ENSI CAEN
ÉCOLE PUBLIQUE D'INGÉNIEURS
CENTRE DE RECHERCHE

Année universitaire 2018–2019

$1^{\text{ère}}$ année
Matériaux et Chimie

Examen de Mathématiques

Semestre 5 – lundi 14 janvier 2019

Durée : 1h 30min
Documents et calculatrices interdits
Les réponses non justifiées ne vaudront pas de point

Le barème n'est donné qu'à titre indicatif

Exercice 1. *(6 points)*

a) Résoudre l'équation différentielle

$$f''(x) + 2f'(x) - 3f(x) = (1 - 4x)\mathrm{e}^{-x}.$$

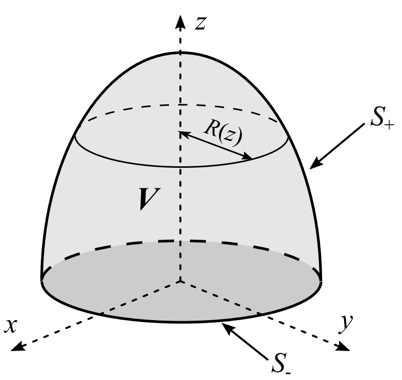
b) Résoudre le système différentiel

$$X'(t) = A\,X(t)$$

où

$$X(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Exercice 2. *(6 points)*



Soit V le domaine de $\mathbb{R}^3$ situé au-dessus du plan Oxy, et sous la surface de révolution d'équation $x^2 + y^2 = 3 - z$:

$$V = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 0 \leq z \leq 3,\ x^2 + y^2 \leq 3 - z\right\}.$$

Son enveloppe ∂V se compose de deux surfaces : le disque $S_- = \{(x, y, 0) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 \leq 3\}$ à la base, et la calotte S_+ qui recouvre V.

Par ailleurs, on considère le champ

$$\vec{F}(x, y, z) = x^3\,\vec{u}_x + y^3\,\vec{u}_y + \left(x^2 + y^2\right)\,\vec{u}_z = \begin{pmatrix} x^3 \\ y^3 \\ x^2 + y^2 \end{pmatrix}.$$

a) Pour $z \in [0;3]$, la tranche de V à l'altitude z est un disque de rayon $R(z)$. Donner l'expression de ce dernier en fonction de z.

b) Calculer la divergence de $\vec{F}$. Puis évaluer l'intégrale I de la divergence sur le domaine V (conseil : faire l'intégration en coordonnées cylindriques).

c) Sur le disque S_-, quel est le vecteur normal unitaire sortant du domaine V ? Calculer le flux J de $\vec{F}$ sortant à travers S_-.

d) Soit K le flux de $\vec{F}$ sortant du domaine V à travers la calotte S_+. Donner la relation entre I, J et K. Quel est le nom du théorème qui donne cette relation ? En déduire la valeur de K.

Exercice 3. *(8 points)*

On souhaite résoudre l'équation de propagation des ondes, pour $(x,t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^*$,

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x,t) - v^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t) = 0.$$

Ici $v > 0$ est une constante. On cherche une solution $u(x,t)$ de classe $\mathscr{C}^2$, périodique selon x avec la période $L > 0$.

a) Pour une solution à variables séparées de la forme

$$u(x,t) = f(x) \times g(t),$$

montrer que l'équation de propagation conduit aux deux équations différentielles

$$f''(x) - \lambda f(x) = 0 \qquad \text{et} \qquad g''(t) - \lambda v^2 g(t) = 0$$

où λ est une constante.

b) Selon le signe de la constante λ, déterminer s'il existe des solutions périodiques pour $f(x)$.

c) Les valeurs de λ qui donnent des solutions de période L sont $\lambda_k = -\left(k\frac{2\pi}{L}\right)^2$ avec $k \in \mathbb{N}$. Pour la suite, on ne s'intéressera qu'aux solutions paires selon la variable x. Montrer que pour chaque λ_k, la solution est

$$u_k(x,t) = \cos\left(k\frac{2\pi}{L}x\right)\left[C_k \cos\left(k\frac{2\pi}{L}vt\right) + D_k \sin\left(k\frac{2\pi}{L}vt\right)\right]$$

où C_k et D_k sont des constantes.

d) On souhaite maintenant que $u(x,t)$ satisfasse à la condition initiale, à l'instant $t = 0$,

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad u(x,0) = \varphi(x)$$

avec $\varphi(x)$ la fonction paire et L-périodique définie par

$$\forall x \in \left[-\frac{L}{2}, \frac{L}{2}\right], \quad \varphi(x) = x^2.$$

Pour cela on cherche une solution sous la forme $u(x,t) = \sum_{k=0}^{+\infty} u_k(x,t)$ (on admettra que la somme infinie converge). Que doivent valoir les coefficients C_k ? Obtenir leurs expressions en fonction de k et de L.