$\Downarrow$$

$$\text{SYS} \begin{cases} sX(s) - x_o = FX(s) + GU(s) \\ Y(s) = HX(s) + EU(s) \end{cases}$$

$$\Uparrow$$

$$Y(s) = \mathcal{G}_u(s)U(s) + \mathcal{G}_o(s)x_o\Delta(s)$$

$$\Uparrow$$

$$\mathcal{G}_u(s) = H(sI_n - F)^{-1}G + E \quad \text{et} \quad \mathcal{G}_o(s) = H(sI_n - F)^{-1}$$

INTERPRETATION DES CONDITIONS INITIALES

$$\text{SYS} \begin{cases} \rho x(t) = Fx(t) + Gu(t) & \text{avec } x(0) = x_o \\ y(t) = Hx(t) + Eu(t) \end{cases}$$

$$\Downarrow$$

$$\text{SYS} \begin{cases} \rho x(t) = Fx(t) + Gu(t) + x_o\delta(t) & \text{avec } x(0) = 0 \\ y(t) = Hx(t) + Eu(t) \end{cases}$$

MATRICE SYSTEME

$$\text{SYS} \left\{ \begin{array}{l} \rho x(t) = Fx(t) + Gu(t) \quad \text{avec } x(0) = 0 \\ y(t) = Hx(t) + Eu(t) \end{array} \right.$$

$$\Downarrow$$

$$\text{SYS} \left\{ \begin{array}{l} sX(s) - x_o = FX(s) + GU(s) \\ Y(s) = HX(s) + EU(s) \end{array} \right.$$

$$\Downarrow$$

$$\begin{bmatrix} sI_n - F & G \\ -H & E \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_o \\ -Y(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X(s) \\ -U(s) \end{bmatrix}$$

PROPRIETES DE LA MATRICE SYSTEME

$$\mathcal{M}_s(s) = \begin{bmatrix} sI_n - F & G \\ -H & E \end{bmatrix}$$

$\mathcal{P}1$. Le rang de la matrice système est relié au rang de la fonction de transfert comme suit

$$\text{rang}(\mathcal{M}_\sigma(s)) = n + \text{rang}(\mathcal{G}(s))$$

$\mathcal{P}2$. Le rang de la matrice système est invariant par un changement de base

$\mathcal{P}3$. Dans le cas des systèmes carrés, i.e. qui ont autant d'entrées que de sorties, on a

$$\det(\mathcal{G}(s)) = \frac{\det(\mathcal{M}_\sigma(s))}{\det(sI_n - F)}$$

PREUVE DE $\mathcal{P}1$

La propriété $\mathcal{P}1$ découle du fait que la matrice $sI_n - F$ est de rang plein et de la factorisation suivante de la matrice système.

$$\begin{pmatrix} sI_n - F & -G \\ H & E \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_n & 0 \\ H(sI_n - F)^{-1} & I_p \end{pmatrix} \begin{pmatrix} sI_n - F & -G \\ 0 & \mathcal{G}(s) \end{pmatrix}$$

PREUVE DE $\mathcal{P}2$

Considérons un changement de base $x(t) = T\bar{x}(t)$ qui permet de passer de la réalisation d'état (F, G, H, E) à la réalisation d'état $(T^{-1}FT, T^{-1}G, HT, E)$, la matrice système associée à la nouvelle réalisation est donnée par

$$\begin{pmatrix} sI_n - T^{-1}FT & -T^{-1}G \\ HT & E \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} T^{-1} & 0 \\ 0 & I_p \end{pmatrix} \begin{pmatrix} sI_n - F & -G \\ H & E \end{pmatrix} \begin{pmatrix} T & 0 \\ 0 & I_m \end{pmatrix}$$

Il apparaît clairement que le rang de la matrice système est invariant par changement de base.

PREUVE DE $\mathcal{P}3$

Quant à la propriété $\mathcal{P}3$, elle résulte naturellement du calcul du déterminant de la matrice système, soit

$$\begin{aligned}
 & \det(\mathcal{M}_\sigma(s)) \\
 &= \\
 & \det \begin{pmatrix} sI_n - F & -G \\ H & E \end{pmatrix} \\
 &= \\
 & \det(sI_n - F) \det(H(sI_n - F)^{-1}G + E)
 \end{aligned}$$

??????????????

PLURALITE DE LA REPRESENTATION D'ETAT

$$\text{SYS} \begin{cases} \rho x(t) = Fx(t) + Gu(t) \\ y(t) = Hx(t) + Eu(t) \end{cases}$$

$$\downarrow$$

$$x(t) = T\bar{x}(t)$$

$$\downarrow$$

$$\text{SYS} \begin{cases} \rho \bar{x}(t) = \bar{F}\bar{x}(t) + \bar{G}u(t) \\ y(t) = \bar{H}\bar{x}(t) + \bar{E}u(t) \end{cases}$$

$$x(t) = T\bar{x}(t)$$

$$\downarrow$$

$$(F, G, H, E) \longrightarrow (\bar{F}, \bar{G}, \bar{H}, \bar{E})$$

$$\uparrow$$

$$\bar{F} = T^{-1}FT \quad \bar{G} = T^{-1}G \quad \bar{H} = HT \quad \text{et} \quad \bar{E} = E$$

$$\downarrow$$

$$\det(sI_n - \bar{F}) = \det(sI_n - F) \iff \mathcal{V}(\bar{F}) = \mathcal{V}(F)$$

$$\downarrow$$

$$\bar{\mathcal{G}}(s) = \bar{H}(sI_n - \bar{F})\bar{G} + \bar{E}$$

$$= HT(T^{-1}sI_nT - T^{-1}FT)T^{-1}G + E = \mathcal{G}(s)$$

REPRESENTATIONS POLYNOMIALES

- ♠ Fonction de transfert
- ♠ Factorisation polynomiale première à droite
- ♠ Factorisation polynomiale première à gauche
- ♠ Factorisation polynomiale première à droite
- ♠ Forme de Smith-McMillan

FONCTION DE TRANSFERT

$$\text{SYS } \left\{ \begin{array}{l} Y(s) = \mathcal{G}(s)U(s) \end{array} \right.$$

$$\downarrow$$

$$\mathcal{G}(s) = [\mathcal{G}_{ij}(s)]_{(i,j) \in [1,p] \times [1,m]}$$

$$\uparrow$$

$$\mathcal{G}(s) \in \mathbb{R}^{p \times m}(s) \text{ est } \left(\begin{array}{ll} \textit{strictement propre} & \textit{si } \lim_{s \rightarrow \infty} \mathcal{G}(s) = 0 \\ \textit{propre} & \textit{si } \lim_{s \rightarrow \infty} \mathcal{G}(s) \textit{ est finie} \end{array} \right.$$

FACTORISATION POLYNOMIALE PREMIERE A DROITE

$$\mathcal{FPD} \left\{ \mathcal{G}(s) = B_d(s)A_d^{-1}(s) \right.$$

où $B_d(s)$ est une matrice polynomiale de dimension $p \times m$ et $A_d(s)$ est une matrice polynomiale inversible de dimension m qui sont premières entre elles à droite.

↓

$$\mathcal{REP} \left\{ \begin{array}{l} A_d(\rho)z(t) = u(t) \\ y(t) = B_d(\rho)z(t) \end{array} \right.$$

↑

Représentation d'état partiel

FACTORISATION POLYNOMIALE PREMIERE A GAUCHE

$$\mathcal{FPG} \left\{ \mathcal{G}(s) = A_g^{-1}(s)B_g(s) \right.$$

où $B_g(s)$ est une matrice polynomiale de dimension $p \times m$ et $A_g(s)$ est une matrice polynomiale inversible de dimension p qui sont premières entre elles à gauche.

↓

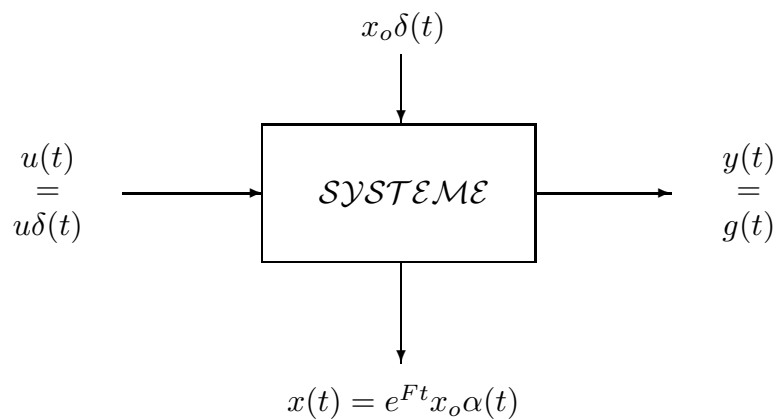
$$\mathcal{EQD} \left\{ A_g(\rho)y(t) = B_g(\rho)u(t) \right.$$

↑

Equation différentielle

STABILITE

- Principe
- Diagonalisation
- Stabilité interne
- Stabilité externe (\mathcal{SEBSB})
- Stabilité externe \leq Stabilité interne
- Remarque

PRINCIPE

REPONSES AUX ENTREES IMPULSIONNELLES

- Stabilité interne

$$u(t) = 0 \text{ pour tout } t \longrightarrow \{x_o \delta(t)\} \longrightarrow \{x(t)\}$$

- Stabilité externe (\mathcal{SEBSB})

$$x_o = 0 \longrightarrow \{u \delta(t)\} \longrightarrow \{g(t)\}$$

DIAGONALISATION

$$\mathcal{V}(F) = \{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_r\} \text{ avec } \sum_{i=1}^r m_i = n$$

↓

$$T^{-1}FT = J = \text{diag} \{J_1, J_2, \dots, J_r\}$$

↑

$$\lambda_i \longrightarrow J_i = \begin{bmatrix} \lambda_i & * & & & \\ & \lambda_i & * & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & \lambda_i & * \\ & & & & \lambda_i \end{bmatrix} \in \mathcal{C}^{m_i \times m_i}$$

λ_i est une valeur propre non défective

$$J_i = \lambda_i I_{m_i} = \begin{bmatrix} \lambda_i & & & & \\ & \lambda_i & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & \lambda_i & \\ & & & & \lambda_i \end{bmatrix} \in \mathcal{C}^{m_i \times m_i}$$

λ_i admet m_i vecteurs propres indépendants

F est une matrice cyclique

$$J_i = \begin{bmatrix} \lambda_i & 1 & & & \\ & \lambda_i & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & \lambda_i & 1 \\ & & & & \lambda_i \end{bmatrix} \in \mathcal{C}^{m_i \times m_i}$$

J_i est un bloc de Jordan

STABILITE INTERNE

$$\mathcal{SA} \left\{ \begin{array}{l} \dot{x}(t) = Fx(t) + x_0\delta(t) \text{ avec } x(0) = 0 \end{array} \right.$$

- Stabilité asymptotique

$$\lim_{t \rightarrow \infty} e^{Ft} = 0_n$$

$$\Updownarrow$$

$$\mathcal{V}(F) \subset \mathcal{D}_{sa}$$

$$\Updownarrow$$

$$\forall Q = Q^T > 0 \exists P = P^T > 0 / F^T P + P F = -Q$$

- Stabilité

$$\{\|e^{Ft}\|\} \text{ est bornée}$$

$$\Updownarrow$$

$$\left(\mathcal{V}(F) \subset \mathcal{D}_s \right) \text{ et } \left(\lambda_i \in \mathcal{A}_{im} \implies \lambda_i \text{ n'est pas défective} \right)$$

$$\Updownarrow$$

$$\forall Q = Q^T \geq 0 \exists P = P^T \geq 0 / F^T P + P F = -Q$$

- Instabilité

$\{\|e^{Ft}\|\}$ n'est pas bornée

\Updownarrow

$\exists i \in [1, n] / (\lambda_i \notin \mathcal{D}_s) \text{ ou } (\lambda_i \in \mathcal{A}_{im} \implies \lambda_i \text{ est défective})$

STABILITE EXTERNE (\mathcal{EBSB})

- Réponse impulsionnelle

$$\exists K_g \in [0, \infty) / \int_0^\infty |g(t)| dt \leq K_g$$

\Updownarrow

$$\lim_{t \rightarrow \infty} g(t) = 0$$

- Fonction de transfert

$$\mathcal{CP}(\text{SYS}) \subset \mathcal{D}_{sa}$$

\Updownarrow

$$\Phi(s) = 0 \implies \Re(s) < 0$$

UNE NUANCE!

- *Une assertion vraie*

$$\textit{Stabilité interne} \implies \textit{Stabilité externe}$$

- *Une assertion fausse*

$$\textit{Stabilité externe} \implies \textit{Stabilité interne}$$

↑

modes non commandables et/ou non observables

REMARQUE

- *Stabilité interne*

*Trajectoire d'état du système issue d'une entrée impulsionnelle
équivalente aux conditions initiales*

- *Stabilité externe*

*Réponse impulsionnelle du système
avec des conditions initiales nulles*

COMMANDABILITE et STABILISABILITE

- ♠ Critères de commandabilité
- ♠ Invariance de la commandabilité
- ♠ Forme canonique commandable
- ♠ Décomposition selon la commandabilité
- ♠ Stabilisabilité
- ♠ Conclusion

$$\text{SYS} \begin{cases} \dot{x}(t) = Fx(t) + Gu(t) \text{ avec } x(0) = x_0 \\ y(t) = Hx(t) + Eu(t) \end{cases}$$

↓

$$\mathcal{C}(F, G) = \begin{bmatrix} G & FG & \dots & F^{n-1}G \end{bmatrix}$$

$$\mathcal{W}_c(t) = \int_0^t e^{F\tau} G G^T e^{F^T \tau} d\tau$$

CRITERES DE COMMANDABILITE

CR1 La paire (F, G) est commandable

CR2 La matrice de commandabilité du système $\mathcal{C}(F, G)$ est de rang plein, i.e.

$$\mathcal{C}(F, G) (\mathcal{C}(F, G))^T > 0$$

CR3 Le grammien de commandabilité est une matrice définie positive, i.e.

$$\mathcal{W}_c(t) > 0$$

CR4 Il n'existe aucune matrice régulière T telle que

$$\bar{F} = T^{-1}FT = \begin{bmatrix} F_c & F_{c\bar{c}} \\ 0 & F_{\bar{c}} \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad \bar{G} = T^{-1}G = \begin{bmatrix} G_c \\ 0 \end{bmatrix}$$

où $F_c \in \mathbb{R}^{r \times r}$, $F_{\bar{c}} \in \mathbb{R}^{(n-r) \times (n-r)}$ et $G_c \in \mathbb{R}^{r \times m}$ avec $r < n$.

CR5 Il n'existe aucun vecteur propre à gauche v de la matrice d'état F , qui vérifie la relation d'orthogonalité $v^T G = 0$, i.e.

$$\text{rang} \left(\begin{bmatrix} sI_n - F & G \end{bmatrix} \right) = n \quad \forall s \in \mathbb{C}$$

CR6 Soit $P(s) \in \mathbb{R}_n[s]$ avec $np = n$, l'équation algébrique

$$\det(sI_n - F + GK) = P(s)$$

admet toujours une solution $K \in \mathbb{R}^{m \times n}$

GRAMMIEN DE COMMANDABILITE

$$\mathcal{W}_c(t) = \int_0^t e^{F\tau} G G^T e^{F^T \tau} d\tau$$

↓

$$\rho \mathcal{W}_c(t) = F \mathcal{W}_c(t) + \mathcal{W}_c(t) F^T + G G^T$$

avec

$$\mathcal{W}_c(0) = 0$$

RESULTAT FONDAMENTAL

Considérons la classe des systèmes asymptotiquement stables et commandables, alors on a

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \mathcal{W}_c(t) = \mathcal{W}_c$$

et le grammien de commandabilité \mathcal{W}_c n'est autre que la solution unique symétrique et définie positive de l'équation

$$F \mathcal{W}_c + \mathcal{W}_c F^T + G G^T = 0$$

INVARIANCE DE LA COMMANDABILITE

$$x(t) = T\bar{x}(t)$$

$$\Downarrow$$

$$\bar{F} = T^{-1}FT \quad \text{et} \quad \bar{G} = T^{-1}G$$

$$\Downarrow$$

$$\begin{aligned} \mathcal{C}(\bar{F}, \bar{G}) &= \begin{bmatrix} \bar{G} & \bar{F}\bar{G} & \dots & \bar{F}^{n-1}\bar{G} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} T^{-1}G & T^{-1}FTT^{-1}G & \dots & T^{-1}F^{n-1}TT^{-1}G \end{bmatrix} \\ &= T^{-1} \begin{bmatrix} G & FG & \dots & F^{n-1}G \end{bmatrix} = T^{-1} \mathcal{C}(F, G) \end{aligned}$$

FORME CANONIQUE COMMANDABLE

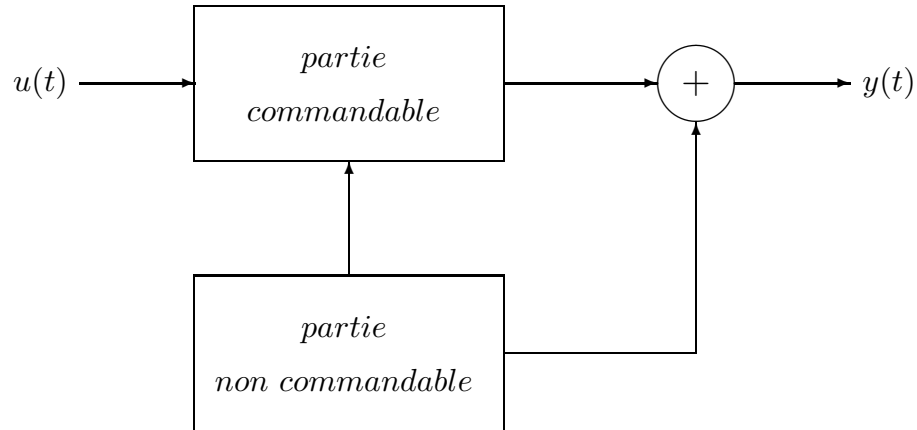
Considérons une réalisation d'état commandable (F, G, H, E) , il existe un changement de base dans l'espace d'état, $x(t) = T\bar{x}(t)$, qui conduit à une réalisation (F_c, G_c, H_c, E_c) dite forme canonique commandable caractérisée par

$$F_c = \begin{bmatrix} -a_1 & \dots & -a_{n-1} & -a_n \\ & & & 0 \\ & I_{n-1} & & \vdots \\ & & & 0 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad G_c = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

avec

$$\det(sI_n - F) = s^n + a_1s^{n-1} + \dots + a_{n-1}s + a_n$$

DECOMPOSITION SELON LA COMMANDABILITE



Pour toute réalisation d'état d'ordre n telle $\text{rang}(\mathcal{C}(F, G)) = r < n$, on peut toujours effectuer un changement de base $x(t) = T\bar{x}(t)$ qui permet de récrire le système sous la forme

$$\text{DECOM} \begin{cases} \rho\bar{x}(t) = \bar{F}z(t) + \bar{G}u(t) & \text{avec } \bar{x}(t_0) = \bar{x}_0 \\ y(t) = \bar{H}\bar{x}(t) \end{cases}$$

avec

$$\bar{F} = \begin{bmatrix} F_c & F_{c\bar{c}} \\ 0 & F_{\bar{c}} \end{bmatrix}, \quad \bar{G} = \begin{bmatrix} G_c \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad \bar{H} = \begin{bmatrix} H_c & H_{\bar{c}} \end{bmatrix}$$

où la paire $(F_c, G_c) \in \mathbb{R}^{r \times r} \times \mathbb{R}^{r \times m}$ est commandable et la fonction

$$\bar{G}(s) = \bar{H} (sI_n - \bar{F})^{-1} \bar{G} = H_c (sI_r - F_c)^{-1} G_c$$

STABILISABILITE

Un système est dit stabilisable si tous ses modes non commandables sont asymptotiquement stables, i.e. $\mathcal{V}(F_c) \subset \mathcal{D}_{sa}$



Le système est stabilisable si et seulement si la matrice

$$\begin{bmatrix} sI_n - F & G \end{bmatrix}$$

est de rang plein pour tout $s \in \mathcal{D}_{sa}$

REMARQUE

La fonction de transfert est réduite à la partie commandable du système

$$\bar{G}(s) = \bar{H} (sI_n - \bar{F})^{-1} \bar{G} = H_c (sI_r - F_c)^{-1} G_c$$



Les modes non commandables n'apparaissent pas dans la fonction de transfert

OBSERVABILITE et DETECTABILITE

- ♠ Critères d'observabilité
- ♠ Invariance de l'observabilité
- ♠ Forme canonique observable
- ♠ Décomposition selon l'observabilité
- ♠ Détectabilité
- ♠ Conclusion

$$\text{SYS} \begin{cases} \dot{x}(t) = Fx(t) + Gu(t) \text{ avec } x(0) = x_o \\ y(t) = Hx(t) + Eu(t) \end{cases}$$

↓

$$\mathcal{O}(H, F) = \begin{bmatrix} H \\ HF \\ \vdots \\ HF^{n-1} \end{bmatrix}$$

$$\mathcal{W}_o(t) = \int_0^t e^{F^T(\tau)} H^T H e^{F(\tau)} d\tau$$

CRITERES D'OBSERABILITE

CR1 La paire (H, F) est observable.

CR2 La paire (F^T, H^T) est commandable.

CR3 La matrice d'observabilité $\mathcal{O}(H, F)$ est de rang plein, i.e.

$$(\mathcal{O}(H, F))^T \mathcal{O}(H, F) > 0$$

CR4 Le grammien d'observabilité défini par

$$\mathcal{G}_o(t) = \int_0^t e^{F^T t} H H^T e^{F t} dt \quad \text{pour } t > 0$$

est une matrice définie strictement positive.

CR5 Il n'existe aucune matrice régulière T telle que

$$\bar{F} = T^{-1} F T = \begin{bmatrix} F_o & 0 \\ F_{o\bar{o}} & F_{\bar{o}} \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad \bar{H} = H T \begin{bmatrix} H_o & 0 \end{bmatrix}$$

où $F_o \in \mathbb{R}^{r \times r}$, $F_{\bar{o}} \in \mathbb{R}^{\bar{r} \times \bar{r}}$ et $H_o \in \mathbb{R}^{p \times r}$ avec $r < n$.

CR6 Il n'existe aucun vecteur propre à droite v de la matrice d'état F , qui vérifie la relation d'orthogonalité $Hv = 0$, i.e.

$$\text{rang} \left(\begin{bmatrix} H \\ sI_n - F \end{bmatrix} \right) = n \quad \forall s \in \mathbb{C}$$

CR7 Soit $P(s) \in \mathbb{R}_n[s]$ avec $np = n$, l'équation algébrique

$$\det(sI_n - F + MH) = P(s)$$

admet toujours une solution $M \in \mathbb{R}^{n \times p}$

GRAMMIEN D'OBSERVABILITE

$$\mathcal{W}_o(t) = \int_0^t e^{F^T \tau} H^T H e^{F \tau} d\tau$$

↓

$$\rho \mathcal{W}_o(t) = F^T \mathcal{W}_o(t) + \mathcal{W}_o(t) F + H^T H$$

avec

$$\mathcal{W}_o(0) = 0$$

RESULTAT FONDAMENTAL

Considérons la classe des systèmes asymptotiquement stables et observables, alors on a

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \mathcal{W}_o(t) = \mathcal{W}_o$$

et le grammien d'observabilité \mathcal{W}_o n'est autre que la solution unique symétrique et définie positive de l'équation

$$F^T \mathcal{W}_o + \mathcal{W}_o F + H^T H = 0$$

INVARIANCE DE L'OBSERVABILITE

$$x(t) = T\bar{x}(t)$$

$$\Downarrow$$

$$\mathcal{O}(\bar{H}, \bar{F}) = \begin{bmatrix} \bar{H} \\ \bar{H}\bar{F} \\ \vdots \\ \bar{H}\bar{F}^{n-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} HT \\ HTT^{-1}FT \\ \vdots \\ HTT^{-1}F^{n-1}T \end{bmatrix} = \mathcal{O}(H, F) T$$

FORME CANONIQUE OBSERVABLE

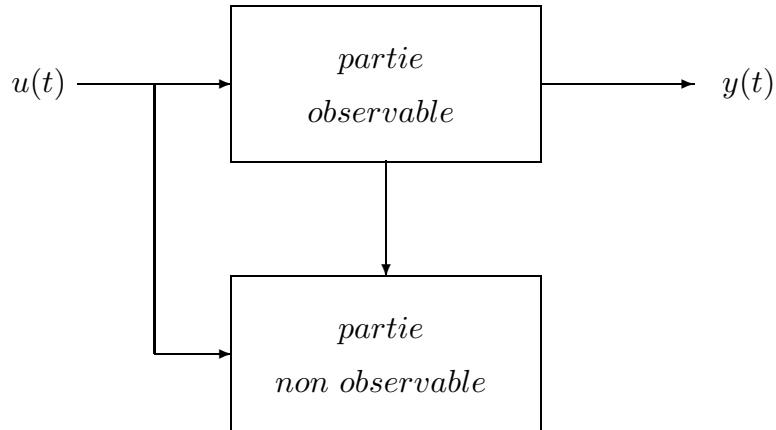
Considérons une réalisation d'état commandable (F, G, H, E) , il existe un changement de base dans l'espace d'état, $x(t) = T\bar{x}(t)$, qui conduit à une réalisation (F_o, G_o, H_o, E_o) dite forme canonique observable caractérisée par

$$F_o = \begin{bmatrix} -a_1 & & & \\ \vdots & & I_{n-1} & \\ -a_{n-1} & & & \\ -a_n & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad H_o = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}$$

avec

$$\det(sI_n - F) = s^n + a_1s^{n-1} + \dots + a_{n-1}s + a_n$$

DECOMPOSITION SELON L'OBSERVABILITE



Pour tout système d'ordre n telle que $\text{rang}(\mathcal{O}(H, F)) = r < n$, on peut toujours effectuer un changement de base $x(t) = T\bar{x}(t)$ qui permet de récrire le système sous la forme

$$\text{DECOB} \begin{cases} \dot{\bar{x}}(t) = \bar{F}\bar{x}(t) + \bar{G}u(t) \\ y(t) = \bar{H}\bar{x}(t) \end{cases}$$

avec

$$\bar{F} = \begin{bmatrix} F_o & 0 \\ F_{o\bar{o}} & F_{\bar{o}} \end{bmatrix}, \quad \bar{G} = \begin{bmatrix} G_o \\ G_{\bar{o}} \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad \bar{H} = \begin{bmatrix} H_o & 0 \end{bmatrix}$$

telle que la paire $(H_o, F_o) \in \mathbb{R}^{p \times r} \times \mathbb{R}^{r \times r}$ est observable et

$$\bar{\mathcal{G}}(s) = \bar{H} (sI_n - \bar{F})^{-1} \bar{G} = H_o (sI_r - F_o)^{-1} G_o$$

DETECTABILITE

Un système est dit détectable si tous ses modes non observables sont asymptotiquement stables, i.e. $\mathcal{V}(F_o) \subset \mathcal{D}_{sa}$.

↓

Le système est détectable si et seulement si la matrice

$$\begin{bmatrix} H \\ sI_n - F \end{bmatrix}$$

est de rang plein pour tout $s \in \mathcal{D}_{sa}$

REMARQUE

La fonction de transfert est réduite à la partie observable du système

$$\bar{G}(s) = \bar{H} (sI_n - \bar{F})^{-1} \bar{G} = H_o (sI_r - F_o)^{-1} G_o$$

↓

Les modes non observables n'apparaissent pas dans la fonction de transfert

REALISATIONS MINIMALES

Une réalisation d'état (F, G, H, E) est dite minimale si et seulement si ses configurations modale et polaire sont égales, soit

$$\Phi(s) = \det(sI_n - F)$$



Une réalisation d'état (F, G, H, E) est dite minimale si et seulement si elle est commandable et observable

POLES ET ZEROS

- Modes et pôles
- Pôles et zéros de transmission
- Zéros invariants
- Interprétations

MODES ET POLES

$$\mathcal{G}(s) = \frac{H \text{Adj}(sI_n - F) G + \det(sI_n - F) E}{\det(sI_n - F)} = \frac{B(s)}{A(s)}$$

↑

$$A(s) = \Phi(s) \text{ divise } \det(sI_n - F)$$

↓

$$\mathcal{CM}(\text{SYS}) = \mathcal{V}(F) = \{\mu \in \mathcal{C} / \det(\mu I_n - F) = 0\}$$

$$\mathcal{CP}(\text{SYS}) = \mathcal{CP}(\mathcal{G}(s)) = \{\mu \in \mathcal{C} / \Phi(\mu) = 0\}$$

↓

les pôles associés à une réalisation d'état ne sont autres que les modes commandables et observables du système

POLES ET ZEROS DE TRANSMISSION

On peut toujours récrire une fonction de transfert sous la forme donnée par

$$\mathcal{G}(s) = U_g(s) \mathcal{S}_{mc}(s) V_g(s)$$

$$\mathcal{S}_{mc}(s) = \begin{pmatrix} \Delta_{sm}(s) & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ avec } \Delta_{sm}(s) = \text{diag} \left(\frac{\Psi_i(s)}{\Phi_i(s)} \right)$$

$\mathcal{S}_{mc}(s)$ est la forme de Smith – McMillan de $\mathcal{G}(s)$

$U_g(s) \in \mathbb{R}_p^{p \times p}(s)$ et $V_g(s) \in \mathbb{R}_p^{m \times m}(s)$ sont matrices unimodulaires

$\{\Psi_i(s)\}_{i \in [1,r]}$ et $\{\Phi_i(s)\}_{i \in [1,r]}$ avec $r = \text{rang}(\mathcal{G}(s))$

sont des polynômes normalisés premiers entre eux tels que

$\Psi_i(s)$ divise $\Psi_{i+1}(s)$ pour $i \in [1, r-1]$

$\Phi_i(s)$ divise $\Phi_{i-1}(s)$ pour $i \in [2, r]$

Les pôles (resp. les zéros de transmission) de $\mathcal{G}(s)$
sont les racines des polynômes $\Phi_i(s)$ (resp. $\Psi_i(s)$)

↓

$$\Phi(s) = \prod_{i=r}^{np} \Phi_i(s) \quad \text{et} \quad \Psi(s) = \prod_{i=r}^{nz} \Psi_i(s)$$

sont les polynômes des pôles et des zéros

RESULTATS FONDAMENTAUX

RF1. Le polynôme des pôles d'une fonction de transfert est le plus petit commun multiple des dénominateurs de l'ensemble de ses mineurs non nuls **modulo** une simplification préalable des éventuels facteurs communs.

RF2. Le polynôme des zéros d'une fonction de transfert de rang normal r est le plus grand commun diviseur des numérateurs de tous les mineurs d'ordre r pourvu que **ces mineurs aient été préalablement exprimés** de manière à ce qu'ils aient comme dénominateurs le polynôme des pôles du système.

ZEROS INVARIANTS

$$\mathcal{M}_s(s) = \begin{pmatrix} sI_n - F & G \\ -H & E \end{pmatrix}$$

↓

$\zeta \in \mathbb{C}$ est un zéro invariant de la réalisation d'état du système si

$$\text{rang}(\mathcal{M}_\sigma(\zeta)) < \text{rang normal}(\mathcal{M}_\sigma(s))$$

↑

*l'appellation zéros invariants du système est motivée par
l'invariance du rang de la matrice système par
un changement de base ou un retour d'état*

REMARQUE

$$p = m$$

↓

$$\det(\mathcal{M}_\sigma(s)) = \det(sI_n - F) \det(E + H(sI_n - F)^{-1}G)$$

↕

$$\det(\mathcal{G}(s)) = \frac{\det(\mathcal{M}_\sigma(s))}{\det(sI_n - F)}$$

*les zéros de transmission d'un système carré
peuvent être déterminés à partir des zéros
du déterminant de la matrice système
si ces derniers ne sont pas des pôles du système*

RESULTATS FONDAMENTAUX

RF3. $\mathcal{M}_\sigma(s) \in \mathbb{R}^{p \times m}(s)$ est de rang normal plein en colonnes (resp. en lignes). Alors ζ est un **zéro invariant du système** si et seulement si il existe $x_o \in \mathbb{C}^{n^*}$ et $u_o \in \mathbb{C}^m$ (resp. $w_o \in \mathbb{C}^{n^*}$ et $v_o \in \mathbb{C}^p$) tels que

$$\mathcal{M}_\sigma(\zeta) \begin{pmatrix} x_o \\ u_o \end{pmatrix} = 0 \quad \left(\text{resp.} \begin{pmatrix} w_o^* & v_o^* \end{pmatrix} \mathcal{M}_\sigma(\zeta) = 0 \right)$$

Et si $u_o = 0$ (resp. $v_o = 0$), alors ζ est un mode non observable (resp. non commandable).

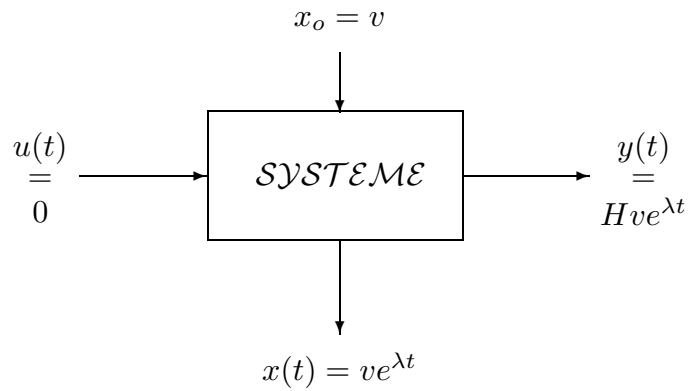
RF4. Soit $\mathcal{G}(s)$ une fonction de transfert issue d'une réalisation d'état (F, G, H, E) . Alors $\zeta \in \mathbb{C}$ est un **zéro de transmission** de $\mathcal{G}(s)$ si et seulement si $\zeta \in \mathbb{C}$ est un **zéro invariant de la réalisation minimale** (F, G, H, E) .

RF5. Considérons un système décrit par une fonction de transfert $\mathcal{G}(s) \in \mathbb{R}^{p \times m}(s)$ issue d'une réalisation d'état minimale (F, G, H, E) et soient un scalaire $\eta \in \mathbb{C}$, qui n'est pas un pôle du système, et un vecteur arbitraire $u_o \in \mathbb{C}^m$. Alors la sortie du système correspondante à l'entrée $u(t) = u_o e^{\eta t}$ et l'état initial $x_o = -(F - \eta I_n)^{-1} G u_o$ est donnée par

$$y(t) = \mathcal{G}(\eta) u_o e^{\eta t} \quad \text{pour tout } t \geq 0$$

INTERPRETATION D'UN MODE

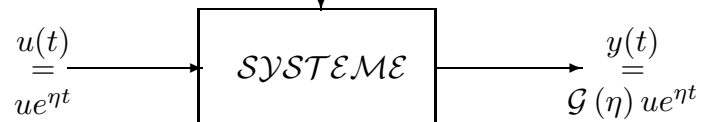
(λ, v) est un mode de F



INTERPRETATION D'UN ZERO

$\eta \notin \mathcal{V}(F)$

$$x_0 = -(F - \eta I_n)^{-1} G$$



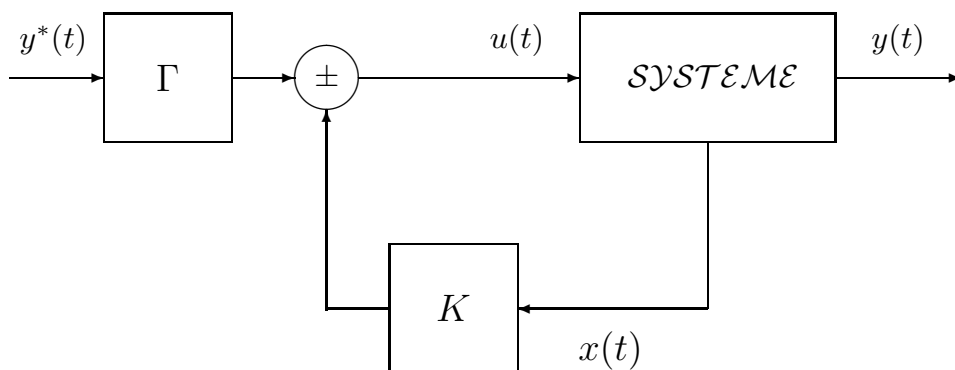
$$x(t) = (\eta I_n - F)^{-1} G e^{\eta t}$$

↑

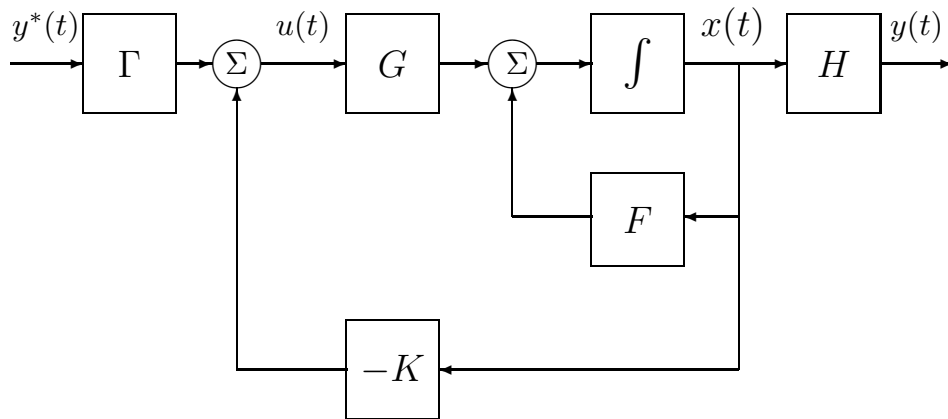
$\mathcal{RF3} - \mathcal{RF5}$

COMMANDE ET OBSERVATION

- Commande avec retour d'état
- Observateurs asymptotiques
- Commande avec retour d'état incorporant un observateur
- Interprétation polynomiale

COMMANDE AVEC RETOUR D'ETAT

COMMANDE AVEC RETOUR D'ETAT



- Le système

$$SYS \begin{cases} \dot{x}(t) = Fx(t) + Gu(t) \\ y(t) = Hx(t) \end{cases}$$

- La loi de commande avec retour d'état

$$CR\mathcal{E} \begin{cases} u(t) = -Kx(t) + \Gamma y^*(t) \end{cases}$$

- Le système de commande avec retour d'état

$$SCR\mathcal{E} \begin{cases} \dot{x}(t) = (F - GK)x(t) + G\Gamma y^*(t) \\ y(t) = Hx(t) \end{cases}$$

$$\mathcal{G}(s) = H (sI_n - F) G = \frac{H \text{Adj} (sI_n - F) G}{\det (sI_n - F)}$$

$$\downarrow$$

$$\mathcal{CR}\mathcal{E}$$

$$\downarrow$$

$$\mathcal{G}_{scre}(s) = H (sI_n - F + GK) G \Gamma = \frac{H \text{Adj} (sI_n - F + GK) G}{\det (sI_n - F + GK)} \Gamma$$

$$\downarrow$$

$$m = p = 1$$

$$\downarrow$$

$$\mathcal{G}_{scre}(s) = \frac{H \text{Adj} (sI_n - F + GK) G}{\det (sI_n - F + GK)} \Gamma = \frac{H \text{Adj} (sI_n - F) G}{\det (sI_n - F + GK)} \Gamma$$

Par ailleurs, la matrice système du système de commande avec retour d'état peut se mettre sous la forme

$$\begin{pmatrix} sI_n - F + GK & -G \\ H - EK & E \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} sI_n - F & -G \\ H & E \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_n & 0 \\ -K & I_m \end{pmatrix}$$

Il apparait alors clairement que le rang de la matrice système et les zéros invariants d'un système sont invariant par retour d'état.

RESULTATS USUELS

$\mathcal{R}1$ *Assignement arbitraire des modes des systèmes de commande avec retour d'état*

$\mathcal{R}2$ *Les invariants d'un système par retour d'état*

*les zéros invariants
la propriété de commandabilité
les modes non commandables*

$\mathcal{R}3$ *Analyse des performances nominales et de la robustesse*

SYNTHESE MODALE

Le système de commande avec retour d'état est asymptotiquement stable si et seulement si la propriété suivante est satisfaite

$$\left(\mathcal{V}(F - GK) \subset \mathcal{D}_s \right)$$

↓

$$?K / \det(sI_n - F + GK) = \prod_{i=1}^n (s - \mu_{ci}^*)$$

↑

$$\{\mu_{c1}^*, \dots, \mu_{cn}^*\} \subset \mathcal{D}_{sp}$$

INVARIANCE DES MODES NON COMMANDABLES

Considérons le système décrit par

$$SYSDC \begin{cases} \rho x(t) = Fx(t) + Gu(t) \text{ avec } x(0) = x_o \\ y(t) = Hx(t) \end{cases}$$

avec

$$F = \begin{bmatrix} F_c & F_{c\bar{c}} \\ 0 & F_{\bar{c}} \end{bmatrix}, \quad G = \begin{bmatrix} G_c \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad H = \begin{bmatrix} H_c & H_{\bar{c}} \end{bmatrix}$$

en boucle fermée avec la loi de commande avec retour d'état

$$u(t) = -Kx(t) + \Gamma y^*(t) \quad \text{avec} \quad K = \begin{bmatrix} K_c & K_{\bar{c}} \end{bmatrix}$$

Le système de commande correspondant est donné par

$$SCRE \begin{cases} \rho x(t) = \begin{bmatrix} F_c - G_c K_c & F_{c\bar{c}} - G_c K_{\bar{c}} \\ 0 & F_{\bar{c}} \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} G_c \\ 0 \end{bmatrix} \Gamma y^*(t) \\ y(t) = Hx(t) \end{cases}$$

↓

$$\begin{bmatrix} F_c - G_c K_c & F_{c\bar{c}} - G_c K_{\bar{c}} \\ 0 & F_{\bar{c}} \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} G_c \Gamma \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{bmatrix} H_c & H_{\bar{c}} \end{bmatrix}$$

REALISATION D'ETAT DU SYSTEME DE COMMANDE

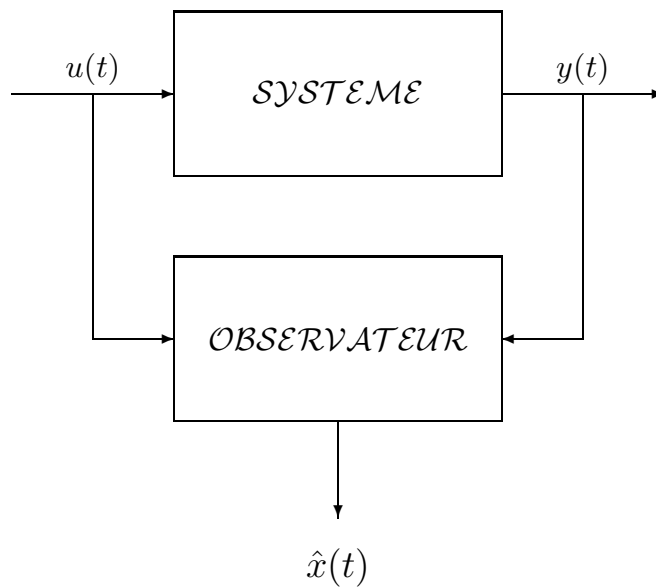
Le polynôme caractéristique d'un tel système de commande est donné par

$$\begin{aligned} P_{ccte}(s) &= \det(sI_n - F + GK) \\ &= \det(sI_r - F_c + G_c K_c) \det(sI_{(n-r)} - F_{\bar{c}}) \end{aligned}$$

↓

Invariance des modes non commandables par retour d'état

OBSERVATION DES SYSTEMES

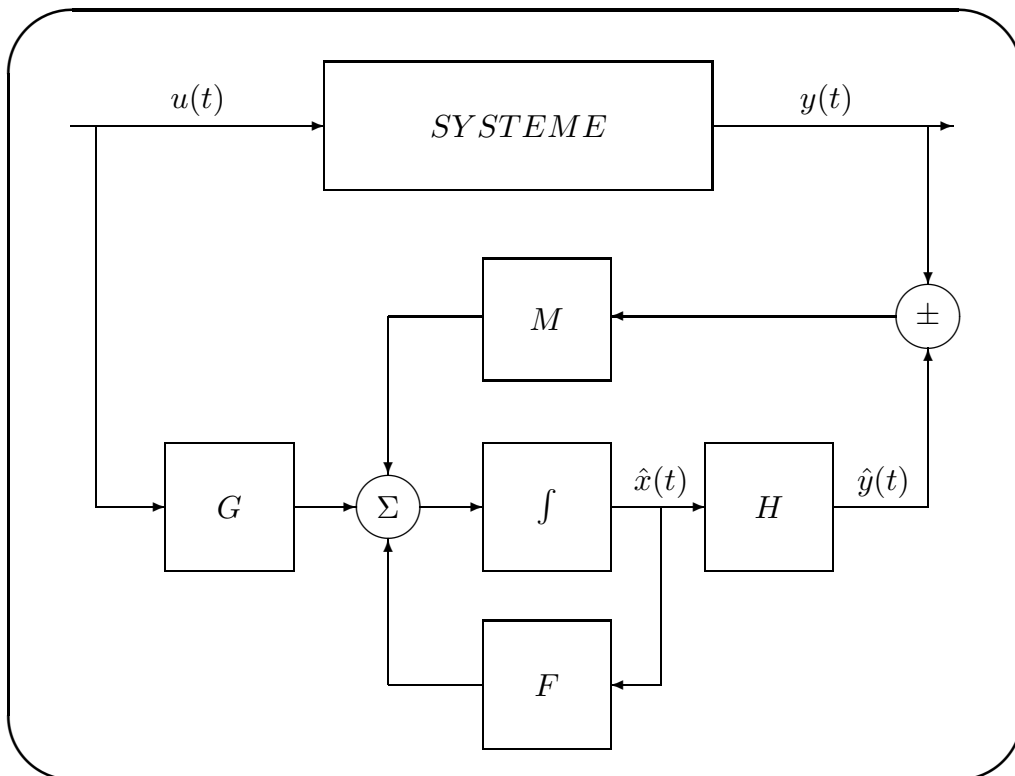


Système

$$\text{SYS} \begin{cases} \dot{x}(t) = Fx(t) + Gu(t) \\ y(t) = Hx(t) \end{cases}$$

Observateur asymptotique

$$\text{OBSA} \begin{cases} \dot{\hat{x}}(t) = F\hat{x}(t) + Gu(t) + M(y(t) - \hat{y}(t)) \\ \hat{y}(t) = H\hat{x}(t) \end{cases}$$



ERREUR D'OBSERVATION

$$\tilde{x}(t) \triangleq x(t) - \hat{x}(t)$$

↓

$$\rho \tilde{x}(t) = (F - MH) \tilde{x}(t) \text{ avec } \tilde{x}(0) = \tilde{x}_o$$

SYNTHESE MODALE

L'observateur est asymptotiquement stable si et seulement si la propriété suivante est satisfaite

$$\left(\mathcal{V}(F - MH) \subset \mathcal{D}_{sa} \right)$$

↓

$$?M / \det(sI_n - F + MH) = \prod_{i=1}^n (s - \mu_{oi}^*)$$

↑

$$\{\mu_{o1}^*, \dots, \mu_{on}^*\} \subset \mathcal{D}_{sp}$$

INVARIANCE DES MODES NON OBSERVABLES

Considérons un observateur asymptotique issu d'une réalisation d'état obtenue par une décomposition selon l'observabilité, soit

$$OBS \left\{ \begin{array}{l} \rho \hat{x}(t)(t) = F \hat{x}(t) + Gu(t) + M(y(t) - \hat{y}(t)) \\ \hat{y}(t) = H \hat{x}(t) \end{array} \right.$$

avec

$$F = \begin{bmatrix} F_o & 0 \\ F_{o\bar{o}} & F_{\bar{o}} \end{bmatrix}, \quad G = \begin{bmatrix} G_o \\ G_{\bar{o}} \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad H = \begin{bmatrix} H_o & 0 \end{bmatrix}$$

$$M = \begin{bmatrix} M_o \\ M_{\bar{o}} \end{bmatrix}$$

L'erreur d'observation correspondante est donné par

$$\mathcal{EROBS} \left\{ \begin{array}{l} \rho \tilde{x}(t) = \begin{bmatrix} F_o - M_o H_o & 0 \\ F_{o\bar{o}} - M_{\bar{o}} H_o & F_{\bar{o}} \end{bmatrix} \tilde{x}(t) \\ \tilde{y}(t) = \begin{bmatrix} H_o & 0 \end{bmatrix} \tilde{x}(t) \end{array} \right.$$

↓

$$\begin{bmatrix} F_o - M_o H_o & 0 \\ F_{o\bar{o}} - M_{\bar{o}} H_o & F_{\bar{o}} \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{bmatrix} H_o & 0 \end{bmatrix}$$

REALISATION D'ETAT DE L'ERREUR D'OBSERVATION

Le polynôme caractéristique de l'équation d'erreur d'observation est donnée par

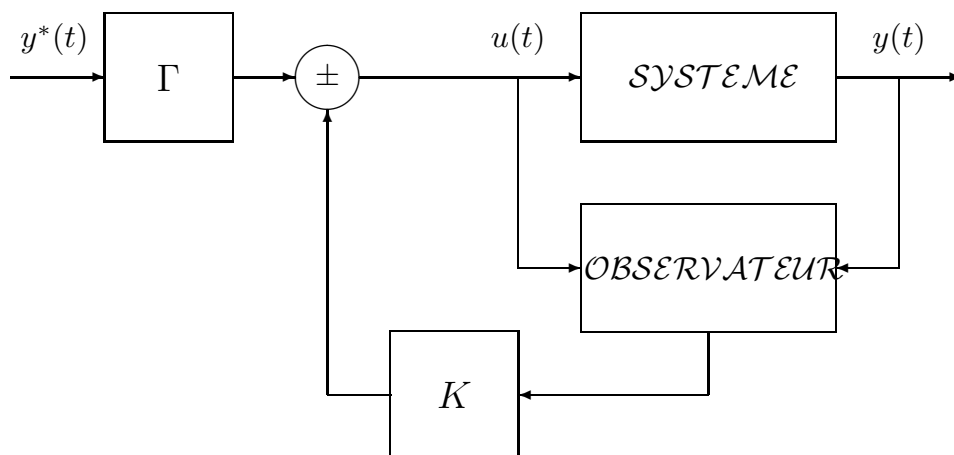
$$\begin{aligned} P_{cobs}(s) &= \det(sI_n - F + MH) \\ &= \det(sI_r - F_o + M_o H_o) \det(sI_{(n-r)} - F_{\delta c}) \end{aligned}$$

↓

Invariance des modes non observables par injection de sortie

COMMANDE AVEC RETOUR D'ETAT

INCORPORANT UN OBSERVATEUR



Le système

$$SYS \left\{ \begin{array}{l} \rho x(t) = Fx(t) + Gu(t) \\ y(t) = Hx(t) \end{array} \right.$$

Le régulateur

$$CREO \left\{ \begin{array}{l} \rho \hat{x}(t) = (F - MH) \hat{x}(t) + Gu(t) + My(t) \\ u(t) = -K\hat{x}(t) + \Gamma y^*(t) \end{array} \right.$$

Le système de commande

$$SCREO \left\{ \begin{array}{l} \rho \begin{bmatrix} x(t) \\ \tilde{x}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F - GK & GK \\ 0 & F - MH \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) \\ \tilde{x}(t) \end{bmatrix} \\ \qquad \qquad \qquad + \begin{bmatrix} G \\ 0 \end{bmatrix} \Gamma y^*(t) \\ y(t) = \begin{bmatrix} H & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) \\ \tilde{x}(t) \end{bmatrix} \end{array} \right.$$

Le polynôme caractéristique du système de commande est donné par

$$P_{ccreo}(s) = \det \begin{pmatrix} sI_n - F + GK & -GK \\ 0 & sI_n - F + MH \end{pmatrix}$$

soit

$$P_{ccreo}(s) = \det(sI_n - F + GK) \det(sI_n - F + MH)$$

Le système de commande avec retour d'état utilisant un observateur est alors asymptotiquement stable si et seulement si

$$P_{ccre}(s) = \det(sI_n - F + GK) = 0 \implies \Re(s) < 0$$

et

$$P_{cobs}(s) = \det(sI_n - F + MH) = 0 \implies \Re(s) < 0$$

INTERPRETATION POLYNOMIALE

Les équations du régulateur

$$\mathcal{REG} \begin{cases} u(t) = -K\hat{x}(t) + \Gamma y^*(t) \\ \rho\hat{x}(t) = F\hat{x}(t) + Gu(t) + M(y(t) - \hat{y}(t)) \\ \hat{y}(t) = H\hat{x}(t) \end{cases}$$

peuvent se récrire comme suit

$$\mathcal{REG} \begin{cases} U(s) = -K\hat{X}(s) + \Gamma Y^*(s) \\ s\hat{X}(s) = F\hat{X}(s) + GU(s) + M(Y(s) - \hat{Y}(s)) \\ \hat{Y}(s) = H\hat{X}(s) \end{cases}$$

On aura alors

$$U(s) = -F_u(s)U(s) - F_y(s)Y(s) + \Gamma Y^*(s)$$

↑

$$\mathcal{F}_u(s) = K (sI_n - F + MH)^{-1} G$$

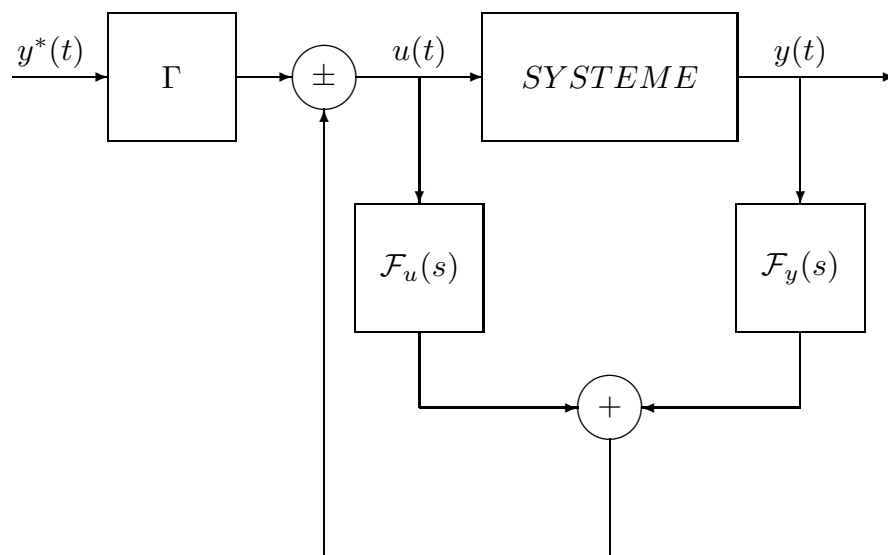
$$\mathcal{F}_y(s) = K (sI_n - F + MH)^{-1} M$$

ou d'une manière équivalente

$$U(s) = -\mathcal{R}_r(s)Y(s) + \mathcal{R}_p(s)y^*(s)$$

↑

$$\mathcal{R}_r(s) = (I_m + \mathcal{F}_u(s))^{-1} \mathcal{F}_y(s) \text{ et } \mathcal{R}_p(s) = (I_m + \mathcal{F}_u(s))^{-1} \Gamma$$



Comme, les matrices de transfert $F_u(s)$ et $F_y(s)$ peuvent se récrire comme suit

$$F_u(s) = \frac{K \text{Adj}(sI_n - F + MH) G}{\det(sI_n - F + MH)}$$

$$F_y(s) = \frac{K \text{Adj}(sI_n - F + MH) M}{\det(sI_n - F + MH)}$$

la régulateur peut se récrire comme suit

$$\frac{S(s)}{P_o(s)} U(s) + \frac{R(s)}{P_o(s)} Y(s) = \frac{T(s)}{P_o(s)} Y^*(p)$$

avec

$$S(s) = P_o(s) I_m + K \text{Adj}(sI_n - F + MH) G$$

$$R(s) = K \text{Adj}(sI_n - F + MH) M$$

$$T(s) = \det(sI_n - F + MH) \Gamma$$

FORME USUELLE

Et comme l'observateur est asymptotiquement stable, la loi de commande peut se mettre sous la forme

$$S(\rho)u(t) + R(\rho)y(t) = T(\rho)y^*(t)$$

avec

$$S(\rho) = \det(\rho I_n - F + MH) I_m + K \text{Adj}(\rho I_n - F + MH) G$$

$$R(\rho) = K \text{Adj}(\rho I_n - F + MH) M$$

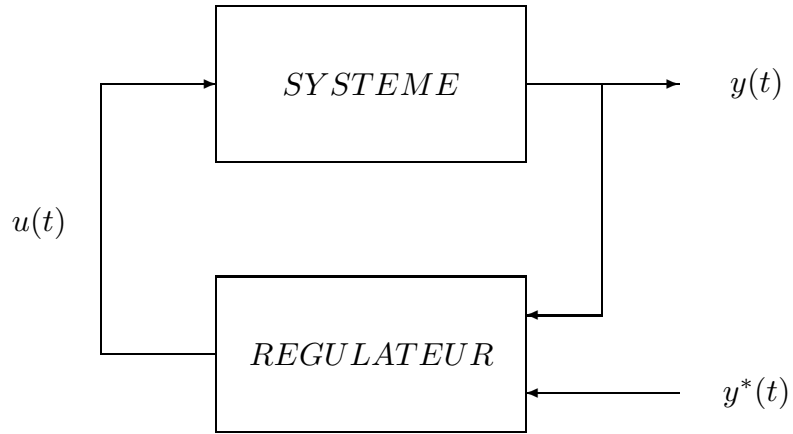
$$T(\rho) = \det(\rho I_n - F + MH) \Gamma$$

↑

communément utilisée en régulation industrielle

CONCEPTION D'UN ASSERVISSEMENT

$$(F, G, H, E) \rightarrow (K, M)$$

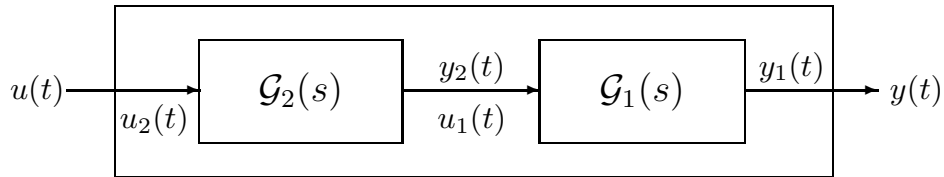


????????????????

COMPOSITION DES SYSTEMES

$$\mathcal{G}_1(s) = \left(\begin{array}{c|c} F_1 & G_1 \\ \hline H_1 & E_1 \end{array} \right) \quad \text{et} \quad \mathcal{G}_2(s) = \left(\begin{array}{c|c} F_2 & G_2 \\ \hline H_2 & E_2 \end{array} \right)$$

- Une interconnection du type cascade



$$u_2(t) = u(t), \quad u_1(t) = y_2(t) \quad \text{et} \quad y_1(t) = y(t)$$

↓

$$\rho x_2(t) = F_2 x_2(t) + G_2 u(t)$$

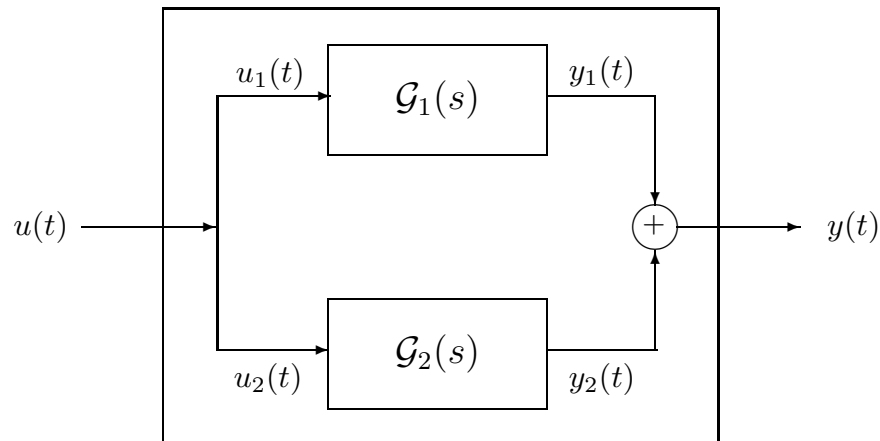
$$\rho x_1(t) = F_1 x_1(t) + G_1 u_1(t) = F_1 x_1(t) + G_1 H_2 x_2(t) + G_1 E_2 u(t)$$

$$y(t) = H_1 x_1(t) + E_1 u_1(t) = H_1 x_1(t) + E_1 H_2 x_2(t) + E_1 E_2 u(t)$$

↓

$$\mathcal{G}(s) = \left(\begin{array}{cc|c} F_1 & G_1 H_2 & G_1 E_2 \\ 0 & F_2 & G_2 \\ \hline H_1 & E_1 H_2 & E_1 E_2 \end{array} \right)$$

- Une interconnection du type parallèle



$$u(t) = u_1(t) = u_2(t) \quad \text{et} \quad y(t) = y_1(t) + y_2(t)$$

↓

$$\rho x_1(t) = F_1 x_1(t) + G_1 u(t)$$

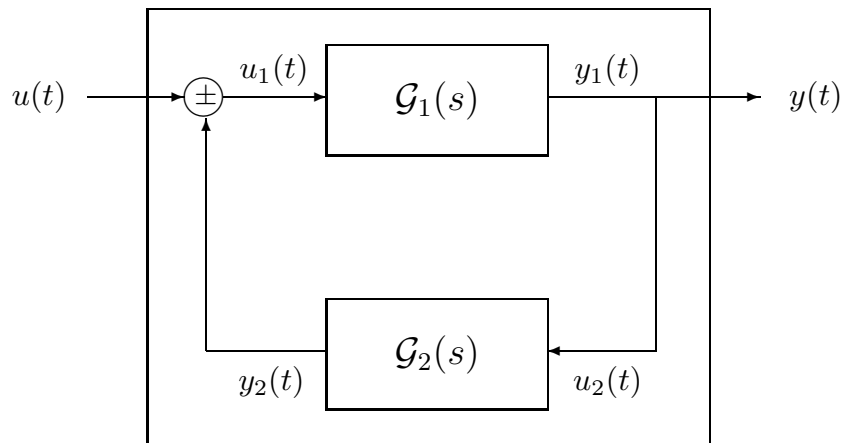
$$\rho x_2(t) = F_2 x_2(t) + G_2 u(t)$$

$$y(t) = H_1 x_1(t) + H_2 x_2(t) + (E_1 + E_2) u(t)$$

↓

$$\mathcal{G}(s) = \left(\begin{array}{cc|c} F_1 & 0 & G_1 \\ 0 & F_2 & G_2 \\ \hline H_1 & H_2 & E_1 + E_2 \end{array} \right)$$

- Une interconnection en contre réaction



$$u_1(t) = u(t) - y_2(t) \text{ et } y(t) = y_1(t) = u_2(t)$$

$$(I + E_2 E_1) u_1(t) = u(t) - E_2 H_1 x_1(t) - H_2 x_2(t)$$

$I + E_2 E_1$ est inversible

↓

$$y(t) = \begin{pmatrix} I - E_1 (I + E_2 E_1)^{-1} E_2 \\ -E_1 (I + E_2 E_1)^{-1} H_2 \end{pmatrix} \begin{matrix} H_1 x_1(t) \\ x_2(t) \end{matrix} + E_1 (I + E_2 E_1)^{-1} u(t)$$

↓

$$y(t) = E_{12} H_1 x_1(t) - E_{12} E_1 H_2 x_2(t) + E_1 E_{21} u(t)$$

↑

$$E_{12} = (I + E_1 E_2)^{-1} \text{ et } E_{21} = (I + E_2 E_1)^{-1}$$

$I + E_2 E_1$ est inversible

\Downarrow

$I + E_1 E_2$ est inversible

\Downarrow

l'un des systèmes interconnectés est strictement propre

\Downarrow

$$\mathcal{G}(s) = \left(\begin{array}{cc|c} F_1 - G_1 E_2 E_{12} H_1 & -G_1 E_{21} H_2 & G_1 E_{21} \\ G_2 E_{12} H_1 & F_2 - G_2 E_1 E_{21} H_2 & G_2 E_1 E_{21} \\ \hline E_{12} H_1 & -E_{12} E_1 H_2 & E_1 E_{21} \end{array} \right)$$

SYSTEMES USUELS

$$\mathcal{G}(s) = \left(\begin{array}{c|c} F & G \\ \hline H & E \end{array} \right)$$

- Le système dual

$$\mathcal{G}_d(s) = \mathcal{G}^*(s)$$

$$\mathcal{G}^*(s) = \left(H (sI_n - F)^{-1} G + E \right)^* = G^* (sI_n - F^*)^{-1} H^* + E^*$$

\Downarrow

$$\mathcal{G}^* = \left(\begin{array}{c|c} F^* & H^* \\ \hline G^* & E^* \end{array} \right)$$

- Le système conjugué

$$\mathcal{G}_c(s) = \mathcal{G}^*(-s)$$

$$\mathcal{G}^*(-s) = \left(H(-sI_n - F)^{-1} G + E \right)^*$$

$$\mathcal{G}^*(-s) = -G^*(sI_n + F^*)^{-1} H^* + E^*$$

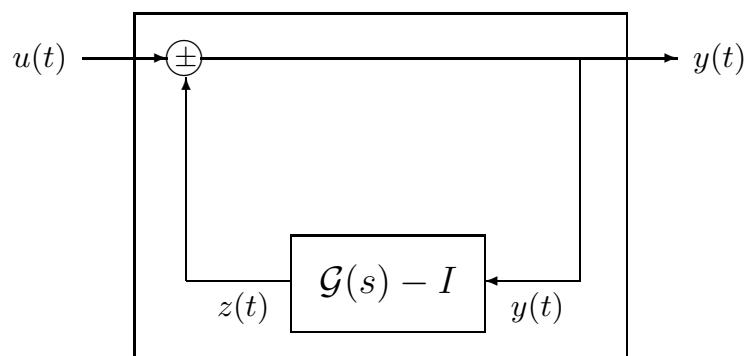
↓

$$\mathcal{G}_c(s) = \left(\begin{array}{c|c} -F^* & -H^* \\ \hline G^* & E^* \end{array} \right) \triangleq \tilde{\mathcal{G}}(s)$$

- Le système inverse

$\mathcal{G}(s)$ est inversible

↓



$$Y(s) = \mathcal{G}_i(s)U(s)$$

$$\downarrow$$

$$\mathcal{G}_i(s) = (\mathcal{G}(s))^{-1}$$

$$\downarrow$$

$$SINV \left\{ \begin{array}{l} \rho x(t) = Fx(t) + Gy(t) \\ z(t) = Hx(t) + (E - I)y(t) \\ y(t) = u(t) - z(t) \end{array} \right.$$

$$SINV \left\{ \begin{array}{l} \rho x(t) = (F - GE^{-1}H)x(t) + GE^{-1}u(t) \\ y(t) = -E^{-1}Hx(t) + E^{-1}u(t) \end{array} \right.$$

$$\downarrow$$

$$\mathcal{G}_i(s) = \left(\begin{array}{c|c} F - GE^{-1}H & GE^{-1} \\ \hline -E^{-1}H & E^{-1} \end{array} \right) = \mathcal{G}^{-1}(s)$$

$$\downarrow$$

cette caractérisation reste valable
dans le cas des systèmes qui ne sont pas nécessairement carrés
pourvu que la matrice E admet une inverse

NORMES DES SYSTEMES

$$\text{SYS } \left\{ \begin{array}{l} Y(s) = \mathcal{G}(s)U(s) \text{ avec } \mathcal{G}(s) \in \mathbb{R}^{p \times m}(s) \end{array} \right.$$

$$\downarrow$$

$$\mathcal{H}_2 \text{ et } \mathcal{H}_\infty$$

$$\uparrow$$

$$\mathcal{L}_2 \longrightarrow \{f(t)\}_{t \in \mathbb{R}} \in \mathbb{R}^s \longrightarrow \|f\|_2 = \int_{-\infty}^{+\infty} f^*(t)f(t)dt$$

$$\updownarrow$$

$$\|F\|_2 = \left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} F^*(j\omega)F(j\omega) d\omega \right)^{\frac{1}{2}}$$

- La norme \mathcal{H}_2 définie par

$$\|\mathcal{G}(s)\|_2 \triangleq \sup_{\sigma > 0} \left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \text{trace}(\mathcal{G}^*(\sigma + j\omega)\mathcal{G}(\sigma + j\omega)) d\omega \right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\updownarrow$$

$$\|\mathcal{G}(s)\|_2 = \left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \text{trace}(\mathcal{G}^*(j\omega)\mathcal{G}(j\omega)) d\omega \right)^{\frac{1}{2}}$$

- La norme \mathcal{H}_∞ définie par

$$\|\mathcal{G}(s)\|_\infty \triangleq \sup_{\Re(s) > 0} \sigma_{\max}(\mathcal{G}(s))$$

$$\updownarrow$$

$$\|\mathcal{G}(s)\|_\infty = \sup_{\omega \in \mathbb{R}} \sigma_{\max}(\mathcal{G}(j\omega))$$

REMARQUE

La norme \mathcal{H}_∞ définie par

$$\|\mathcal{G}(s)\|_\infty \triangleq \sup_{\Re(s)>0} \sigma_{max}(\mathcal{G}(s)) = \sup_{\omega \in \mathbb{R}} \sigma_{max}(\mathcal{G}(j\omega))$$

ce qui n'est autre que la norme induite définie pour toute entrée bornée comme suit

$$\|\mathcal{G}(s)\|_\infty = \sup_{u \neq 0} \frac{\|\mathcal{G}(\rho)u(t)\|_2}{\|u(t)\|_2} = \sup_{u \neq 0} \frac{\|y(t)\|_2}{\|u(t)\|_2}$$

puisque $y(t) = \mathcal{G}(\rho)u(t)$

ENSEMBLES \mathcal{RL} ET \mathcal{RH}

- \mathcal{RL}_2 est l'ensemble des fonctions de transfert strictement propres sans aucun pôle sur l'axe imaginaire.
- \mathcal{RH}_2 est l'ensemble des fonctions de transfert strictement propres et stables.
- \mathcal{RL}_∞ est l'ensemble des fonctions de transfert propres sans aucun pôle sur l'axe imaginaire.
- \mathcal{RH}_∞ est l'ensemble des fonctions de transfert propres et stables.

RESULTATS FONDAMENTAUX*Interprétation de la norme \mathcal{H}_2*

↓

Résultat 1 *Considérons un système décrit par une fonction de transfert $\mathcal{G}(s) \in \mathbb{C}^{p \times m}(s)$. Alors la puissance de la réponse du système à un bruit blanc gaussien de puissance unitaire est donnée par*

$$\mathcal{E} \{y(t)^* y(t)\} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \text{trace}(\mathcal{G}^*(j\omega) \mathcal{G}(j\omega)) d\omega = \|\mathcal{G}(s)\|_2^2$$

PREUVE

$$y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(\tau) u(t - \tau) d\tau \text{ avec } \mathcal{E} \{u(t) u^*(t - \tau)\} = I_m \delta(t - \tau)$$

↓

$$\mathcal{E} \{y(t)^* y(t)\} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \text{trace}(\mathcal{G}^*(j\omega) \mathcal{G}(j\omega)) d\omega = \|\mathcal{G}(s)\|_2^2$$

↑

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \text{trace}(g^*(\tau) g(\tau)) d\tau = \int_{-\infty}^{+\infty} \text{trace}(g(\tau) g^*(\tau)) d\tau$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \text{trace}(g^*(\tau) g(\tau)) d\tau = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \text{trace}(\mathcal{G}^*(j\omega) \mathcal{G}(j\omega)) d\omega$$

$$\begin{aligned}
\|\mathcal{G}(s)\|_2^2 &= \mathcal{E} \left\{ \left(\int_{-\infty}^{+\infty} g(\tau)u(t-\tau)d\tau \right)^* \left(\int_{-\infty}^{+\infty} g(\bar{\tau})u(t-\bar{\tau})d\bar{\tau} \right) \right\} \\
&= \mathcal{E} \left\{ \int_{-\infty}^{+\infty} d\tau \int_{-\infty}^{+\infty} (u^*(t-\tau)g^*(\tau)g(\bar{\tau})u(t-\bar{\tau})) d\bar{\tau} \right\} \\
&= \mathcal{E} \left\{ \int_{-\infty}^{+\infty} d\tau \int_{-\infty}^{+\infty} \text{trace} (u(t-\bar{\tau})u^*(t-\tau)g^*(\tau)g(\bar{\tau})) d\bar{\tau} \right\} \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} d\tau \int_{-\infty}^{+\infty} \text{trace} (\mathcal{E} \{u(t-\bar{\tau})u^*(t-\tau)\} g^*(\tau)g(\bar{\tau})) d\bar{\tau} \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} d\tau \int_{-\infty}^{+\infty} \text{trace} (g^*(\tau)g(\bar{\tau})) \delta(\tau-\bar{\tau})d\bar{\tau} \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} \text{trace} (g^*(\tau)g(\tau)) d\tau \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \text{trace} (\mathcal{G}^*(j\omega) \mathcal{G}(j\omega) d\omega)
\end{aligned}$$

REMARQUE

$$\|\mathcal{G}(s)\|_2 = \left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \sum_{i=1}^n \sigma_i^2(\mathcal{G}(j\omega)) d\omega \right)^{\frac{1}{2}}$$

↓

$$\mathcal{H}_2 \leq \mathcal{H}_\infty$$

la minimisation de la norme \mathcal{H}_2 correspond ainsi à la minimisation de la somme des carrés de toutes les valeurs singulières sur toutes les fréquences, alors que la minimisation d'une norme \mathcal{H}_∞ correspond à la minimisation du maximum de la plus grande valeur singulière pour une fréquence particulière pour laquelle l'amplification est maximale

$\mathbb{R}\mathcal{H}_2 \cong$ GRAMMIENS DU SYSTEME

Résultat 2 Soit (F, G, H, E) une réalisation d'état de la fonction de transfert $\mathcal{G}(s) \in \mathbb{R}\mathcal{H}_2$, alors sa norme \mathcal{H}_2 est donnée par

$$\|\mathcal{G}(s)\|_2^2 = \text{trace}(G^*W_oG) = \text{trace}(HW_cH^*)$$

où W_o et W_c désignent les grammians d'observabilité et de commandabilité du système respectivement données par les équations de Lyapunov

$$F^*W_o + W_oF + H^*H = 0$$

et

$$FW_c + W_cF^* + GG^* = 0$$

PREUVE

$$\begin{aligned} \|\mathcal{G}(s)\|_2^2 &= \text{trace} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} g(\tau) g^*(\tau) d\tau \right) \\ &= \text{trace} \left(H \left(\int_{-\infty}^{+\infty} e^{F\tau} GG^* e^{F^*\tau} d\tau \right) H^* \right) \\ &= \text{trace}(HW_cH^*) \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \|\mathcal{G}(s)\|_2^2 &= \text{trace} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} g^*(\tau) g(\tau) d\tau \right) \\ &= \text{trace} \left(G^* \left(\int_{-\infty}^{+\infty} e^{F^*\tau} H^* H e^{F\tau} d\tau \right) G \right) \\ &= \text{trace}(G^*W_oG) \end{aligned}$$

NORME \mathcal{H}_∞

$$\{\sigma_{max}(\mathcal{G}(j\omega))\}_{\omega \geq 0} \longrightarrow \|\mathcal{G}(s)\|_\infty \text{ modulo } \mathcal{E}\mathcal{V}\mathcal{G}$$

aucune solution analytique

$$\text{tester si } \|\mathcal{G}(s)\|_\infty \leq \gamma$$

Résultat 3 *Considérons un système décrit par une fonction de transfert $\mathcal{G}(s) \in \mathbb{R}^{p \times m}(s)$, alors on a*

$$\|\mathcal{G}(s)\|_\infty < \gamma \iff (\gamma^2 I_n - \mathcal{G}^*(-s)\mathcal{G}(s))^{-1} \in \mathbb{R}\mathcal{L}_\infty$$

PREUVE

$$\omega \in \mathbb{R} \text{ et } i \in [1, n]$$

$$\begin{aligned} \|\mathcal{G}(s)\|_\infty < \gamma &\iff \sigma_i(\mathcal{G}(j\omega)) < \gamma \text{ pour tout } (\omega, i) \\ &\iff \lambda_i(\mathcal{G}^*(j\omega)\mathcal{G}(j\omega)) < \gamma^2 \text{ pour tout } (\omega, i) \\ &\iff \lambda_i(\gamma^2 I_n - \mathcal{G}^*(j\omega)\mathcal{G}(j\omega)) > 0 \text{ pour tout } (\omega, i) \\ &\iff (\gamma^2 I_n - \mathcal{G}^*(j\omega)\mathcal{G}(j\omega)) > 0 \text{ pour tout } \omega \\ &\iff (\gamma^2 I_n - \mathcal{G}^*(-s)\mathcal{G}(s)) \text{ n'a pas de zéro sur } \mathcal{A}_i \\ &\iff (\gamma^2 I_n - \mathcal{G}^*(-s)\mathcal{G}(s)) \in \mathbb{R}\mathcal{L}_\infty \end{aligned}$$

PROCEDURE DE CALCUL DE LA NORME \mathcal{H}_∞

Résultat 4 *Considérons la matrice Hamiltonienne associée à une réalisation (F, G, H, E) de dimension n .*

$$\begin{aligned} \mathcal{H}(\gamma) &= \\ &= \begin{pmatrix} F & 0 \\ 0 & -F^* \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & G \\ H^* & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \gamma I_p & E \\ E^* & \gamma I_m \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} H & 0 \\ 0 & -G^* \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Alors les propositions suivantes sont vraies.

P1. *Pour tout $\gamma > \sigma_{\max}(E)$ on a $\|\mathcal{G}(s)\|_\infty < \gamma$ si et seulement si $\mathcal{H}(\gamma)$ n'a pas de valeur propre sur l'axe imaginaire.*

P2. *Si $\mathcal{H}(\gamma)$ admet une valeur propre $j\omega$ sur l'axe imaginaire pour $\gamma > \sigma_{\max}(E)$, alors $\sigma_{\max}(\mathcal{G}(j\omega)) = \gamma$.*

où $\mathcal{G}(s) \in \mathbb{R}^{p \times m}(s)$ est la fonction de transfert du système.

↓

*un algorithme de dichotomie pour calculer $\|\mathcal{G}(s)\|_\infty$
à partir d'un encadrement $[\gamma_{\min}, \gamma_{\max}]$ avec $\gamma_{\min} \geq \sigma_{\max}(E)$*

E1. *On calcule le spectre de $\mathcal{H}(\gamma)$ pour $\gamma = \frac{\gamma_{\min} + \gamma_{\max}}{2}$*

E2. *Si $\mathcal{H}(\gamma)$ n'admet aucune valeur propre sur l'axe imaginaire, alors on pose $\gamma_{\min} = \gamma$, sinon on pose $\gamma_{\max} = \gamma$.*

E3. *Revenir à l'étape E1 tant que le résultat n'est pas jugé satisfaisant.*

REPRESENTATION HARMONIQUE D'UN SYSTEME

Résultat 5 *Considérons un système décrit par sa fonction de transfert $\mathcal{G}(s)$, alors la propriété suivante est vraie pour toute entrée non nulle*

$$\sigma_{\min}(\mathcal{G}(j\omega)) \leq \frac{\|\mathcal{G}(j\omega)U(j\omega)\|}{\|U(j\omega)\|} \leq \sigma_{\max}(\mathcal{G}(j\omega)) \quad \forall \omega \in \mathbb{R}$$

↓

le gain du système est relativement petit (*resp. grand*)
aux pulsations où $\sigma_{\max}(\mathcal{G}(j\omega))$ (*resp. $\sigma_{\min}(\mathcal{G}(j\omega))$*)
est relativement petite (*resp. grande*)

CONCLUSION

- ♠ Une approche d'état issue d'une lecture ingénieur
- ♠ Des interprétations pertinentes pour l'ingénierie des systèmes
- ♠ Un panorama concis sur les normes H_2 et H_∞ d'un système