

SYSTEMES ASSERVIS ECHANTILLONNES

Mohammed M'SAAD

Ecole Nationale Supérieure d'Ingénieurs de Caen

Bureau: FA 314

Téléphone: 02 31 45 27 08

Courriel: mohammed.msaad@ensicaen.fr

UNE APPROCHE POLYNOMIALE



AREVA
AEROSPATIALE
EDF
CNES
FT
PSA
Renault
STmicroelectronics
Thalès
.....

COURS

- ♠ Introduction
- ♠ Modélisation
- ♠ Stabilité
- ♠ Systèmes asservis

TD

- ♠ Modélisation
- ♠ Analyse
- ♠ Synthèse modale
- ♠ Régulation industrielle

MODELISATION

DES

SYSTEMES ECHANTILLONNES

PLAN

- Motivation
- Echantillonnage
- Reconstruction
- Modélisation des systèmes
- Modélisation des perturbations
- Une représentation usuelle
- Conclusion

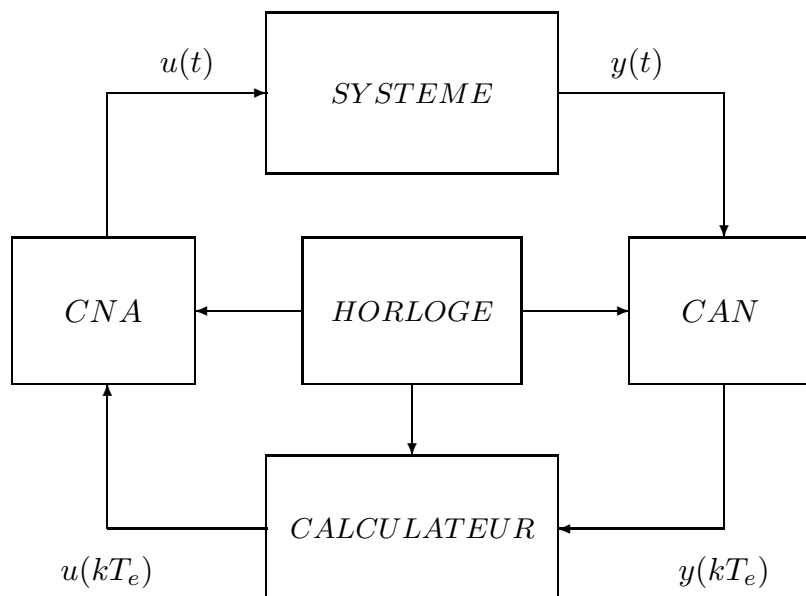
MOTIVATION

- Une théorie rigoureuse des systèmes échantillonnés

Modélisation
Analyse et Synthèse
Mise en œuvre

- Applications industrielles réussies

Commande par ordinateur
Traitement numérique du signal
Supervision des systèmes



COMMANDE PAR CALCULATEUR

DEUX ASPECTS A RETENIR

A1. Les calculateurs numériques sont des systèmes discrets qui manipulent des nombres.



*un système relié à un ordinateur numérique
est manifestement un système échantillonné
dont l'entrée et la sortie sont respectivement
 $\{u(kT_e)\}_{k \in \mathcal{N}}$ et $\{y(kT_e)\}_{k \in \mathcal{N}}$*



*T_e désigne la période d'échantillonnage
elle est supposée constante dans la théorie des systèmes
échantillonnés*

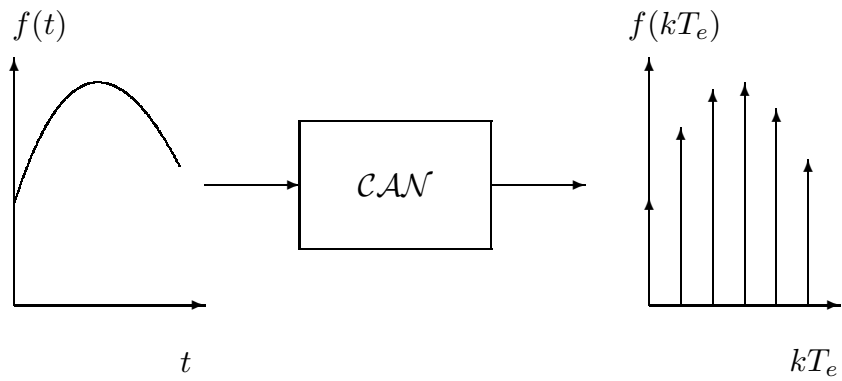
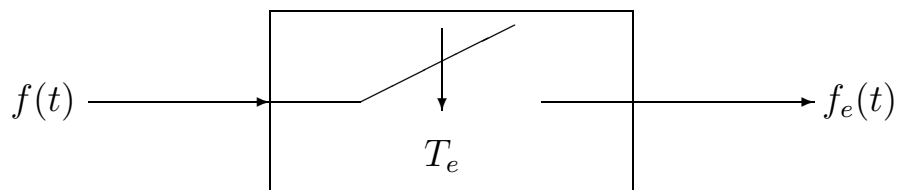
A2. La description du comportement dynamique d'un système échantillonné est généralement effectuée par un modèle stroboscopique

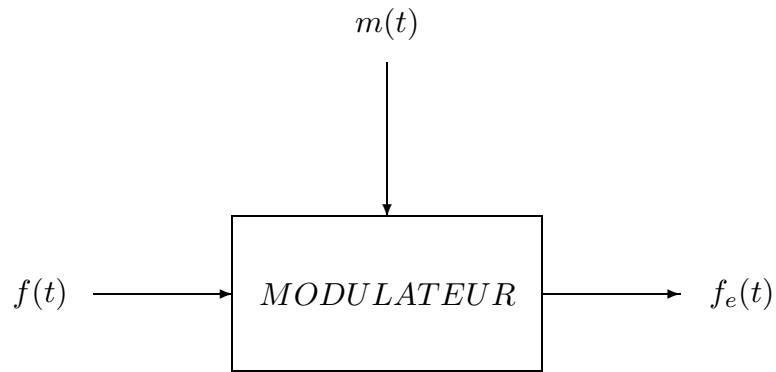
$$\text{SYSE} : \{u(kT_e)\}_{k \in \mathcal{N}} \longrightarrow \{y(kT_e)\}_{k \in \mathcal{N}}$$



*modélisation des convertisseurs
pour pouvoir modéliser l'ensemble*

CNA – SYSEME – CAN

ECHANTILLONNAGE**CONVERSION ANALOGIQUE-NUMERIQUE****ECHANTILLONNEUR ELEMENTAIRE**



$$f_e(t) = f(t) m(t) \text{ avec } m(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(t - kT_e)$$

MODELISATION IDEALE D'UN ECHANTILLONNEUR

THEOREME D'ECHANTILLONNAGE

Soit f une fonction dont la transformée de Laplace est F et soit F_e la transformée de Laplace de la fonction f_e qui résulte d'un échantillonnage de f à la cadence T_e . Supposons que $F(s)$ soit strictement propre alors on a

$$F_e(s) = (F(z))_{z=e^{T_e s}}$$

et

$$F_e(s) = \frac{1}{2}f(0^+) + \frac{1}{T_e} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} F(s + kj\omega_e)$$

Si de plus $sF(s)$ est strictement propre alors on a

$$F_e(s) = \frac{1}{T_e} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} F(s + kj\omega_e)$$

ASPECTS FONDAMENTAUX

A1. L'échantillonnage étale jusqu'à l'infini le spectre de fréquences de la fonction continue.

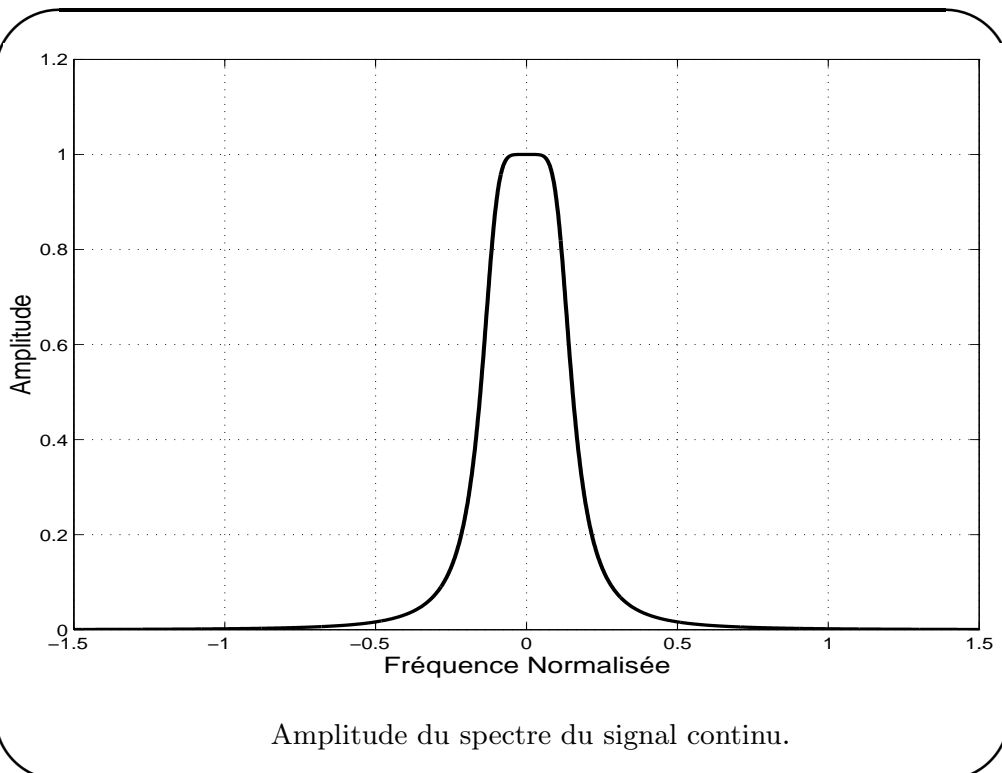
$$F_e(j\omega) = \mathcal{F}\{f_e(t)\} = \frac{1}{T_e} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} F(j(\omega + k\omega_e))$$

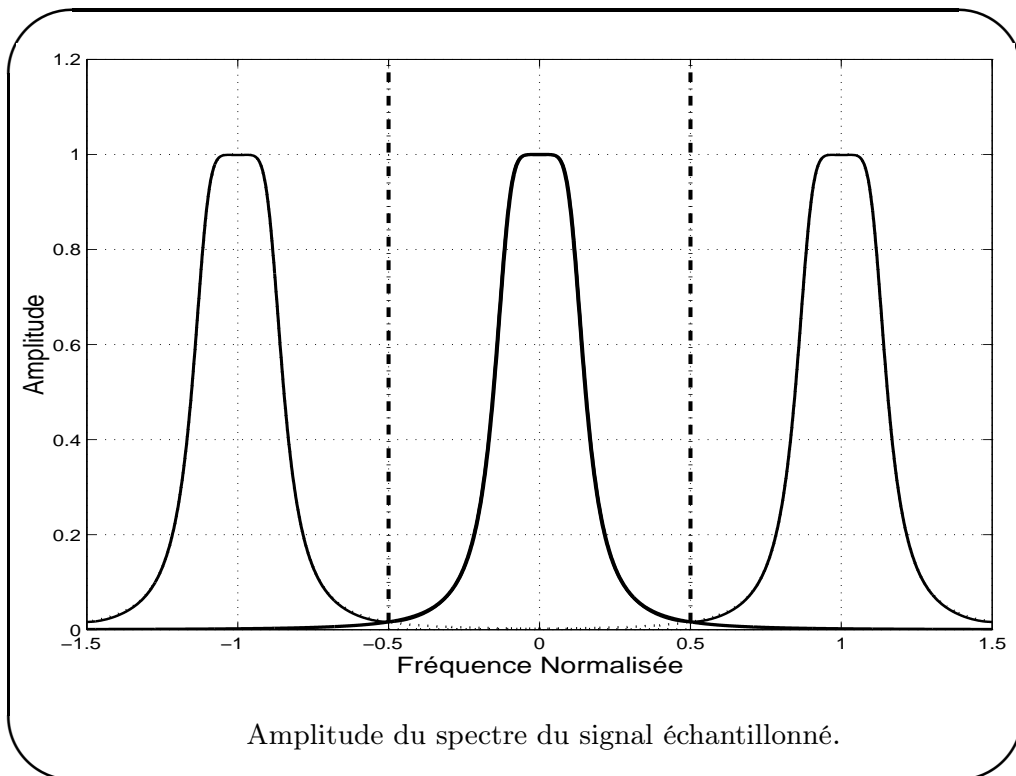
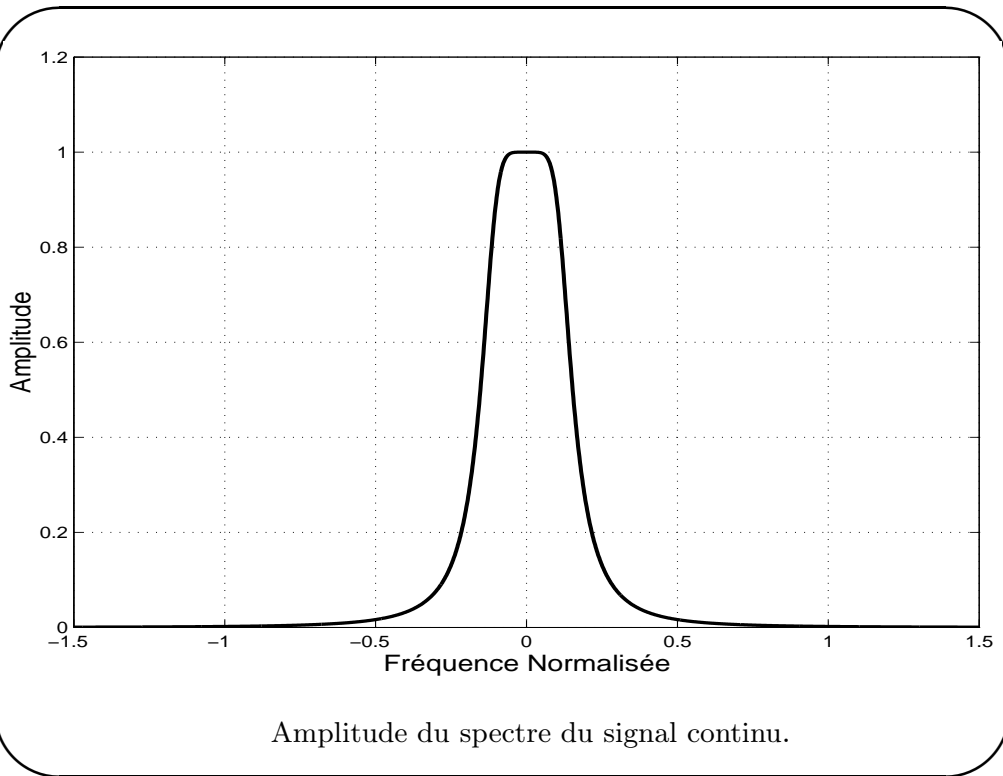
↓

$$F_e : \omega \in [0, \omega_n] \longrightarrow F_e(j\omega) \in \mathcal{C}$$

avec

$$\omega_n = \frac{\omega_e}{2} = \frac{\pi}{T_e} \longrightarrow \text{pulsation de Nyquist}$$





A2. L'échantillonnage induit une duplication infinie des pôles, i.e. les pôles de $F_e(s)$ sont égaux aux pôles de $F(s)$ modulo $j\omega_e$.

$$p_{ci} \text{ de } F(s) \quad \longrightarrow \quad \{p_{ik}\}_{k \in \mathbb{Z}} \text{ de } F_e(s)$$

avec

$$p_{ik} = p_{ci} - kj\omega_e \text{ pour } k \in \mathbb{Z}$$

A3. La relation entre $F_e(s)$ et $F(z)$: le mythe et la réalité

$$F_e(s) = \mathcal{L}\{f_e(t)\} = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} f(kT_e) e^{-kT_e s}$$

$$F_e(s) = \mathcal{L}\{f_e(t)\} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} f(kT_e) e^{-kT_e s}$$



$$F_e(s) \quad \longrightarrow \quad F(z)$$

$$z = e^{T_e s}$$



$$F_e(s) = F(z) \text{ pour } z = e^{T_e s}$$

La transformation d'échantillonnage

$$s \longrightarrow z = e^{T_e s}$$

n'est pas bijective. L'image des bandes

$$\mathcal{B}_k = \left\{ s \in \mathcal{C} / (2k-1)\omega_n \leq \text{Im}(s) \leq (2k+1)\omega_n \right\}$$

↓

$$\mathcal{B}_s = \{ s \in \mathcal{C} / \text{Im}(s) \in [-\omega_n, +\omega_n] \}$$

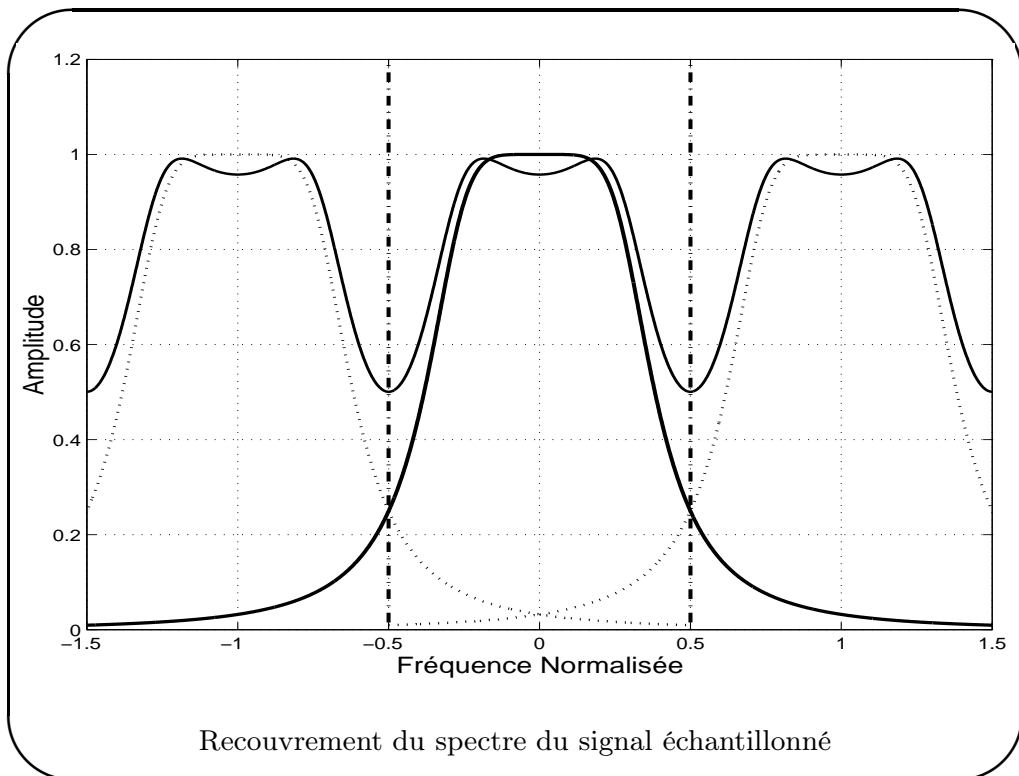
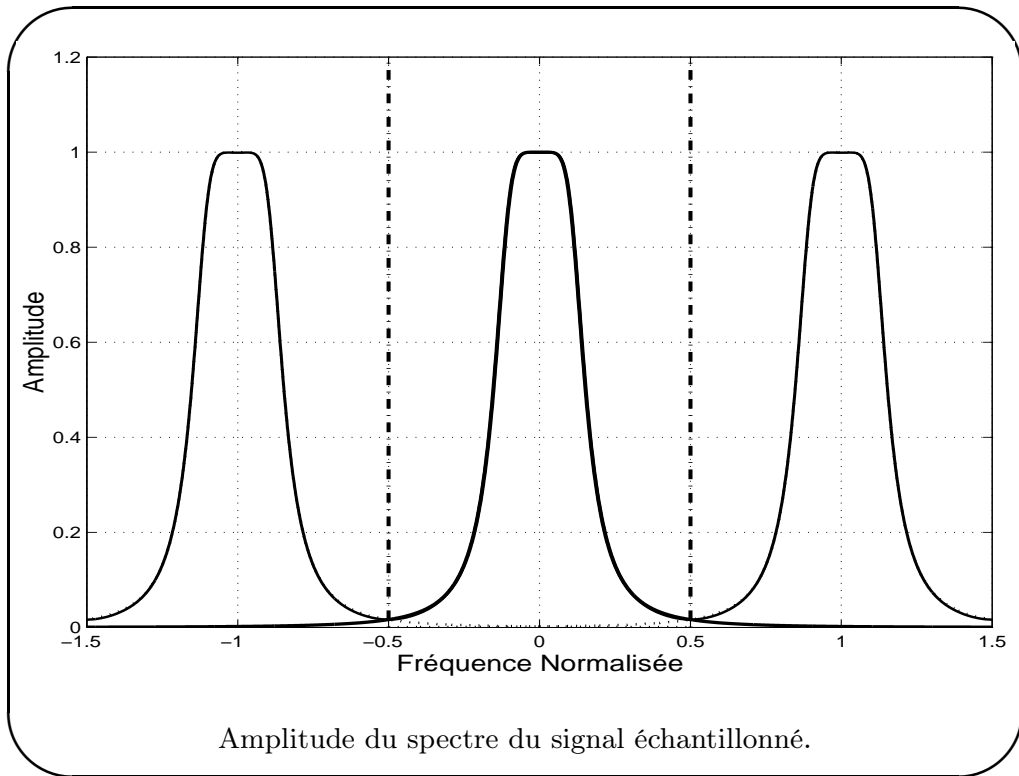
est le plan complexe en z : la duplication des pôles dans le plan complexe en s n'est pas percevable dans le plan complexe en z puisque

$$e^{(s+kj\omega_e)T_e} = e^{sT_e} \text{ pour tout } (s, k) \in \mathcal{C} \times \mathcal{Z}$$

THEOREME DE SHANNON

Un signal $\{f(t)\}_{t \in \mathcal{R}}$ dont la transformée de Fourier est nulle à l'extérieur de l'intervalle $[-\omega_m, \omega_m]$ est parfaitement défini par son signal échantillonné $\{f(kT_e)\}_{k \in \mathcal{Z}}$ si la période d'échantillonnage T_e est telle que $\omega_e > 2\omega_m$, soit $\frac{\omega_m}{\omega_e} < \frac{1}{2}$. Le signal $\{f(t)\}_{t \in \mathcal{R}}$ est obtenu comme suit

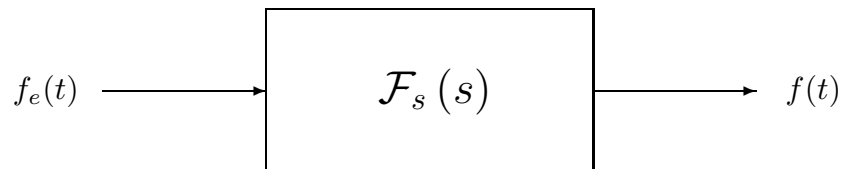
$$f(t) = \sum_{k=-\infty}^{k=\infty} f(kT_e) \frac{\sin(\omega_n(t - kT_e))}{\omega_n(t - kT_e)}$$



UNE DEMONSTRATION ELEGANTE

Dans le contexte des conditions de Shannon, on peut restaurer parfaitement $\{F(j\omega)\}_{\omega \in \mathcal{R}}$ en fonction de $\{F_e(j\omega)\}_{\omega \in \mathcal{R}}$

$$F(j\omega) = \begin{cases} T_e F_e(j\omega) & \text{si } |\omega| \leq \omega_n \\ 0 & \text{si } |\omega| > \omega_n \end{cases}$$



$$F(s) = F_s(s)F_e(s)$$

avec

$$F_s(j\omega) = \begin{cases} 1 & \text{si } |\omega| \leq \omega_n \\ 0 & \text{si } |\omega| > \omega_n \end{cases}$$

Et si l'on effectue un retour dans le domaine temporel

$$\begin{aligned}
 f(t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} F(\omega) e^{j\omega t} d\omega \\
 &= \frac{T_e}{2\pi} \int_{-\omega_n}^{+\omega_n} F_e(\omega) e^{j\omega t} d\omega \\
 &= \frac{T_e}{2\pi} \int_{-\omega_n}^{+\omega_n} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} f(kT_e) e^{-j\omega kT_e} e^{j\omega t} d\omega
 \end{aligned}$$

Et si on permute les opérations d'intégration et de sommation

$$\begin{aligned}
 f(t) &= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} f(kT_e) \frac{T_e}{2\pi} \int_{-\omega_n}^{+\omega_n} e^{j\omega(t-kT_e)} d\omega \\
 &= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} f(kT_e) \frac{\sin(\omega_n(t-kT_e))}{\omega_n(t-kT_e)}
 \end{aligned}$$

REMARQUE

$$f(t) = (f_e * f_s)(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} f(kT_e) f_s(t - kT_e)$$



$\{f_s(t)\}_{t \in \mathcal{R}}$ est la réponse impulsionnelle du filtre passe-bas idéal



Cette opération de filtrage n'est pas physiquement réalisable

FILTRAGE ANTI-REPLIEMENT

$$F(s) = \left(\frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2} \right)^m$$

avec

$$\zeta = 0.7 \text{ et } m > 2$$

ECHANTILLONNAGE: LE POINT

- ♠ Analyse spectrale

$$F_e(s) = \frac{1}{2}f(0^+) + \frac{1}{T_e} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} F(s + kj\omega_e)$$

- ♠ Théorème de Shannon

$$\left(\omega_e > 2\omega_m \right) \longrightarrow \left(F_e(j\omega) \longrightarrow F(j\omega) \right)$$

- ♠ Transformée en z

$$F_e(s) \longrightarrow F(z)$$

$$z = e^{T_e s}$$

RECONSTRUCTION PHYSIQUE

$$\{f(kT_e)\}_{k \in \mathbb{Z}} \longrightarrow \{f(t)\}_{t \in \mathcal{R}}$$

$$\Downarrow$$

$$f(kT_e + \tau) = f(kT_e) + \tau \left(\rho f(t) \right)_{t=kT_e} + \dots + \frac{\tau^i}{i!} \left(\rho^i f(t) \right)_{t=kT_e} + \dots$$

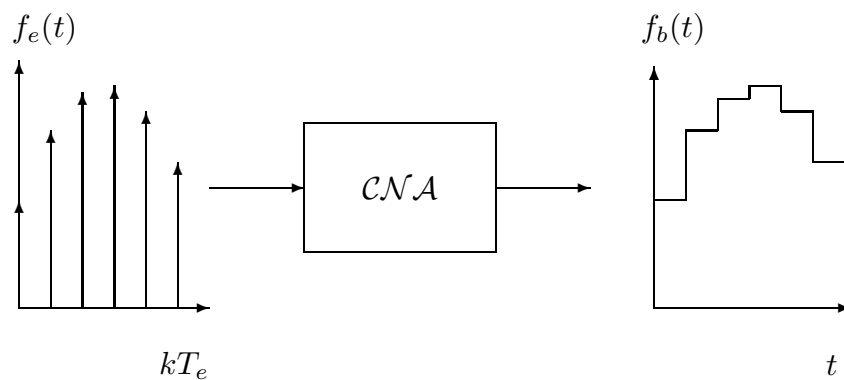
pour tout $\tau \in [0, T_e)$

$$\Uparrow$$

$$\rho f(kT_e) \approx \frac{1}{T_e} \left(f(kT_e) - f((k-1)T_e) \right)$$

$$\rho^2 f(kT_e) \approx \frac{1}{T_e^2} \left(f(kT_e) - 2f((k-1)T_e) + f((k-2)T_e) \right)$$

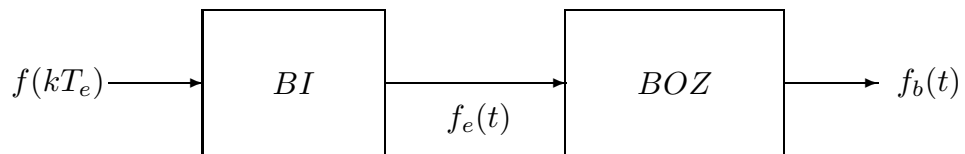
CONVERSION NUMERIQUE-ANALOGIQUE



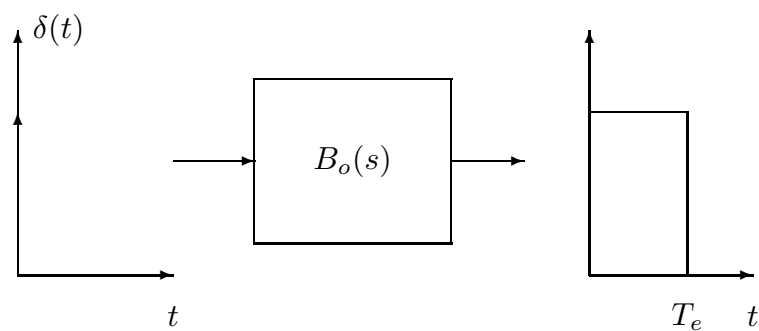
$$f(kT_e + \tau) = f(kT_e) \text{ pour tout } \tau \in [0, T_e)$$

BLOQUEUR D'ORDRE ZERO

$$f(kT_e + \tau) = f(kT_e) \text{ pour tout } \tau \in [0, T_e)$$



MODELISATION D'UN BLOQUEUR D'ORDRE ZERO



$$\beta_o(t) = \alpha(t) - \alpha(t - T_e) \implies \mathcal{B}_o(s) = \frac{1 - e^{-T_e s}}{s}$$

$$f_e(t) = f(t)m(t) = \sum_{k=0}^{\infty} f(kT_e)\delta(t - kT_e)$$

et

$$f_b(t) = \sum_{k=0}^{k=\infty} f(kT_e) \left(\alpha(t - kT_e) - \alpha(t - (k+1)T_e) \right)$$

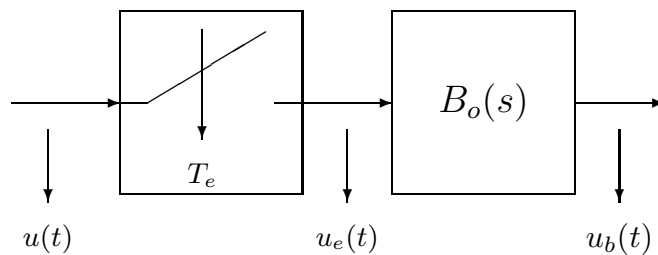
↓

$$\mathcal{L}(f_b(t)) = F_b(s) = \sum_{k=0}^{k=\infty} f(kT_e) \frac{e^{-kT_e s} - e^{-(k+1)T_e s}}{s}$$

↓

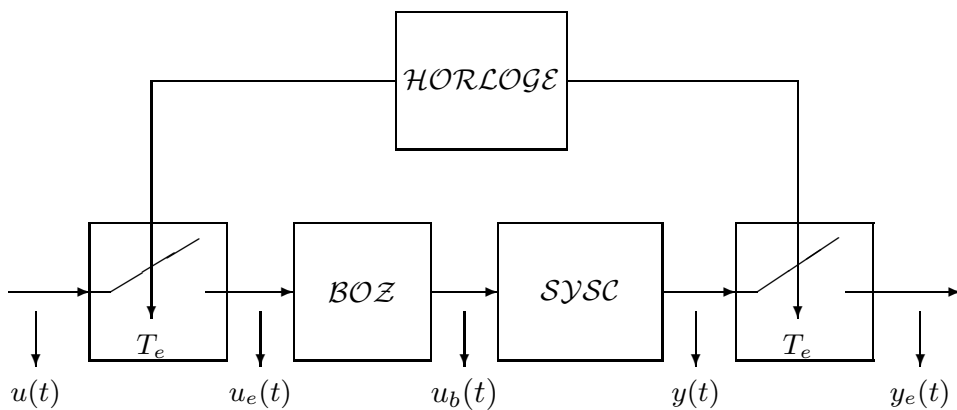
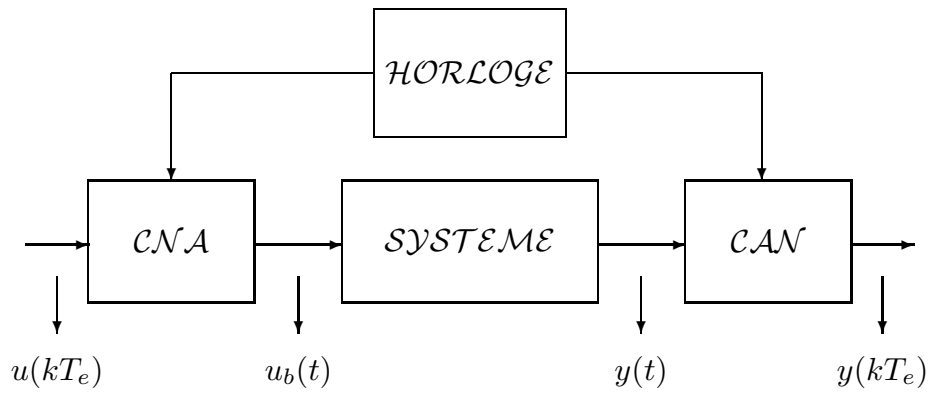
$$F_b(s) = \frac{1 - e^{-T_e s}}{s} F_e(s) = \mathcal{B}_o(s)F_e(s)$$

MODELISATION D'UN CNA



BLOQUEUR D'ORDRE ZERO

MODELISATION DES SYSTEMES

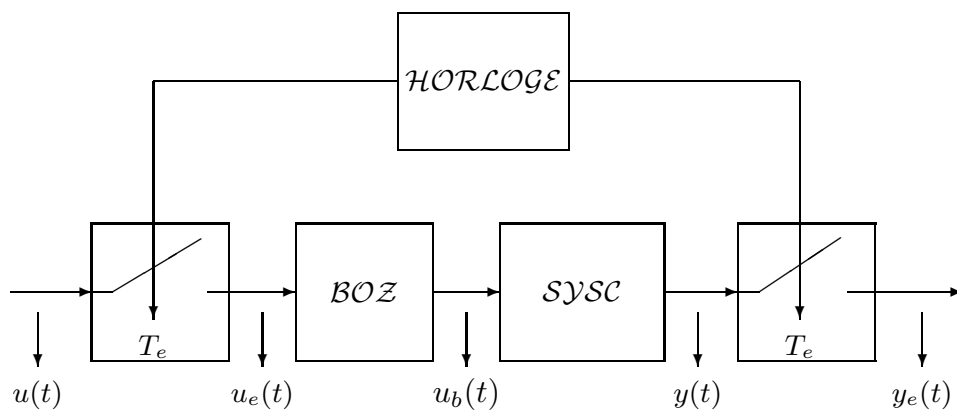


DIVERSES REPRESENTATIONS

$$\begin{aligned} \mathcal{SYSC} : U_b = \{u_b : \mathcal{R}^+ \rightarrow \mathcal{R}\} &\rightarrow Y = \{y : \mathcal{R}^+ \rightarrow \mathcal{R}\} \\ u_b(t) &\rightarrow y(t) = \mathcal{SYSC}[u_b(t)] \end{aligned}$$

↓

$$\begin{aligned} \mathcal{SYSE} : U = \{u : \mathcal{Z}^+ \rightarrow \mathcal{R}\} &\rightarrow Y = \{y : \mathcal{Z}^+ \rightarrow \mathcal{R}\} \\ u(kT_e) &\rightarrow y(kT_e) = \mathcal{SYSE}[u(kT_e)] \end{aligned}$$



UN RESULTAT FONCTIONNEL

*Soient f et g deux fonctions qui admettent des transformées de Laplace alors la fonction échantillonnée du produit de convolution $h = g * f_e$ est donnée par*

$$h_e(t) = g_e(t) * f_e(t)$$

et donc

$$\mathcal{L}\{h_e(t)\} = G_e(s) \times F_e(s)$$

DEMONSTRATION

$$\begin{aligned} h_e(t) &= \left(\int_{-\infty}^{+\infty} g(t - \tau) f_e(\tau) d\tau \right) m(t) \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(t - \tau) m(t) f(\tau) m(\tau) d\tau \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(t - \tau) m(t - \tau) f(\tau) m(\tau) d\tau \\ &= g_e(t) * f_e(t) \end{aligned}$$

OPERATEUR RETARD

$$q^{-1} / \{f : \mathcal{Z} \rightarrow \mathcal{R}\} \rightarrow \{f : \mathcal{Z} \rightarrow \mathcal{R}\}$$

$$\{f(kT_e)\} \rightarrow \{f_{r1}(kT_e)\}$$

avec

$$f_{r1}(kT_e) = f(kT_e - T_e) \text{ pour tout } k \in \mathcal{Z}$$

$$\Downarrow$$

$$A(q^{-1}) (f(kT_e)) = \left(\sum_{i=0}^{na} a_i q^{-i} \right) (f(kT_e))$$

$$\Updownarrow$$

$$A(q^{-1}) (f(kT_e)) = \sum_{i=0}^{na} a_i f_{ri}((k-i)T_e) = \sum_{i=0}^{na} a_i f((k-i)T_e)$$

P1.

$$\begin{aligned} & (\alpha A(q^{-1}) + \beta B(q^{-1})) (f(kT_e)) \\ & = \\ & (\alpha A(q^{-1})) (f(kT_e)) + (\beta B(q^{-1})) (f(kT_e)) \end{aligned}$$

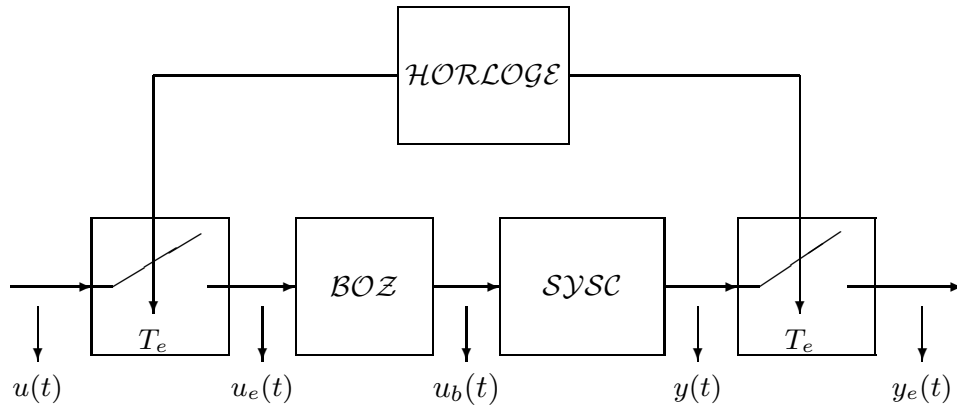
P2.

$$\begin{aligned} A(q^{-1}) (B(q^{-1}) (f(kT_e))) & = (A(q^{-1})B(q^{-1})) (f(kT_e)) \\ & = B(q^{-1}) (A(q^{-1}) (f(kT_e))) \end{aligned}$$

P3.

$$\begin{aligned} F(q^{-1}) (x_f(kT_e)) & = G(q^{-1}) (x(kT_e)) \\ \Leftrightarrow & \\ x_f(kT_e) & = \frac{G(q^{-1})}{F(q^{-1})} (x(kT_e)) \end{aligned}$$

REPOSE IMPULSIONNELLE



$$y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} g_c(\tau) u_b(t - \tau) d\tau = \int_0^t g_c(\tau) u_b(t - \tau) d\tau$$

⇓

$$y(kT_e) = \int_0^{\infty} g_c(\tau) u_b(kT_e - \tau) d\tau$$

$$= \sum_{\ell=1}^{\infty} \int_{(\ell-1)T_e}^{\ell T_e} g_c(\tau) u_b(kT_e - \tau) d\tau$$

$$= \sum_{\ell=1}^{\infty} \left(\int_{(\ell-1)T_e}^{\ell T_e} g_c(\tau) d\tau \right) u(kT_e - \ell T_e)$$

REPONSE IMPULSIONNELLE

$$y(kT_e) = \sum_{\ell=1}^{\infty} g(\ell T_e) u(kT_e - \ell T_e)$$

avec

$$g(\ell T_e) = \int_{(\ell-1)T_e}^{\ell T_e} g_c(\tau) d\tau$$

↓

$$\left(u(kT_e) = \delta(kT_e) \right) \implies \left(y(kT_e) = g(kT_e) \text{ pour tout } k \in \mathcal{N} \right)$$

$$\mathcal{RIMP} \left\{ y(kT_e) = \mathcal{G}(q^{-1}) u(kT_e) \right.$$

avec

$$\mathcal{G}(q^{-1}) = \sum_{\ell=1}^{\infty} g(\ell T_e) q^{-\ell} = g(T_e) q^{-1} + \dots + g(i T_e) q^{-i} + \dots$$

↓

*le bloqueur d'ordre zéro introduit un retard
d'une période d'échantillonnage
dans le cas d'un système continu strictement propre*

↓

$$\mathcal{G}(q^{-1}) = q^{-1} \frac{b_0 + b_1 q^{-1} + \dots + b_{nb} q^{-nb}}{1 + a_1 q^{-1} + \dots + a_{na} q^{-na}} = q^{-1} \frac{B(q^{-1})}{A(q^{-1})}$$

REPONSE HARMONIQUE

$$y(kT_e) = \mathcal{G}(q^{-1}) e^{j\omega k T_e} = \sum_{\ell=1}^{\infty} g(\ell T_e) e^{j\omega(kT_e - \ell T_e)}$$

⇓

$$\mathcal{RHAR} \left\{ y(kT_e) = \mathcal{G}(e^{-j\omega T_e}) e^{j\omega k T_e} \right.$$

avec

$$\mathcal{G}(e^{-j\omega T_e}) = \sum_{\ell=1}^{\infty} g(\ell T_e) e^{-j\omega \ell T_e}$$

$$\mathcal{G}(e^{-j\omega T_e}) = \mathcal{F}(\{g(kT_e)\}) = \mathcal{M}(j\omega) e^{j\varphi(\omega)}$$

⇓

$$\mathcal{G}(e^{j(\omega+\omega_e)T_e}) = \mathcal{G}(e^{j\omega T_e}) \text{ pour tout } \omega \in \mathcal{R}$$

et

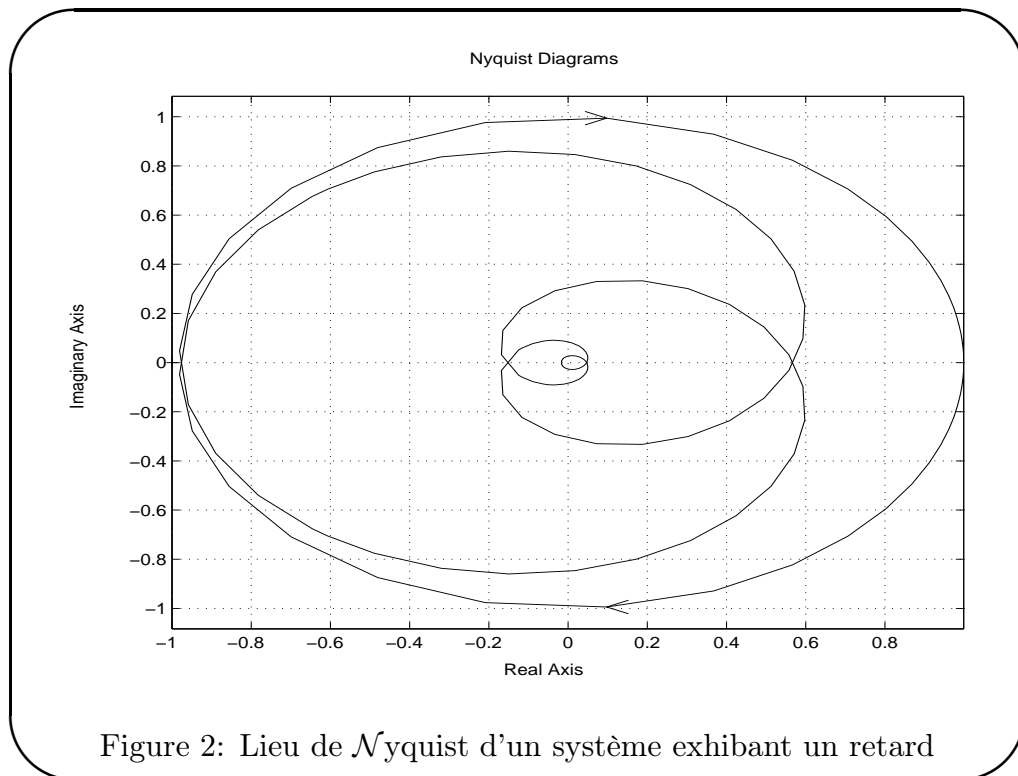
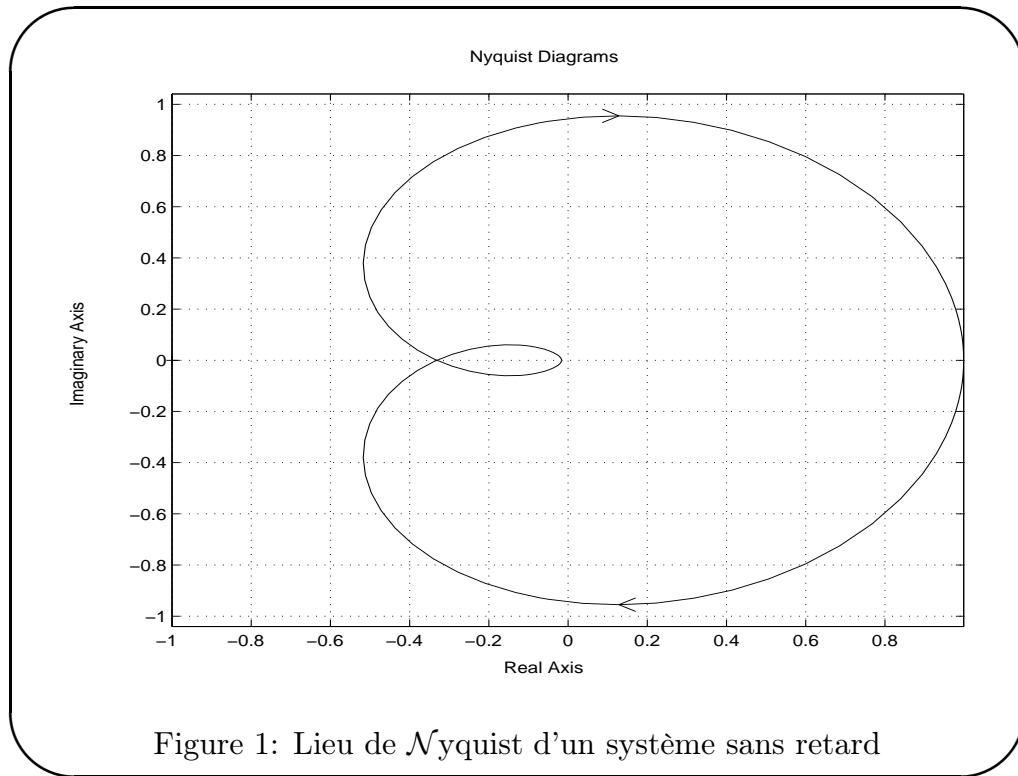
$$\mathcal{G}(e^{-j\omega T_e}) = (\mathcal{G}(e^{j\omega T_e}))^* \text{ pour tout } \omega \in \mathcal{R}$$

⇓

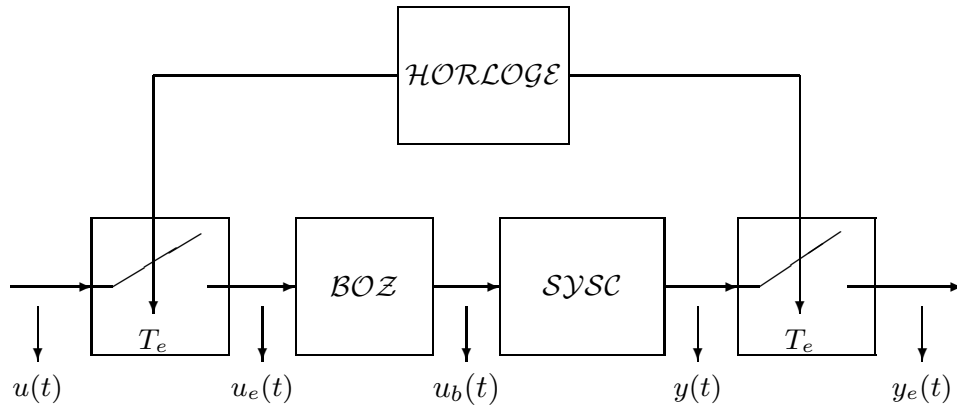
$$\{\mathcal{G}(e^{j\omega T_e})\}_{\omega \in \mathcal{R}} \longrightarrow \{\mathcal{G}(e^{j\omega T_e})\}_{\omega \in [0, \omega_n]}$$

♠

Diagrammes de Bode, Nyquist et Black



FONCTION DE TRANSFERT



$$SYSC \left\{ \begin{array}{l} Y(s) = G_c(s) U_b(s) \text{ et } U_b(s) = B_o(s) U_e(s) \end{array} \right.$$

$$\Downarrow$$

$$Y(s) = \left(G_c(s) B_o(s) \right) U_e(s) = \left(G_c(s) \frac{1 - e^{-T_e s}}{s} \right) U_e(s)$$

$$\Downarrow$$

$$y(t) = (g * u_e)(t)$$

$$\Uparrow$$

$$\mathcal{L}(\{g(t)\}_{t \in \mathcal{R}^+}) = G_c(s) \frac{1 - e^{-T_e s}}{s} = \frac{G_c(s)}{s} - e^{-T_e s} \frac{G_c(s)}{s}$$

$$y(t) = (g * u_e)(t) \implies y_e(t) = (g_e * u_e)(t)$$

$$\uparrow$$

$$g(t) = g_{cimp}(t) - g_{cimp}(t - T_e)$$

$$\downarrow$$

$$\text{SYSE } \left\{ Y(z) = \mathcal{G}(z) U(z) \text{ avec } \mathcal{G}(z) = \mathcal{Z}(\{g(kT_e)\}_{k \in \mathcal{N}})\right.$$

$$\downarrow$$

$$\mathcal{G}(z) = \frac{z-1}{z} \mathcal{Z}(\{g_{cimp}(kT_e)\}_{k \in \mathcal{N}})$$

EXEMPLES

$\mathcal{G}_c(s)$	$\mathcal{G}(z) = \frac{z-1}{z} \mathcal{Z}(\{g_{cimp}(kT_e)\}_{k \in \mathcal{N}})$
$\frac{1}{s}$	$\frac{T_e}{z-1}$
$\frac{1}{s^2}$	$\frac{T_e^2(z+1)}{(z-1)^2}$
$\frac{\alpha}{s+\alpha}$	$\frac{1 - e^{-\alpha T_e}}{z - e^{-\alpha T_e}}$
$\frac{\alpha^2}{(s+\alpha)^2}$	$\frac{(1 - e^{-\alpha T_e}(1 + \alpha T_e))z + e^{-\alpha T_e}(e^{-\alpha T_e} + \alpha T_e - 1)}{z^2 - 2e^{-\alpha T_e}z + e^{-2\alpha T_e}}$

CONFIGURATION POLES-ZEROS

$Y(z) = \mathcal{G}(z) U(z)$

avec

$$\mathcal{G}(z) = \frac{Z(z)}{P(z)} = \gamma \frac{\prod_{i=1}^{nz} (z - z_i)}{\prod_{i=1}^{np} (z - p_i)}$$

↓

$$\mathcal{Z}(\text{SYS}) : \{z_1, \dots, z_{nz}\} \longrightarrow \{ ? \}$$

$$\mathcal{P}(\text{SYS}) : \{p_{c1}, \dots, p_{cnp}\} \longrightarrow \{e^{p_{c1}T_e}, \dots, e^{p_{cnp}T_e}\}$$

↑

Diapositives 14 et 19

INTERPRETATION PERTINENTE

- Pôles

des sortie de la forme $y(t) = \gamma_i p_i^k \alpha(kT_e)$

pour une entrée identiquement nulle

- Configuration de zéros

une sortie identiquement nulle

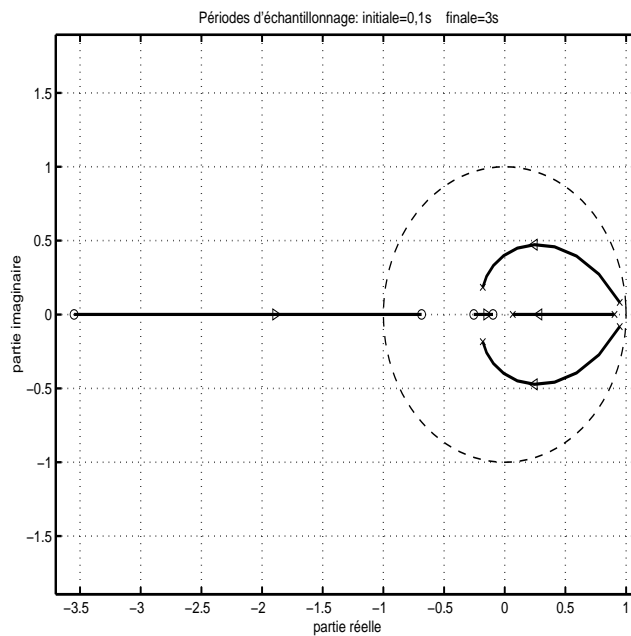
pour des entrées de la forme $u(t) = \beta_i z_i^k \alpha(kT_e)$

EXEMPLE

$$\mathcal{G}(s) = \frac{1}{(s+1)(s^2+2s+1)}$$

↓

$$T_e \in [0.1s, 3s]$$



Pôles et zéros d'un système échantillonné

ZEROS D'ECHANTILLONNAGE

$$\mathcal{G}_c(s) = \frac{1}{s^n}$$

↓

$$\mathcal{G}(z) = \frac{z-1}{z} \mathcal{Z} \left\{ \frac{1}{s^{n+1}} \right\} = \frac{T_e^n}{n!} \frac{B_n(z)}{(z-1)^n}$$

avec

$$B_n(z) = b_1 z^{n-1} + \dots + b_{n-1} z + b_n$$

♠

$$b_k = \sum_{i=1}^k \frac{(n+1)!}{(n+1-k+i)!} i^n (-1)^{k-i}$$

n	$B_n(z)$
1	1
2	$z + 1$
3	$z^2 + 4z + 1$
4	$z^3 + 11z^2 + 11z + 1$
5	$z^4 + 26z^3 + 66z^2 + 26z + 1$

EQUATION AUX DIFFERENCES

$$Y(z) = \mathcal{G}(z) U(z)$$

avec

$$\mathcal{G}(z) = z^{-1} \frac{B(z^{-1})}{A(z^{-1})} = z^{-1} \frac{b_0 + b_1 z^{-1} + \dots + b_{nb} z^{-nb}}{1 + a_1 z^{-1} + \dots + a_{na} z^{-na}}$$

↓

$$A(z^{-1})Y(z) = z^{-1}B(z^{-1})U(z)$$

$$Y(z) + \sum_{i=1}^{na} a_i z^{-i} Y(z) = \sum_{i=0}^{nb} b_i z^{-i} z^{-1} U(z)$$

↓

$$y(kT_e) + \sum_{i=1}^{na} a_i y(kT_e - iT_e) = \sum_{i=0}^{nb} b_i u(kT_e - iT_e - T_e)$$

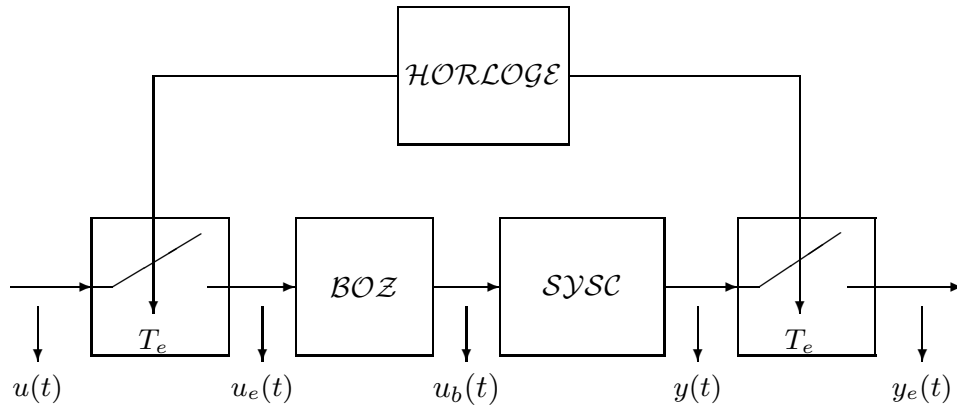
↓

$$\left(1 + \sum_{i=1}^{na} a_i q^{-i} \right) y(kT_e) = \left(\sum_{i=0}^{nb} b_i q^{-i} \right) q^{-1} u(kT_e)$$

⇕

$$A(q^{-1})y(kT_e) = q^{-1}B(q^{-1})u(kT_e)$$

REPRESENTATION D'ETAT



$$\text{SYSC} \left\{ \begin{array}{l} \rho x(t) = F_c x(t) + G_c u_b(t) \text{ avec } x(t_o) = x_o \\ y(t) = H_c x(t) + E_c u_b(t) \end{array} \right.$$

$$\Downarrow$$

$$\text{TRÉS} \left\{ \begin{array}{l} x(t) = e^{F_c(t-t_o)} x(t_o) + \int_{t_o}^t e^{F_c(t-\tau)} G_c u_b(\tau) d\tau \\ y(t) = H_c e^{F_c(t-t_o)} x(t_o) \\ \quad + \int_{t_o}^t H_c e^{F_c(t-\tau)} G_c u_b(\tau) d\tau + E_c u_b(t) \end{array} \right.$$

$$\begin{aligned}
 x((k+1)T_e) &= e^{F_c((k+1)T_e - kT_e)} x(kT_e) \\
 &\quad + \int_{kT_e}^{(k+1)T_e} e^{F_c((k+1)T_e - \tau)} G_c u_b(\tau) d\tau \\
 &\quad \downarrow \\
 u_b(\tau) &= u(kT_e) \quad \text{pour } \tau \in [kT_e, (k+1)T_e) \\
 (k+1)T_e - \tau &= \eta \\
 &\quad \downarrow \\
 x((k+1)T_e) &= (e^{F_c T_e}) x(kT_e) + \left(\int_0^{T_e} e^{F_c \eta} G_c d\eta \right) u(kT_e)
 \end{aligned}$$

REPRESENTATION D'ETAT

$$\text{SYSC} \begin{cases} \rho x(t) = F_c x(t) + G_c u_b(t) \quad \text{avec } x(t_0) = x_0 \\ y(t) = H_c x(t) + E_c u_b(t) \end{cases}$$

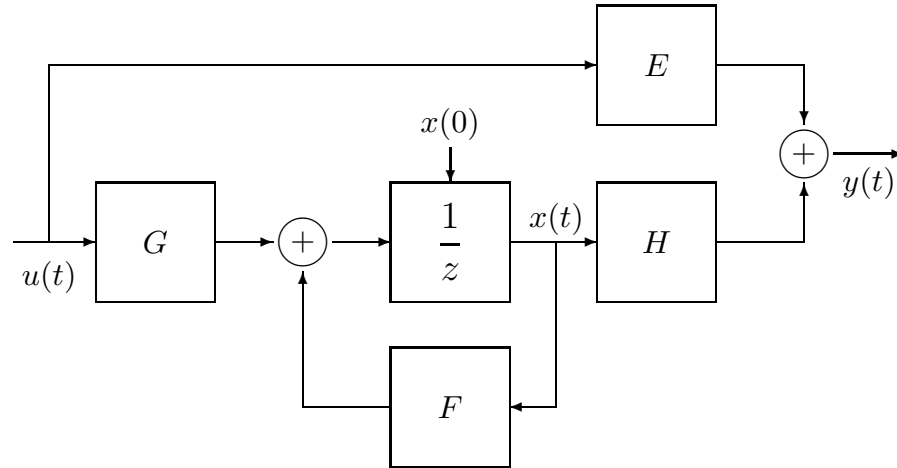
↓

$$\text{SYSE} \begin{cases} x((k+1)T_e) = F x(kT_e) + G u(kT_e) \quad \text{avec } x(0) = x_0 \\ y(kT_e) = H x(kT_e) + E u(kT_e) \end{cases}$$

♠

$$F = e^{F_c T_e}, \quad G = \left(\int_0^{T_e} e^{F_c \tau} d\tau \right) G_c, \quad H = H_c \quad \text{et} \quad E = E_c$$

$$\mathcal{SYS} \begin{cases} x((k+1)T_e) = Fx(kT_e) + Gu(kT_e) \text{ avec } x(0) = x_o \\ y(kT_e) = Hx(kT_e) + Eu(kT_e) \end{cases}$$



TRAJECTOIRE D'ENTREE-SORTIE

$$\mathcal{TES} \begin{cases} x(kT_e) = F^{(k-\ell)}x(\ell T_e) + \sum_{j=\ell}^{k-1} F^{(k-j-1)}Gu(jT_e) \\ y(kT_e) = HF^{(k-\ell)}x(\ell T_e) + \sum_{j=\ell}^{k-1} HF^{(k-j-1)}Gu(jT_e) + Eu(kT_e) \end{cases}$$

$$\Downarrow$$

$$(F, G, H, E) \longrightarrow g(kT_e) = \begin{cases} HF^{(k-1)}G & \text{pour } k > 0 \\ E & \text{ailleurs} \end{cases}$$

REALISATION D'ETAT → FONCTION DE TRANSFERT

$$\text{SYSE} \begin{cases} zX(z) = FX(z) + GU(z) \\ Y(z) = HX(z) + EU(z) \end{cases}$$

$$\Downarrow$$

$$\text{SYSE} \begin{cases} (zI_n - F)X(z) = GU(z) \\ Y(z) = HX(z) + EU(z) \end{cases}$$

$$\Downarrow$$

$$(F, G, H, E) \longrightarrow \mathcal{G}(z) = H(zI_n - F)^{-1}G + E$$

FONCTION DE TRANSFERT → REALISATION D'ETAT

$$?(F, G, H, E) / \mathcal{G}(z) = \frac{B_\sigma(z)}{A_\sigma(z)} = H(zI_n - F)^{-1}G + E$$

$$\downarrow$$

$$\frac{B_\sigma(z)}{A_\sigma(z)} = \frac{H \text{Adj}(zI_n - F)G + \det(zI_n - F)E}{\det(zI_n - F)}$$

$$\downarrow$$

$$\mathcal{CP}(\text{SYS}) \subset \mathcal{CM}(\text{SYS}) \triangleq \mathcal{V}(F)$$

SYSTEMES EXIBANT UN RETARD

(*SYSC exhibe un retard pur τ_σ*)

\Leftrightarrow

(*$g_c(t) = 0$ pour tout $t < \tau_\sigma$*)



$\tau_\sigma = (d+1)T_e - \eta$ avec $d \in \mathcal{N}$ et $0 < \eta \leq T_e$

$$g(\ell T_e) = \int_{(\ell-1)T_e}^{\ell T_e} g_c(\tau) d\tau$$

$g(\ell T_e) = 0$ pour tout $\ell \in [1, d]$



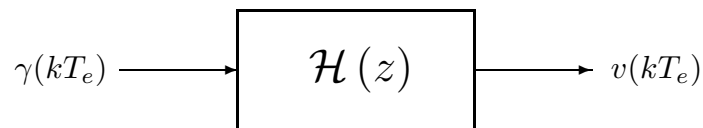
$$\mathcal{G}(q^{-1}) = q^{-d-1} \frac{b_0 + b_1 q^{-1} + \dots + b_{nb} q^{-nb}}{1 + a_1 q^{-1} + \dots + a_{na} q^{-na}}$$



$$\mathcal{G}(z^{-1}) = z^{-d-1} \frac{b_0 + b_1 z^{-1} + \dots + b_{nb} z^{-nb}}{1 + a_1 z^{-1} + \dots + a_{na} z^{-na}}$$

MODELISATION DES PERTURBATIONS

$$V(z) = \mathcal{H}(z) \Gamma(z)$$



♠ Contexte déterministe

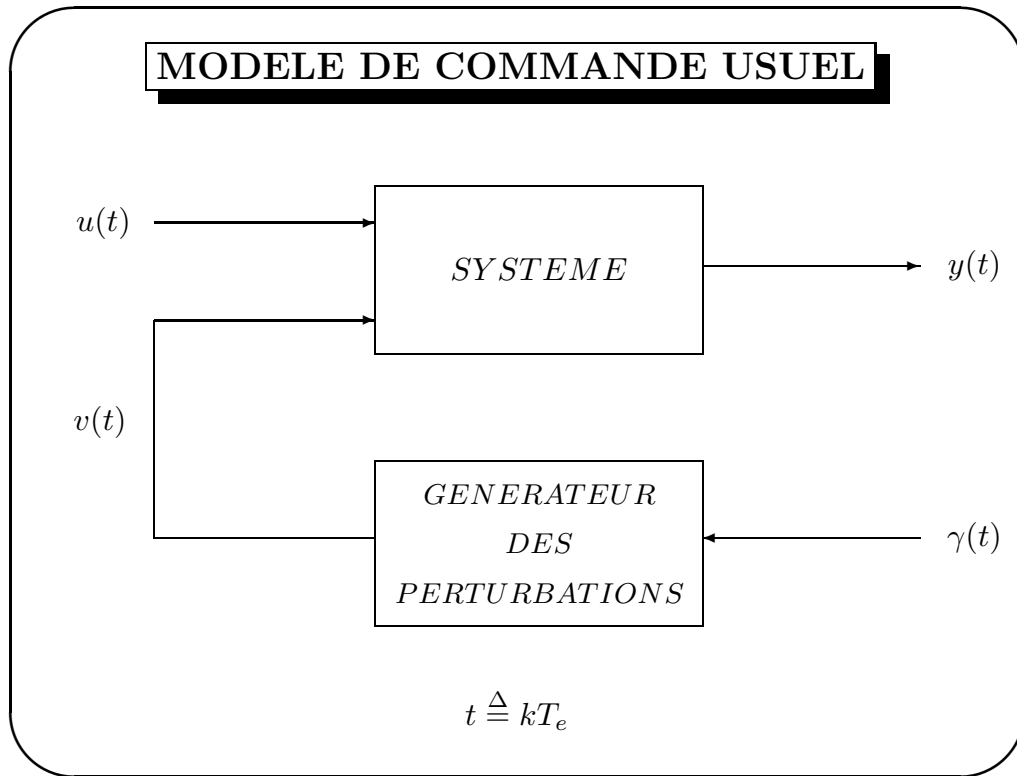
$\{\gamma(kT_e)\}$ est une impulsion d'amplitude inconnue



$\{\gamma(kT_e)\}$ est une séquence d'impulsions largement espacées
d'amplitudes et d'instant d'occurrence inconnus

♠ Contexte stochastique

$\{\gamma(kT_e)\}$ est une séquence de variables aléatoires indépendantes
de moyenne nulle et de variances finies



$$\text{SYS} \begin{cases} A(q^{-1})y(t) = B(q^{-1})u(t-d-1) + E(q^{-1})v(t) \\ D(q^{-1})v(t) = C(q^{-1})\gamma(t) \end{cases}$$

↓

$$A(q^{-1}) = 1 + a_1q^{-1} + \dots + a_{na}q^{-na}$$

$$B(q^{-1}) = b_o + b_1q^{-1} + \dots + b_{nb}q^{-nb}$$

$$C(q^{-1}) = c_o + c_1q^{-1} + \dots + c_{nc}q^{-nc}$$

$$D(q^{-1}) = 1 + d_1q^{-1} + \dots + d_{nd}q^{-nd}$$

$$E(q^{-1}) = e_o + e_1q^{-1} + \dots + e_{ne}q^{-ne}$$

↓

$$v(t) = v\alpha(t) \implies D(q^{-1}) = 1 - q^{-1}$$

$$v(t) = v\sin(\omega t + \phi)\alpha(t) \implies D(q^{-1}) = 1 - 2\cos(\omega T_e)q^{-1} + q^{-2}$$

CONCLUSION

♠ Motivations

♠ Théorèmes fondamentaux

→ *Echantillonnage et Reconstruction*

♠ Modélisation

CNA – SYSTÈME – CAN

♠ Relations entre les diverses représentations

♠ Systèmes à retards

♠ Modélisation usuelle

$$\text{SYS} \begin{cases} A(q^{-1})y(t) = B(q^{-1})u(t-d-1) + E(q^{-1})v(t) \\ D(q^{-1})v(t) = C(q^{-1})\gamma(t) \end{cases}$$

↓

$$A_{\sigma}(z) = \begin{cases} z^{na} A(z^{-1}) & \text{si } na \geq nb + d + 1 \\ z^{nb+d+1-na} A(z^{-1}) & \text{si } na < nb + d + 1 \end{cases}$$

$$B_{\sigma}(z) = \begin{cases} z^{na-nb-d-1} B(z^{-1}) & \text{si } na \geq nb + d + 1 \\ z^{nb} B(z^{-1}) & \text{si } na < nb + d + 1 \end{cases}$$

STABILITE

PLAN

- Concepts de stabilité
- Rappel et notations
- Stabilité externe
- Stabilité interne
- Résultats usuels
- Conclusion

CONCEPTS DE STABILITE

- **Stabilité interne**

*Aptitude d'un système à produire
des sorties bornées à partir d'entrées bornées*

- ♠ **Stabilité interne**

*Aptitude d'un système dynamique à recouvrer
son état d'équilibre indépendamment des perturbations*

RAPPEL

$$F_e(s) = \mathcal{L} \{ f_e(t) \} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} f(kT_e) e^{-kT_e s}$$



$$F_e(s) \quad \xrightarrow{z = e^{T_e s}} \quad F(z)$$



$$F_e(s) = F(z) \text{ pour } z = e^{T_e s}$$

NOTATIONS

$$\mathcal{D}_s = \{z \in \mathcal{C} / |z| \leq 1\}$$

$$\mathcal{D}_{sa} = \{z \in \mathcal{C} / |z| < 1\}$$

$$\mathcal{C}_u = \{z \in \mathcal{C} / |z| = 1\}$$

$$\mathcal{R}_{sa}[z] = \{X(z) \in \mathcal{R}(z) / X(z) = 0 \implies z \in \mathcal{D}_{sa}\}$$

$$\mathcal{R}_{us}[z] = \left\{ X(z) \in \mathcal{R}[z] / (X(z) = 0 \implies z \in \mathcal{C}_u) \right. \\ \left. \text{et } (X(z_1) = X(z_2) = 0) \implies (z_1 = z_2) \right\}$$

↓

$$\mathcal{R}_{sm}[z] = \mathcal{R}_{us}[z] \uplus \mathcal{R}_{sa}[z] \quad \text{et} \quad \mathcal{R}[z] = \mathcal{R}_{sm}[z] \cup \mathcal{R}_{ins}[z]$$

STABILITE EXTERNE

$$\text{SYS} \left\{ y(kT_e) = \mathcal{G}(q^{-1}) u(kT_e) = \sum_{\ell=1}^{\infty} g(\ell T_e) u((k-\ell)T_e) \right.$$

↓

- SYS est stable si et seulement si

$$\lim_{k \rightarrow \infty} g(kT_e) = 0$$

- SYS est marginalement stable si et seulement si

$\{g(kT_e)\}$ est bornée *mais* n'est pas asymptotiquement nulle

- SYS est instable si et seulement si

$$\lim_{k \rightarrow \infty} g(kT_e) = \infty$$

RESULTAT FUNDAMENTAL I

Considérons un système linéaire invariant SYS décrit par sa réponse impulsionnelle ou sa fonction de transfert, respectivement notées par

$$\{g(kT_e)\}_{k \in \mathcal{N}}$$

$$\mathcal{G}(z) = z^{-d-1} \frac{B(z^{-1})}{B(z^{-1})} \triangleq \frac{B_\sigma(z)}{A_\sigma(z)}$$

Les propositions suivantes sont équivalentes.

PR1. SYS est stable au sens EBSB.

PR2. La norme suivante de la réponse impulsionnelle est finie

$$\sum_{k=0}^{\infty} |g(kT_e)| \leq B_g < \infty$$

$$\Updownarrow$$

$$\lim_{k \rightarrow \infty} g(kT_e) = 0$$

PR3. Les pôles de la fonction de transfert sont à l'intérieur du disque de centre l'origine et de rayon unitaire, soit

$$A_\sigma(z) \in \mathcal{R}_{sa}[z]$$

RESULTAT FUNDAMENTAL II

$$\mathcal{SYS} \left\{ \begin{array}{l} Y(z) = \mathcal{G}(z) U(z) \text{ avec } \mathcal{G}(z) = \frac{B_\sigma(z)}{A_\sigma(z)} \\ \downarrow \end{array} \right.$$

- \mathcal{SYS} est stable si et seulement si

$$A_\sigma(z) \in \mathcal{R}_{sa}(z)$$

- \mathcal{SYS} est marginalement stable si et seulement si

$$A_\sigma(z) = A_{se}(z) \bullet A_{sm}(z)$$

avec

$$A_{se}(z) \in \mathcal{R}_{dn}(z) \cup \mathcal{R}_{sa}(z) \text{ et } A_{sm}(z) \in \mathcal{R}_{sm}(z)$$

- \mathcal{SYS} est instable si et seulement si

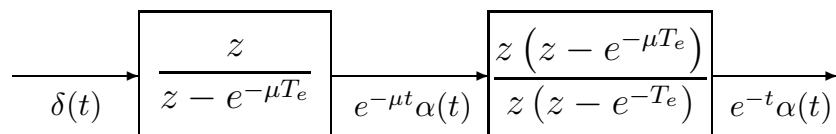
$$A_\sigma(z) \notin \mathcal{R}_{sa}(z) \cup \mathcal{R}_{sm}(z)$$

REMARQUE

Un système est issu d'une interconnection de plusieurs systèmes

↓

Interconnexions en série, en parallèle et en contre réaction



Stabilité externe pour tout $\mu \in \mathcal{R}$

Stabilité interne pour tout $\mu > 0$

STABILITE INTERNE

$$\mathcal{SA} \left\{ \begin{array}{l} x((k+1)T_e) = F x(kT_e) \quad \text{avec} \quad x(0) = x_o \end{array} \right.$$

↓

- \mathcal{SYS} est asymptotiquement stable si et seulement si

$$\lim_{k \rightarrow \infty} x(kT_e) = 0$$

- \mathcal{SYS} est stable si et seulement si

$\{x(kT_e)\}_{k \in \mathcal{N}}$ est bornée *mais* n'est pas asymptotiquement nulle

- \mathcal{SYS} est instable si et seulement si

$$\lim_{k \rightarrow \infty} x(kT_e) = \infty$$

RESULTAT FONDAMENTAL III

$$x((k+1)T_e) = F x(kT_e) \quad \text{avec} \quad x(0) = x_o \implies x(kT_e) = F^k x_o$$

- Stabilité asymptotique

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \|F^k\| = 0$$

⇕

$$\mathcal{V}(F) \subset \mathcal{D}_{sa}$$

⇕

$$\forall Q = Q^T > 0 \exists P = P^T > 0 / F^T P F - P = -Q$$

$$x((k+1)T_e) = F x(kT_e) \text{ avec } x(0) = x_o \implies x(kT_e) = F^k x_o$$

- Stabilité

$\{\|F^k\|\}_{k \in \mathcal{N}}$ est bornée *mais* n'est pas asymptotiquement nulle

$$\Updownarrow$$

$$\left(\mathcal{V}(F) \subset \mathcal{D}_s\right) \text{ et } \left(\lambda_i \in \mathcal{C}_u \implies \lambda_i \text{ n'est pas défective}\right)$$

$$\Updownarrow$$

$$\forall Q = Q^T \geq 0 \exists P = P^T \geq 0 / F^T P F - P = -Q$$

$$x((k+1)T_e) = F x(kT_e) \text{ avec } x(0) = x_o \implies x(kT_e) = F^k x_o$$

- Instabilité

$\{\|F^k\|\}_{k \in \mathcal{N}}$ n'est pas bornée

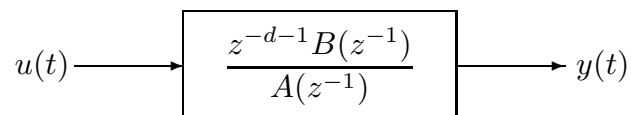
$$\Updownarrow$$

$$\exists i \in [1, n] / \left(\lambda_i \notin \mathcal{D}_s\right) \text{ ou } \left(\lambda_i \in \mathcal{C}_u \implies \lambda_i \text{ est défective}\right)$$

OUTILS FONDAMENTAUX

- Entrées asymptotiquement rejetées
- Principe du modèle interne
- Processus aléatoires

ENTREES ASYMPTOTIQUEMENT REJETEES



$$\begin{array}{c} \uparrow \\ A(z^{-1}) \in \mathcal{R}_{sa}[z] \\ \downarrow \end{array}$$

- Entrées usuelles

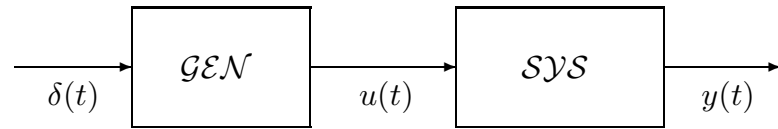
$$u(t) = \delta_a(t)$$

$$u(t) = \mathcal{F}(q^{-1})\delta(t) \text{ avec } \mathcal{CP}(\mathcal{F}(z)) \subset \mathcal{D}_{sa}$$

- Entrées non usuelles

$$B(q^{-1})u(t) = \mathcal{F}(q^{-1})\delta(t) \text{ avec } \mathcal{CP}(\mathcal{F}(z)) \subset \mathcal{D}_{sa}$$

PRINCIPE DU MODELE INTERNE



↑
SYS est stable et GEN est marginalement stable

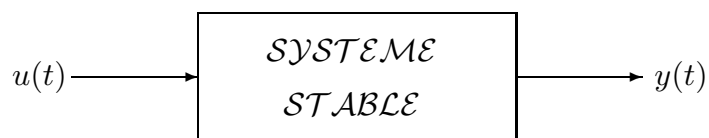
↓

$$\lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = 0 \iff \text{CPSI}(\text{GEN}) \subset \text{CZ}(\text{SYS})$$

↑

$$\text{CPSI}(\text{GEN}) = \text{CP}(\text{GEN}) \cap \mathcal{C}_u$$

PROCESSUS ALEATOIRES



$$\mathcal{E}(u(t)) = 0 \text{ et } \mathcal{E}\left((u(t))^2\right) = \sigma_u^2$$



$$\mathcal{E}(y(t)) = 0 \text{ et } \mathcal{E}\left((y(t))^2\right) = \sigma_y^2$$

CONCLUSION

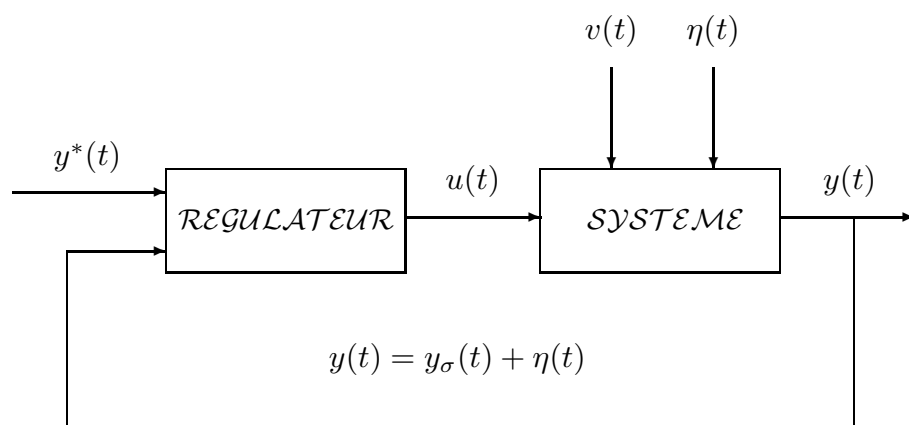
- Stabilité externe → réponse impulsionnelle
- Résultats fondamentaux de stabilité externe
- Limitation de la stabilité externe
- Stabilité interne → trajectoire d'état du système homogène
- Résultat fondamental de stabilité interne
- Outils fondamentaux à retenir

SYSTEMES ASSERVIS

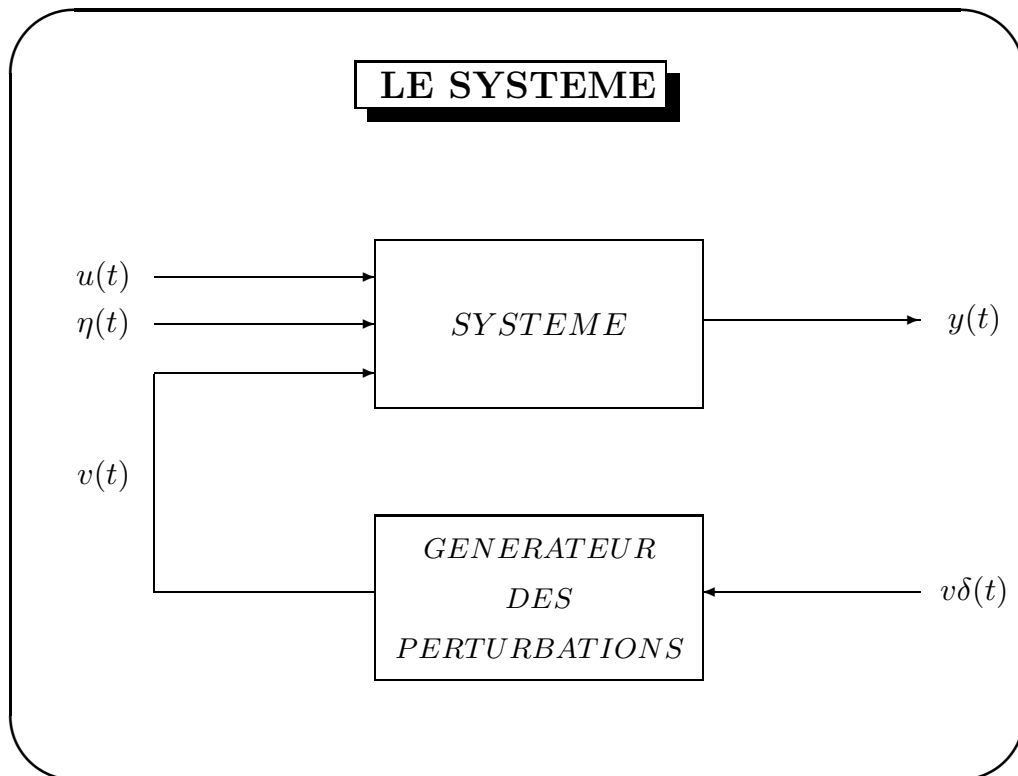
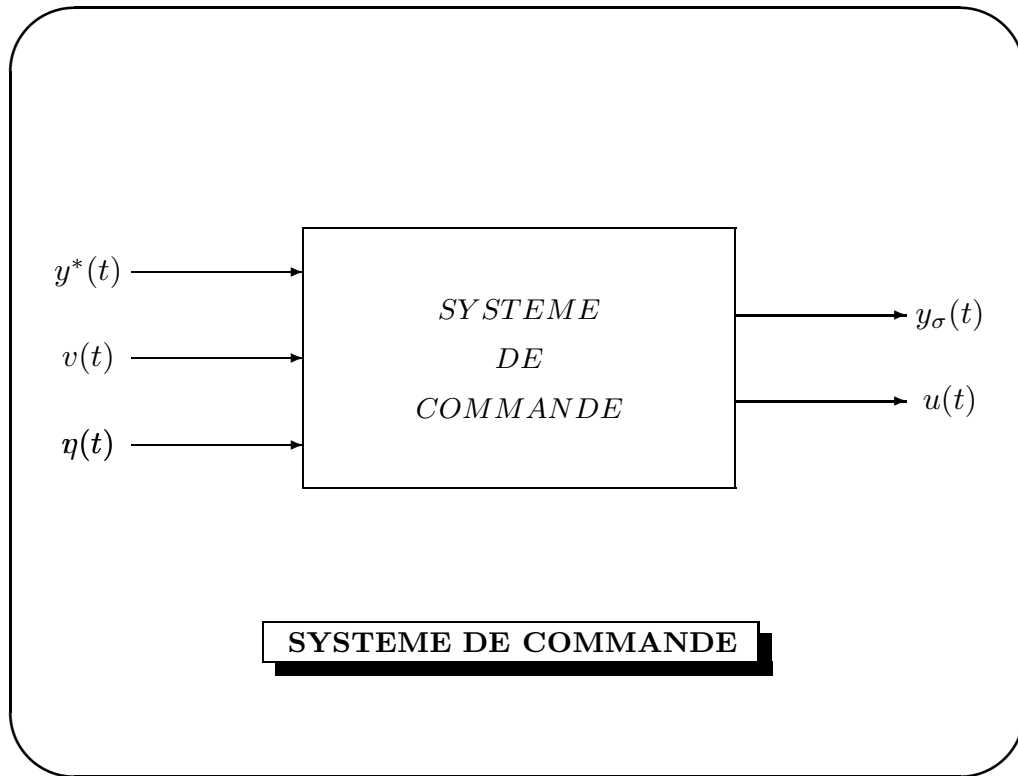
PLAN

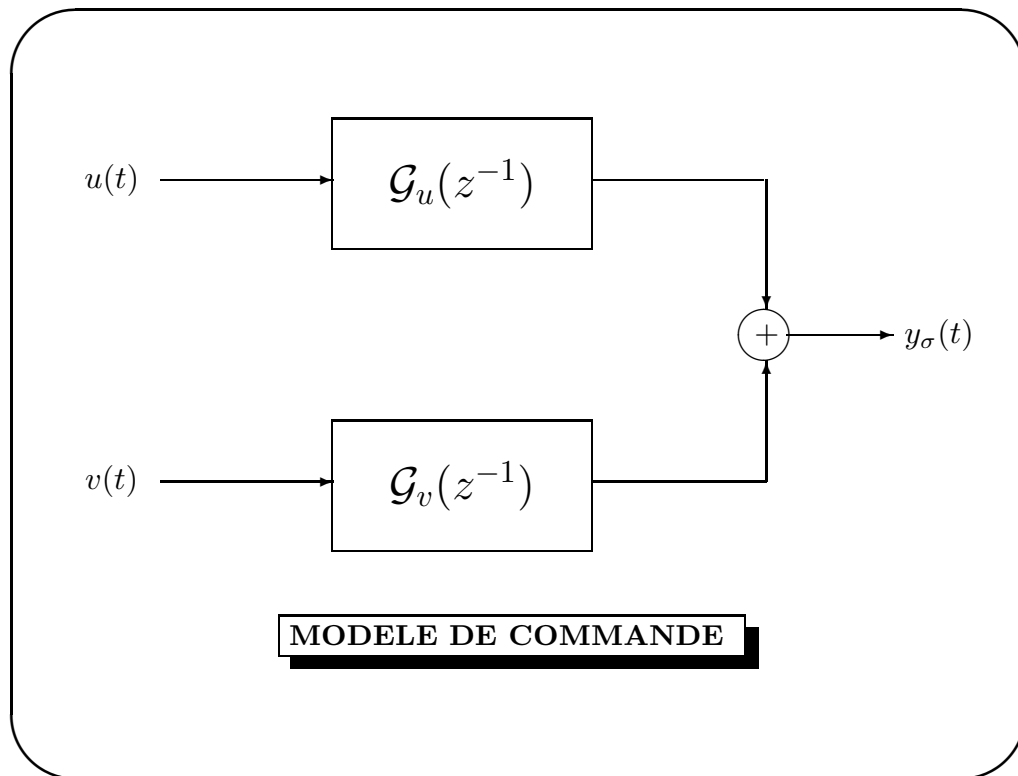
- ♠ Asservissements
- ♠ Le système
- ♠ Le régulateur
- ♠ Système de commande
- ♠ Analyse systémique
- ♠ Régulateurs admissibles

ASSERVISSEMENTS



? $REG \rightarrow \{u(t)\} / \{y_{\sigma}(t)\} \in \mathcal{V}(\{y^*(t)\}) / \{v(t)\}$ et $\{\eta(t)\}$





MODELE DE COMMANDE

$$MOC \begin{cases} y_{\sigma}(t) = \mathcal{G}_u(q^{-1}) u(t) + \mathcal{G}_v(q^{-1}) v(t) \\ v(t) = \mathcal{H}(q^{-1}) v\delta(t) \\ y(t) = y_{\sigma}(t) + \eta(t) \end{cases}$$

↓

$$\mathcal{G}_u(z^{-1}) = z^{-d-1} \frac{B(z^{-1})}{A(z^{-1})}$$

$$\mathcal{G}_v(z^{-1}) = \frac{E(z^{-1})}{A(z^{-1})}$$

$$\mathcal{H}(z^{-1}) = \frac{C(z^{-1})}{D(z^{-1})}$$

$$\mathcal{MCOM} \left\{ \begin{array}{l} A(q^{-1})y_{\sigma}(t) = B(q^{-1})u(t-d-1) + E(q^{-1})v(t) \\ D(q^{-1})v(t) = C(q^{-1})v\delta(t) \\ y(t) = y_{\sigma}(t) + \eta(t) \end{array} \right.$$

$$\uparrow$$

$$A(q^{-1}) = 1 + a_1q^{-1} + \dots + a_{na}q^{-na}$$

$$B(q^{-1}) = b_o + b_1q^{-1} + \dots + b_{nb}q^{-nb}$$

$$C(q^{-1}) = 1 + c_1q^{-1} + \dots + c_{nc}q^{-nc}$$

$$D(q^{-1}) = 1 + d_1q^{-1} + \dots + d_{nd}q^{-nd}$$

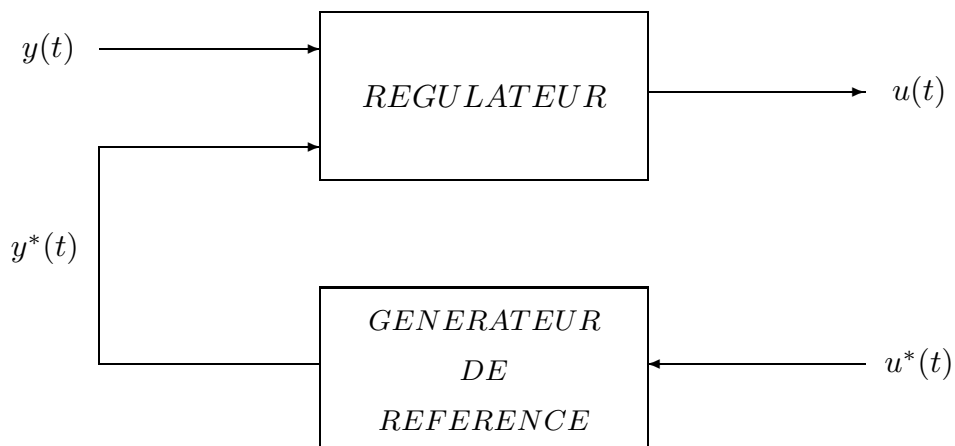
$$E(q^{-1}) = e_o + e_1q^{-1} + \dots + e_{ne}q^{-ne}$$

$$\uparrow$$

$$v(t) = v\alpha(t) \implies D(q^{-1}) = 1 - q^{-1}$$

$$v(t) = v\sin(\omega t + \phi)\alpha(t) \implies D(q^{-1}) = 1 - 2\cos(\omega T_e)q^{-1} + q^{-2}$$

LE REGULATEUR



$$\mathcal{REG} \begin{cases} u(t) = -\mathcal{R}_r(q^{-1}) y(t) + \mathcal{R}_p(q^{-1}) y^*(t+d+1) \\ y^*(t) = \mathcal{G}^*(q^{-1}) u^*(t) \end{cases}$$

↓

$$\mathcal{R}_r(z^{-1}) = \frac{R_n(z^{-1})}{R_d(z^{-1})}, \quad \mathcal{R}_p(z^{-1}) = \frac{R_p(z^{-1})}{R_d(z^{-1})}$$

et

$$\mathcal{G}^*(q^{-1}) = z^{-d-1} \frac{B^*(z^{-1})}{A^*(z^{-1})}$$

↓

$$\mathcal{REG} \begin{cases} R_d(q^{-1})u(t) + R_n(q^{-1})y(t) = R_p(q^{-1})y^*(t+d+1) \\ A^*(q^{-1})y^*(t+d+1) = B^*(q^{-1})u^*(t) \end{cases}$$

COMMANDE AVEC RETOUR UNITAIRE

$$R_p(q^{-1}) = q^{-d-1} R_n(q^{-1})$$

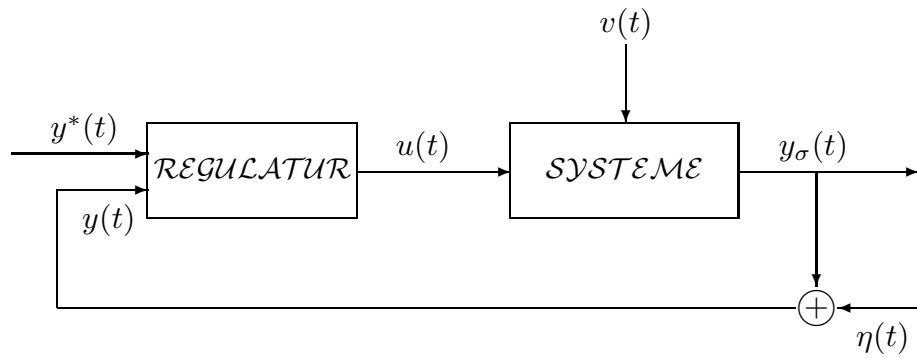
↓

$$\mathcal{REGRU} \begin{cases} u(t) = -\mathcal{R}(q^{-1}) (y^*(t) - y(t)) \\ y^*(t) = \mathcal{G}^*(q^{-1}) u^*(t) \end{cases}$$

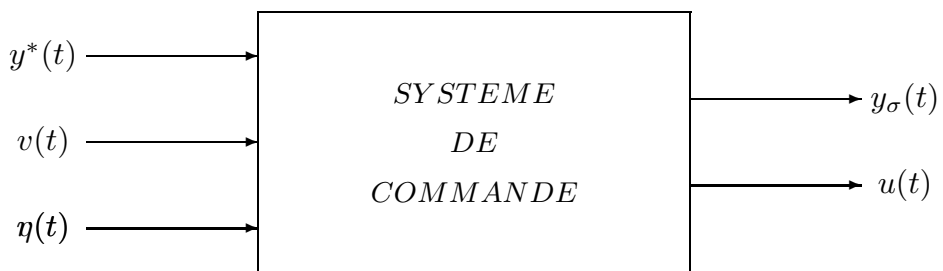
↓

$$\mathcal{R}(z^{-1}) = \frac{R_n(z^{-1})}{R_d(z^{-1})}$$

SYSTEME DE COMMANDE



? $REG \rightarrow \{u(t)\} / \{y_\sigma(t)\} \in \mathcal{V}(\{y^*(t)\}) / \{v(t)\}$ et $\{\eta(t)\}$



SYSTEME DE COMMANDE

EQUATIONS FONDAMENTALES

♠ *Le système*

$$\mathcal{MC} \left\{ \begin{array}{l} A(q^{-1})y_{\sigma}(t) = B(q^{-1})u(t-d-1) + E(q^{-1})v(t) \\ D(q^{-1})v(t) = C(q^{-1})\delta_v(t) \end{array} \right.$$

♠ *Le régulateur*

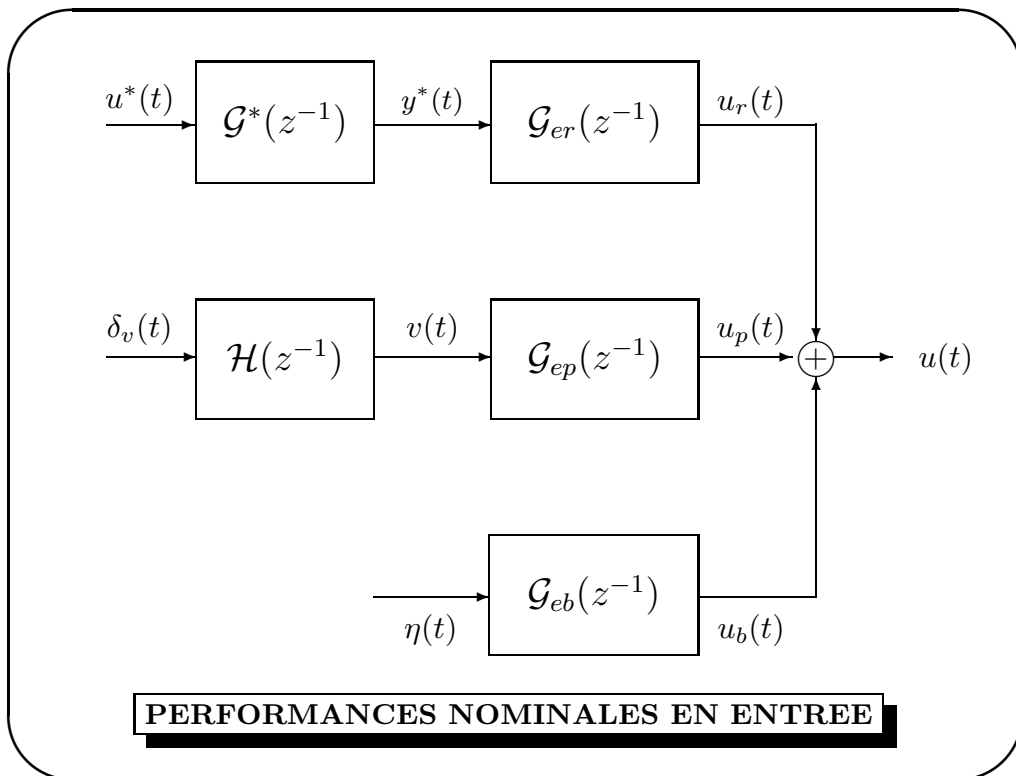
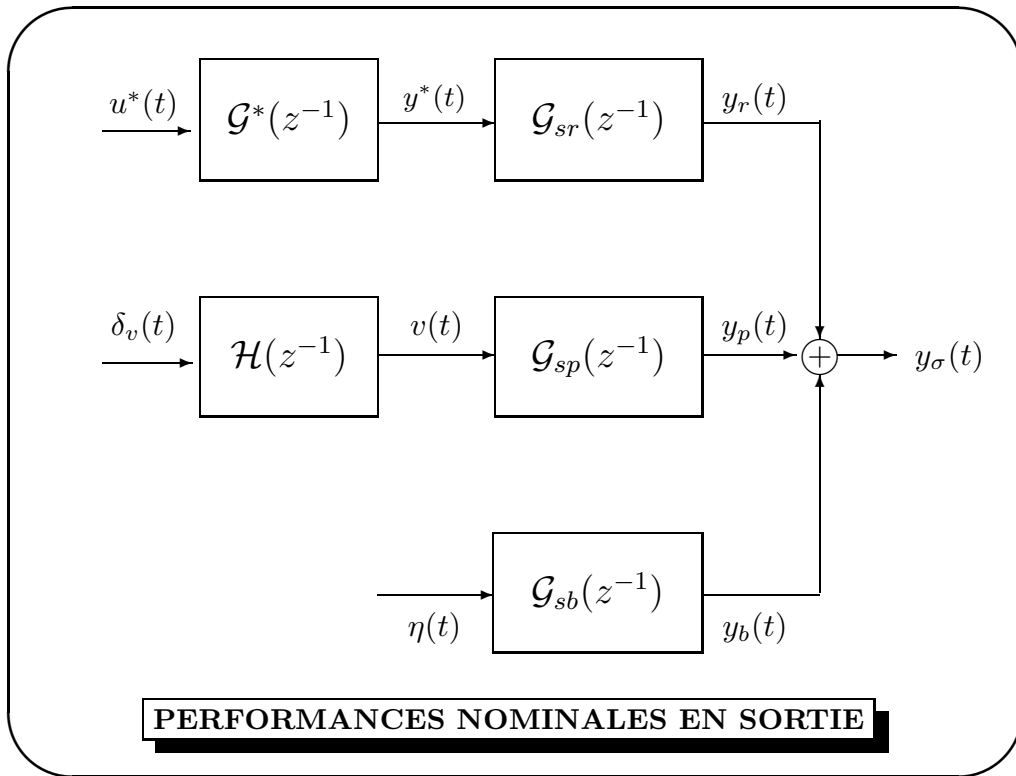
$$\mathcal{REG} \left\{ \begin{array}{l} R_d(q^{-1})u(t) + R_n(q^{-1})y(t) = R_p(q^{-1})y^*(t+d+1) \\ y(t) = y_{\sigma}(t) + \eta(t) \\ A^*(q^{-1})y^*(t+d+1) = B^*(q^{-1})u^*(t) \\ D^*(q^{-1})v(t) = C^*(q^{-1})\delta_v(t) \end{array} \right.$$

SYSTEME DE COMMANDE NOMINAL

$$\mathcal{SAS} \left\{ \begin{array}{l} y_{\sigma}(t) = \frac{q^{-d-1}B(q^{-1})R_p(q^{-1})}{P_c(q^{-1})} y^*(t+d+1) \\ \quad + \frac{E(q^{-1})R_d(q^{-1})}{P_c(q^{-1})} v(t) - \frac{q^{-d-1}B(q^{-1})R_n(q^{-1})}{P_c(q^{-1})} \eta(t) \\ u(t) = \frac{A(q^{-1})R_p(q^{-1})}{P_c(q^{-1})} y^*(t+d+1) \\ \quad - \frac{E(q^{-1})R_n(q^{-1})}{P_c(q^{-1})} v(t) - \frac{A(q^{-1})R_n(q^{-1})}{P_c(q^{-1})} \eta(t) \end{array} \right.$$

↑

$$P_c(q^{-1}) = A(q^{-1})R_d(q^{-1}) + q^{-d-1}B(q^{-1})R_n(q^{-1})$$



FONCTION DE TRANSFERT

$$SAS \left\{ Y_{sas}(z) = \mathcal{G}_{sas}(z^{-1}) U_{sas}(z) \right.$$

avec

$$\mathcal{G}_{sas}(z^{-1}) = \begin{pmatrix} \mathcal{G}_{sr}(z^{-1}) & \mathcal{G}_{sp}(z^{-1}) & \mathcal{G}_{sb}(z^{-1}) \\ \mathcal{G}_{er}(z^{-1}) & \mathcal{G}_{ep}(z^{-1}) & \mathcal{G}_{eb}(z^{-1}) \end{pmatrix}$$

↕

$$\mathcal{G}_{sas}(z^{-1}) = [\mathcal{G}_{ij}(z^{-1})] \quad (i, j) \in [s, e] \times [r, p, b]$$

FONCTIONS DE TRANSFERT DU SYSTEME ASSERVI

$$FTR \left\{ \begin{array}{l} \mathcal{G}_{sr}(z^{-1}) \triangleq \frac{B(z^{-1})R_p(z^{-1})}{P_c(z^{-1})} \\ \mathcal{G}_{sp}(z^{-1}) \triangleq \frac{E(z^{-1})R_d(z^{-1})}{P_c(z^{-1})} \\ \mathcal{G}_{sb}(z^{-1}) \triangleq -\frac{z^{-d-1}B(z^{-1})R_n(z^{-1})}{P_c(z^{-1})} \\ \mathcal{G}_{er}(z^{-1}) \triangleq z^{d+1} \frac{A(z^{-1})R_p(z^{-1})}{P_c(z^{-1})} \\ \mathcal{G}_{ep}(z^{-1}) \triangleq -\frac{E(z^{-1})R_n(z^{-1})}{P_c(z^{-1})} \\ \mathcal{G}_{eb}(z^{-1}) \triangleq -\frac{A(z^{-1})R_n(z^{-1})}{P_c(z^{-1})} \end{array} \right.$$

ANALYSE SYSTEMIQUE

- Rappel
- Stabilité nominale
- Dynamique de poursuite
- Dynamique de régulation
- Fonction de sensibilité usuelles
- Erreurs de poursuite
- Régulateurs admissibles

STABILITE NOMINALE

Le système asservi est stable si et seulement si tous ses modes sont situés dans le domaine de stabilité, soit

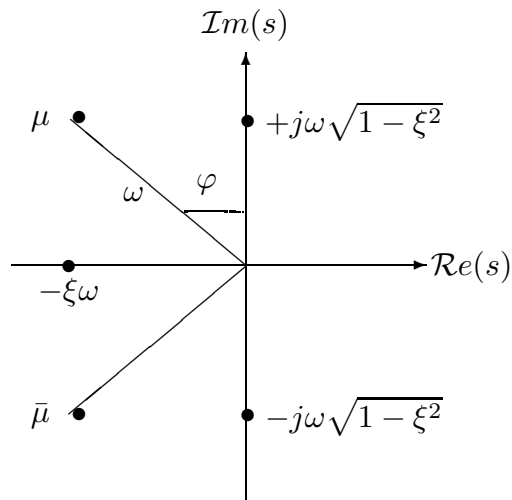
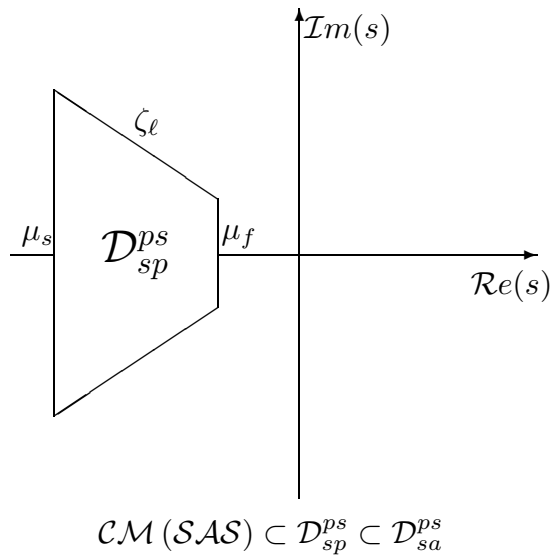
$$SAS \text{ est stable} \iff CM(SAS) \subset \mathcal{D}_{sa}^{pz}$$

ou d'une manière équivalente

$$(SAS \text{ est stable}) \iff (P_c(z^{-1}) = 0 \implies |z| < 1)$$

↑

$$P_c(z^{-1}) = A(z^{-1})R_d(z^{-1}) + z^{-d-1}B(z^{-1})R_n(z^{-1}) \in \mathcal{R}_{sa}[z^{-1}]$$

DOMAINE DE STABILITE ET DE PERFORMANCES


Mode $(\zeta, \omega) \rightarrow s^2 + 2\zeta\omega s + \omega^2$

Mode (ζ, ω)

↓

$$M(s) = s^2 + 2\zeta\omega s + \omega^2$$

↓

$$M(z^{-1}) = 1 - e^{-\zeta\omega T_e} \cos\left(\sqrt{1 - \zeta^2}\omega T_e\right) z^{-1} + e^{-2\zeta\omega T_e} z^{-2}$$

DOMAINE DE STABILITE ET DE PERFORMANCES

DYNAMIQUE DE POURSUITE

$$\begin{aligned}
 \mathcal{DP}(z^{-1}) &= \mathcal{G}_{sr}(z^{-1}) \mathcal{G}^*(z^{-1}) \\
 &= z^{d+1} \frac{z^{-d-1} B(z^{-1}) R_p(z^{-1})}{P_c(z^{-1})} \mathcal{G}^*(z^{-1}) \\
 &= \frac{B(z^{-1}) R_p(z^{-1})}{P_c(z^{-1})} \mathcal{G}^*(z^{-1})
 \end{aligned}$$

↓

*Le retard et les zéros du système
sont invariants par rétroaction*

DYNAMIQUE DE REGULATION

$$\begin{aligned}
 \mathcal{DR}(z^{-1}) &= \left(\mathcal{G}_{sp}(z^{-1}) \quad \mathcal{G}_{sb}(z^{-1}) \right) \\
 &= \left(\frac{E(z^{-1}) R_d(z^{-1})}{P_c(z^{-1})} \quad - \frac{z^{-d-1} B(z^{-1}) R_n(z^{-1})}{P_c(z^{-1})} \right)
 \end{aligned}$$

↓

*Les zéros de la fonction de transfert $\mathcal{G}_v(z^{-1})$
sont invariants par rétroaction*

FONCTIONS DE SENSIBILITE USUELLES

♠ Fonction de sensibilité

$$\mathcal{S}(z^{-1}) \triangleq \frac{A(z^{-1})R_d(z^{-1})}{P_c(z^{-1})} \longrightarrow \mathcal{FPH}$$

♠ Fonction de sensibilité complémentaire

$$\mathcal{T}(z^{-1}) \triangleq \frac{z^{-d-1}B(z^{-1})R_n(z^{-1})}{P_c(z^{-1})} \longrightarrow \mathcal{FPB}$$

↓

$$\mathcal{S}(z) + \mathcal{T}(z) = 1 \quad \text{pour tout } z \in \mathcal{C}$$

♠ Bruit de mesure en sortie.

$$\mathcal{G}_{sb}(z^{-1}) = -\mathcal{T}(z^{-1})$$

♠ Bruit de mesure en entrée.

$$\mathcal{G}_{eb}(z^{-1}) = -\mathcal{R}(z^{-1})\mathcal{S}(z^{-1}) \triangleq -\mathcal{RS}(z^{-1})$$

♠ Perturbations en sortie, i.e. $E(z^{-1}) = A(z^{-1})$.

$$\mathcal{G}_{sp}(z^{-1}) = \mathcal{S}(z^{-1})$$

♠ Perturbations en entrée, i.e. $E(z^{-1}) = z^{-d-1}B(z^{-1})$

$$\mathcal{G}_{sp}(z^{-1}) = \mathcal{G}(z^{-1})\mathcal{S}(z^{-1}) \triangleq \mathcal{GS}(z^{-1})$$

REGULATEURS ADMISSIBLES

- Composantes de la sortie du système asservi
- Erreurs de poursuite
- Classe des régulateurs admissibles
- Performances dynamiques
- Insensibilité aux bruits de mesure
- Compensation parfaite des perturbations
- Poursuite admissible
- Precision maximale
- Dépollution du signal de commande
- Structure canonique d'un régulateur

COMPOSANTES DE LA SORTIE SYSTEME ASSERVI

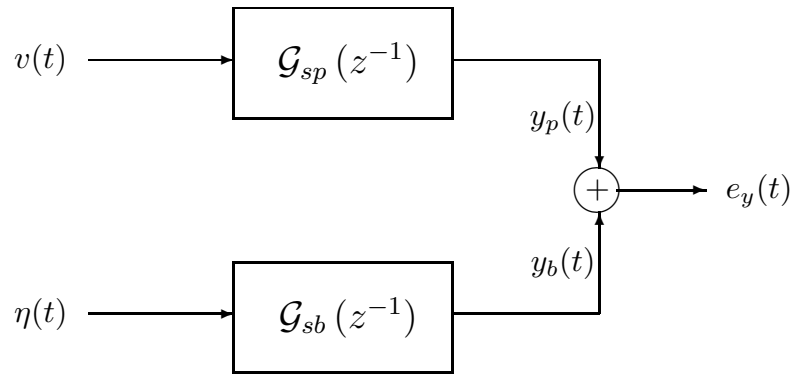
$$SAS \begin{cases} y_\sigma(t) = y_r(t) + y_p(t) + y_b(t) \\ u(t) = u_r(t) + u_p(t) + u_b(t) \end{cases}$$

↑

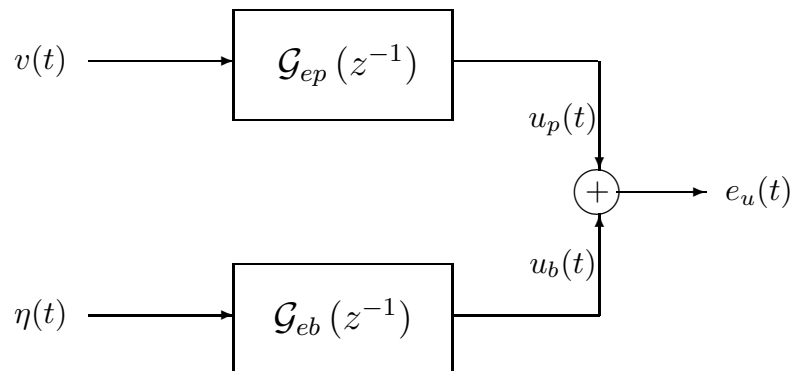
$$CSAS \begin{cases} y_r(t) = \mathcal{G}_{sr}(q^{-1})y^*(t) \\ y_p(t) = \mathcal{G}_{sp}(q^{-1})v(t) \\ y_b(t) = \mathcal{G}_{sb}(q^{-1})\eta(t) \\ u_r(t) = \mathcal{G}_{er}(q^{-1})y^*(t+d+1) \\ u_p(t) = \mathcal{G}_{ep}(q^{-1})v(t) \\ u_b(t) = \mathcal{G}_{eb}(q^{-1})\eta(t) \end{cases}$$

ERREUR DE POURSUITE EN SORTIE

$$e_y(t) \triangleq y_\sigma(t) - y_r(t) = y_p(t) + y_b(t)$$

**ERREUR DE POURSUITE EN ENTREE**

$$e_u(t) \triangleq u(t) - u_r(t) = u_p(t) + u_b(t)$$



ERREUR DE POURSUITE

$$e_{\sigma}(t) \triangleq y^*(t) - y_{\sigma}(t) = e_c(t) - y_p(t) - y_b(t)$$

avec

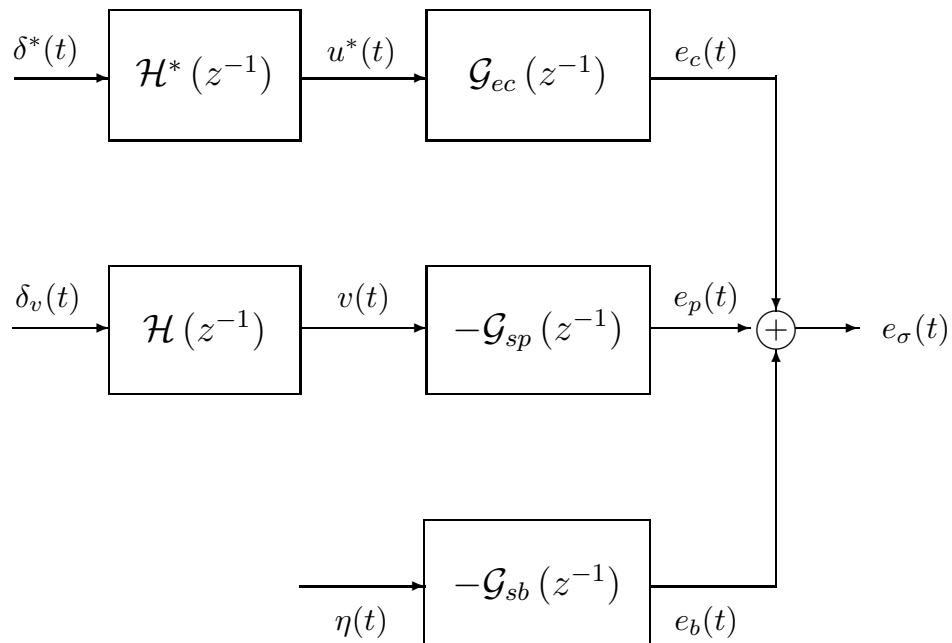
$$e_c(t) = \mathcal{G}_{ec}(q^{-1})u^*(t)$$

↓

$$\mathcal{G}_{ec}(q^{-1})$$

\triangleq

$$\frac{A(q^{-1})R_d(q^{-1}) + B(q^{-1})(q^{-d-1}R_n(q^{-1}) - R_p(q^{-1}))}{P_c(q^{-1})} \mathcal{G}^*(q^{-1})$$



CLASSE DES REGULATEURS ADMISSIBLES

C1. Le système de commande réalise les performances dynamiques requises

$$RPD \left\{ \mathcal{CM}(SAS) \subset \mathcal{D}_{sp} \right.$$

C2. Le système de commande est insensible aux bruits de mesures inéluctables

$$IBM \left\{ \{y_b(t)\} \in \mathcal{SAZI} \text{ et } \{u_b(t)\} \in \mathcal{SAZI} \right.$$

C3. Le système de commande réalise une compensation parfaite des perturbations qui affectent ses performances en sortie

$$CPP \left\{ \lim_{t \rightarrow \infty} y_p(t) = 0 \right.$$

C4. Le système de commande réalise une poursuite admissible (resp. une précision maximale) si l'erreur de poursuite en sortie (resp. l'erreur de poursuite) est aussi petite que possible, i.e.

$$\mathcal{PA} \left\{ \begin{array}{l} \{e_y(t)\} \in \mathcal{SAZI} \\ \text{avec} \\ \lim_{t \rightarrow \infty} e_y(t) = 0 \text{ lorsque } \eta(t) = 0 \text{ pour tout } t \end{array} \right.$$

$$\left(\text{resp. } \mathcal{PM} \left\{ \begin{array}{l} \{e_\sigma(t)\} \in \mathcal{SAZI} \\ \text{avec} \\ \lim_{t \rightarrow \infty} e_\sigma(t) = 0 \text{ lorsque } \eta(t) = 0 \text{ pour tout } t \end{array} \right. \right)$$

C5. Le système de commande réalise, si besoin est, une dépollution du signal de commande des composantes indésirables en sortie

$$\mathcal{DSEC} \left\{ \lim_{t \rightarrow \infty} u_{ind}(t) = 0 \text{ avec } u_{ind}(t) = -\mathcal{RS}(q^{-1})y_{ind}(t) \right.$$

REALISATION DES PERFORMANCES DYNAMIQUES

$$\mathcal{RPD} \left\{ \mathcal{CM}(SAS) \subset \mathcal{D}_{sp} \right.$$

$$\Downarrow$$

$$? \mathcal{R}_r(z^{-1}) = \frac{R_n(z^{-1})}{R_d(z^{-1})} \quad / \quad P_c(z^{-1}) \in \mathcal{D}_{sp}[z^{-1}]$$

SYNTHESE MODALE

$$? \mathcal{R}_r(z^{-1}) \quad / \quad P_c(z^{-1}) = M(z^{-1})\bar{M}(z^{-1})$$

$$\Downarrow$$

$$M(z^{-1}) = M_d(z^{-1})M_a(z^{-1})$$

$$\Uparrow$$

$$M_d(z^{-1}) = 1 - e^{-\xi_r \omega_r T_e} \cos \left(\sqrt{1 - \xi_r^2} \omega_r T_e \right) z^{-1} + e^{-2\xi_r \omega_r T_e} z^{-2}$$

$$\Uparrow$$

Mode (ξ_r, ω_r)

INSENSIBILITE AUX BRUITS DE MESURE

$$\begin{cases} y_b(t) = \mathcal{G}_{sb}(q^{-1})\eta(t) = -\mathcal{T}(q^{-1})\eta(t) \\ u_b(t) = \mathcal{G}_{eb}(q^{-1})\eta(t) = -\mathcal{RS}(q^{-1})\eta(t) \end{cases}$$

et

$\mathcal{T}(z^{-1})$ est un filtre passe bas

↕

SAS est IBM ssi $\mathcal{RS}(z^{-1})$ est un filtre passe bas

COMPENSATION DES PERTURBATIONS

$$y_p(t) = \mathcal{G}_{sp}(q^{-1})v(t) \quad \text{et} \quad v(t) = \mathcal{H}(q^{-1})\delta_v(t)$$

↓

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{E(q^{-1})R_d(q^{-1})}{P_c(q^{-1})} v(t) = 0$$

↕

$$D(q^{-1}) \text{ divise } E(q^{-1})R_d(q^{-1})$$

↑

$$R_d(q^{-1}) = S(q^{-1})D_r(q^{-1}) \quad \text{avec} \quad D_r(q^{-1}) \triangleq \frac{D(q^{-1})}{\text{pgcd}(E(q^{-1}), D(q^{-1}))}$$

POURSUITE PARFAITE

$$y_r(t) = \mathcal{G}_{sr}(q^{-1})y^*(t) = y^*(t) \quad \forall t$$

$$\Downarrow$$

$$\mathcal{G}_{sr}(q^{-1}) = \frac{B(z^{-1})R_p(z^{-1})}{P_c(z^{-1})} = 1 \quad \forall z \in \mathcal{C}$$

$$\Downarrow$$

$$A(z^{-1})R_d(z^{-1}) + B(z^{-1})R_n(z^{-1}) = B(z^{-1})R_p(z^{-1}) \quad \forall z \in \mathcal{C}$$

$$\spadesuit$$

$$\mathcal{CZ}(\mathcal{G}(z^{-1})) \subset \mathcal{D}_{sp} \subset \mathcal{D}_{sa}$$

POURSUITE SEMI PARFAITE

$$y_r(t) = \mathcal{G}_{sr}(q^{-1})y^*(t) = \beta B(q^{-1})y^*(t)$$

$$\Downarrow$$

$$\mathcal{T}_{rs}(z^{-1}) = \beta B(z^{-1}) \quad \text{avec} \quad \beta = \frac{1}{B(1)}$$

$$\Downarrow$$

$$R_p(z^{-1}) = \beta P_c(z^{-1})$$

$$\spadesuit$$

$$1 \notin \mathcal{CZ}(\mathcal{S}\mathcal{Y}\mathcal{S})$$

PRECISION MAXIMALE

$$e_\sigma(t) = e_c(t) + e_p(t) + e_b(t)$$

avec

$$e_c(t) = \mathcal{G}_{ec}(q^{-1})y^*(t)$$

$$e_p(t) = -\mathcal{G}_{sp}(q^{-1})v(t) \quad \text{et} \quad e_b(t) = -\mathcal{G}_{sb}(q^{-1})\eta(t)$$

⇕

SAS réalise une *PM* ssi $\{e_\sigma(t)\} \in \mathcal{SAZI}$

⇕

SAS réalise une *PM* ssi $\lim_{t \rightarrow \infty} e_c(t) = 0$ et $\lim_{t \rightarrow \infty} e_p(t) = 0$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} e_p(t) = 0 \quad \text{ssi} \quad D(q^{-1}) \text{ divise } E(q^{-1})R_d(q^{-1})$$

↓

$$R_p(q^{-1}) = q^{-d-1}R_n(q^{-1}) \quad \text{et} \quad D^*(q^{-1})u^*(t) = C^*(q^{-1})\delta^*(t)$$

⇓

$$\lim_{t \rightarrow \infty} e_c(t) = 0 \quad \text{ssi} \quad D^*(q^{-1}) \text{ divise } A(q^{-1})R_d(q^{-1})$$

SAS réalise une *PM* ssi $R_d(q^{-1}) = S(q^{-1})D_r(q^{-1})$

↑

$$D_r(q^{-1}) = \text{ppcm} \left(\frac{D(q^{-1})}{\text{pgcd}(D(q^{-1}), E(q^{-1}))}, \frac{D^*(q^{-1})}{\text{pgcd}(D^*(q^{-1}), A(q^{-1}))} \right)$$

DEPOLLUTION DU SIGNAL D'ENTREE

$$y(t) = y_a(t) + y_{ind}(t) \quad \text{avec} \quad D_{ind}(q^{-1})y_{ind}(t) = C_{ind}(q^{-1})\delta_{ind}(t)$$

↓

$$u_{ind}(t) = \mathcal{G}_{ep}(q^{-1})y_{ind}(t) \quad \text{avec} \quad \mathcal{G}_{ep}(q^{-1}) = -\frac{A(q^{-1})R_n(q^{-1})}{P_c(q^{-1})}$$

↓

$$\text{SAS réalise une } \mathcal{DSE} / \{y_{ind}(t)\} \text{ ssi } \lim_{t \rightarrow \infty} u_{ind}(t) = 0$$

↓

$$\lim_{t \rightarrow \infty} u_{ind}(t) = 0 \quad \text{ssi} \quad D_{ind}(q^{-1}) \text{ divise } A(q^{-1})R_n(q^{-1})$$

↑

$$R_n(q^{-1}) = R(q^{-1})D_c(q^{-1}) \quad \text{puisque} \quad \text{pgcd}(D_{ind}(q^{-1}), A(q^{-1})) = 1$$

STRUCTURE USUELLE DU REULATEUR

$$\mathcal{R}_r(z^{-1}) \triangleq \frac{R_n(z^{-1})}{R_d(z^{-1})} = \frac{R(z^{-1})}{S(z^{-1})} \frac{D_c(z^{-1})}{D_r(z^{-1})}$$

et

$$R_p(z^{-1}) \triangleq T(z^{-1})$$

↓

$$S(q^{-1})D_r(q^{-1})u(t) + R(q^{-1})D_c(q^{-1})y(t) = T(q^{-1})y^*(t + d + 1)$$

$$A^*(q^{-1})y^*(t + d + 1) = B^*(q^{-1})u^*(t)$$

$$D^*(q^{-1})u^*(t) = C^*(q^{-1})\delta^*(t)$$

REMARQUE

$$P_c(z^{-1}) = A(z^{-1})D_r(z^{-1})S(z^{-1}) + z^{-d-1}B(z^{-1})D_c(z^{-1})R(z^{-1})$$

$$\uparrow$$

$$P_c(z^{-1}) \in \mathcal{R}_{sp}[z^{-1}]$$

$$\downarrow$$

$$\text{pgcd}(D_r(q^{-1}), B(q^{-1})) = \text{pgcd}(D_c(q^{-1}), A(q^{-1})) = 1$$

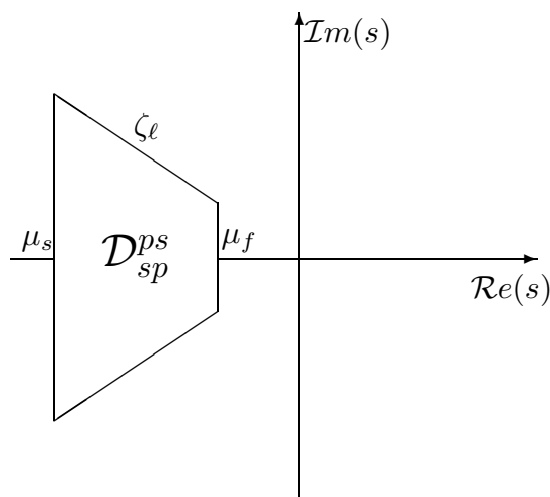
ASPECTS DE SYNTHÈSE

- Le cahier des charges
- Le domaine de stabilité et des performances et la période d'échantillonnage
- La classe des systèmes
- La structure du régulateur
- Synthèse du système de commande
- Mise en oeuvre du régulateur

LE CAHIER DES CHARGES

- S1. Une poursuite admissible caractérisée par un mode d'amortissement ζ_p et de pulsation propre ω_p .
- S2. Une compensation parfaite des perturbations (resp. une précision maximale pour une séquence de points de consigne spécifique) avec une dynamique de régulation caractérisée par un mode dominant d'amortissement ζ_r et de pulsation propre ω_r .
- S3. Une insensibilité aux bruits de mesure inévitables.
- S4. Un blocage en entrée du système des composantes indésirables dans la sortie du système ou un affinement des performances nominales et de robustesse en stabilité.

DOMAINE DE STABILITE ET DE PERFORMANCES



$$\mathcal{CM}(SAS) \subset \mathcal{D}_{sp}^{ps} \subset \mathcal{D}_{sa}^{ps}$$

Mode dominant $(\omega_r, \zeta_r) \longrightarrow \omega_{max} \approx \omega_r \gg \omega_p$

↓

$$M_d(z^{-1}) = 1 - e^{-\zeta_r \omega_r T_e} \cos\left(\sqrt{1 - \zeta_r^2} \omega_r T_e\right) z^{-1} + e^{-2\zeta_r \omega_r T_e} z^{-2}$$

↓

$$\mathcal{D}_{sp}^{ps} = \left\{ \text{modes}(\omega, \zeta) / \zeta \geq \zeta_r \quad \text{et} \quad \zeta \omega \gg \zeta_r \omega_r \right\}$$

↓

$$\omega_r T_e < \pi \longrightarrow \omega_r T_e \in \left[\frac{\pi}{10}, \frac{\pi}{4} \right]$$

CLASSE DES SYSTEMES

$$A(q^{-1})y_\sigma(t) = B(q^{-1})u(t-d-1) + \sum_{i=1}^m E_i(q^{-1})v_i(t)$$

$$D_i(q^{-1})v_i(t) = C_i(q^{-1})\delta_i(t) \text{ avec } \delta_i(t) = v_i\delta(t) \text{ pour } i \in [1, m]$$

$$D_{ind}(q^{-1})y_{ind}(t) = C_{ind}(q^{-1})\delta_{ind}(t) \text{ avec } \delta_{ind}(t) = v_{ind}\delta(t)$$

CLASSE DES REGULATEURS

$$S(q^{-1})D_r(q^{-1})u(t) + R(q^{-1})D_c(q^{-1})y(t) = T(q^{-1})y^*(t+d+1)$$

$$A^*(q^{-1})y^*(t+d+1) = B^*(q^{-1})u^*(t)$$

$$D^*(q^{-1})u^*(t) = C^*(q^{-1})\delta^*(t)$$

POLES FIXES DU REGULATEUR

$$D_r(q^{-1}) = \begin{cases} D_{rp}(q^{-1}) & \text{si } \mathcal{PA} \\ \text{ppcm}(D_{rp}(q^{-1}), D_{rc}(q^{-1})) & \text{si } \mathcal{PM} \end{cases}$$

$$\downarrow$$

$$D_{rp}(q^{-1}) = \text{ppcm}(D_{r1}(q^{-1}), \dots, D_{rm}(q^{-1}))$$

avec

$$D_{ri}(q^{-1}) = \frac{D_i(q^{-1})}{\text{pgcd}(D_i(q^{-1}), E_i(q^{-1}))}$$

$$D_{rc}(q^{-1}) = \frac{D^*(q^{-1})}{\text{pgcd}(D^*(q^{-1}), A(q^{-1}))}$$

ZEROS FIXES DU REGULATEUR

$$D_c(q^{-1}) = \begin{cases} D_{ind}(q^{-1}) & \text{si } \mathcal{DSE} \\ D_{apa}(q^{-1}) & \text{autrement} \end{cases}$$

$$\uparrow$$

$$D_{apa}(q^{-1}) = 1 + q^{-1} \text{ est un choix judicieux}$$

SYNTHESE MODALE

$$? (R(z^{-1}), R(z^{-1})) /$$

$$A(z^{-1})D_r(z^{-1})S(z^{-1}) + z^{-d-1}B(z^{-1})D_c(z^{-1})R(z^{-1})$$

$$=$$

$$M(q^{-1}) = M_d(z^{-1})M_a(z^{-1})\bar{M}(z^{-1})$$

$$\downarrow$$

$$\bar{M}(q^{-1}) = \begin{cases} B(q^{-1}) & \text{si } \mathcal{PP} \\ 1 & \end{cases}$$

$$M_d(z^{-1}) = 1 - e^{-\zeta_r \omega_r T_e} \cos\left(\sqrt{1 - \zeta_r^2} \omega_r T_e\right) z^{-1} + e^{-2\zeta_r \omega_r T_e} z^{-2}$$

$$\longrightarrow \text{Mode } (\omega_r, \zeta_r)$$
RESULTAT FUNDAMENTAL

Soient $\bar{A}(z^{-1})$ et $\bar{B}(z^{-1})$ deux polynômes de degrés respectifs $n_{\bar{a}}$ et $n_{\bar{b}}$ et $\bar{C}(z^{-1})$ un polynôme arbitraire de degré $n_{\bar{c}}$ tels que

$$C1. \quad \text{pgcd}(\bar{A}(z^{-1}), \bar{B}(z^{-1})) = 1$$

$$C2. \quad n_{\bar{c}} \leq n_{\bar{a}} + n_{\bar{b}} - 1$$

Alors, l'équation polynomiale

$$\mathcal{EQP} \left\{ \bar{A}(z^{-1})X(z^{-1}) + \bar{B}(z^{-1})Y(z^{-1}) = \bar{C}(z^{-1}) \right.$$

admet une solution unique pourvu que les degrés des polynômes $X(z^{-1})$ et $Y(z^{-1})$ soient spécifiés comme suit

$$n_x = n_{\bar{b}} - 1 \quad \text{et} \quad n_y = n_{\bar{a}} - 1$$

La solution unique de l'équation polynomiale \mathcal{EQP} n'est autre que celle du système d'équations linéaires sous-jacent, soit

$$\mathcal{A} \mathcal{X} = \mathcal{B}$$

avec

$$\mathcal{A} = \begin{bmatrix} \bar{a}_o & 0 & 0 & \bar{b}_o & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & 0 & \vdots & \ddots & 0 \\ \vdots & & \bar{a}_o & \vdots & & \bar{b}_o \\ \bar{a}_{n\bar{a}} & & \vdots & \bar{b}_{n\bar{b}} & & 0 \\ 0 & \ddots & \vdots & 0 & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \bar{a}_{n\bar{a}} & 0 & 0 & \bar{b}_{n\bar{b}} \end{bmatrix}$$

$$\mathcal{X} = \begin{bmatrix} x_o \\ \vdots \\ x_{n\bar{b}-1} \\ y_o \\ \vdots \\ y_{n\bar{a}-1} \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad \mathcal{B} = \begin{bmatrix} \bar{c}_o \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \bar{c}_{n\bar{a}+n\bar{b}-1} \end{bmatrix}$$

↑

\mathcal{A} est la matrice de Sylvester associée à $(\bar{A}(z^{-1}), \bar{B}(z^{-1}))$

$\bar{c}_i = 0$ pour tout $i \geq n\bar{c}$

REMARQUES

- R1.** Une équation polynomiale admet une infinité de solutions si aucune contrainte n'est imposée sur la structure de la solution recherchée. En effet si $(X(z^{-1}), Y(z^{-1}))$ est une solution, alors $(X(z^{-1}) + \bar{B}(z^{-1})W(z^{-1}), Y(z^{-1}) - \bar{A}(z^{-1})W(z^{-1}))$ est une solution pour tout polynôme arbitraire $W(z^{-1})$.
- R2.** La matrice de Sylvester associée aux polynômes $\bar{A}(z^{-1})$ et $\bar{B}(z^{-1})$ est inversible si et seulement si ces polynômes sont premiers entre eux.

POLYNOME $T(q^{-1})$

$$T(q^{-1}) = \begin{cases} M_d(q^{-1})M_a(q^{-1}) & \text{si } \mathcal{PP} \\ \beta M(q^{-1}) & \text{si } \mathcal{PSP} \\ q^{-d-1}R(q^{-1})D_c(q^{-1}) & \text{si } \mathcal{PM} \end{cases}$$

GENERATEUR DE LA SEQUENCE DE REFERENCE

$$\mathcal{G}^*(z^{-1}) = \frac{z^{-d-1} \left(1 - e^{-\zeta_p \omega_p T_e} \cos \left(\sqrt{(1 - \zeta_p^2)} \omega_p T_e \right) + e^{-2\zeta_p \omega_p T_e} \right)}{1 - e^{-\zeta_p \omega_p T_e} \cos \left(\sqrt{(1 - \zeta_p^2)} \omega_p T_e \right) z^{-1} + e^{-2\zeta_p \omega_p T_e} z^{-2}}$$

→ **Mode (ω_p, ζ_p)**

POURSUITE PARFAITE

- La propriété fondamentale

$$y_r(t) = y^*(t) \text{ pour tout } t$$

$$\Downarrow$$

$$\mathcal{G}_{sr}(z^{-1}) = \frac{B(z^{-1})R_p(z^{-1})}{P_c(z^{-1})} = 1 \quad \forall z \in \mathcal{C}$$

$$\Downarrow$$

$$\bar{M}(z^{-1}) = B(z^{-1})$$

- La condition requise

$$\mathcal{CZ}(\mathcal{SYS}) \subset \mathcal{D}_{sp}$$

- La structure du régulateur

$$D_r(q^{-1})S(q^{-1})u(t) + D_c(q^{-1})R(q^{-1})y(t) = T(q^{-1})y^*(t + d + 1)$$

$$y(t) = y_\sigma(t) + \eta(t)$$

$$A^*(q^{-1})y^*(t + d + 1) = B^*(q^{-1})u^*(t)$$

$$\Downarrow$$

$$D_r(z^{-1}) = D_{rp}(z^{-1})$$

$$D_c(z^{-1}) = \begin{cases} D_{ind}(z^{-1}) & \text{si } \mathcal{DSE} \\ D_{apa}(z^{-1}) & \text{autrement} \end{cases}$$

- Le calcul du régulateur

$$T(z^{-1}) = M(z^{-1})$$

$$S(z^{-1}) = B(z^{-1})G(z^{-1})$$

$$A(z^{-1})D_r(z^{-1})G(z^{-1}) + z^{-d-1}D_c(z^{-1})R(z^{-1}) = M(z^{-1})$$

↑

$$M(z^{-1}) = M_d(z^{-1})M_a(z^{-1})$$

↑

$$nm \leq na + nd_r + nd_c + d$$

$$ng = nd_c + d$$

$$nr = na + nd_r - 1$$

POURSUITE SEMI PARFAITE

- La propriété fondamentale

$$y_r(t) = \beta B(q^{-1})y^*(t) \quad \text{avec} \quad \beta = \frac{1}{B(1)}$$

⇕

$$\mathcal{G}_{sr}(z^{-1}) = \beta z^{-d-1} B(z^{-1})$$

- La condition requise

$$1 \notin \mathcal{CZ}(\mathcal{SYS}) \iff B(1) \neq 0$$

- La structure du régulateur

$$D_r(q^{-1})S(q^{-1})u(t) + D_c(q^{-1})R(q^{-1})y(t) = T(q^{-1})y^*(t + d + 1)$$

$$y(t) = y_\sigma(t) + \eta(t)$$

$$A^*(q^{-1})y^*(t + d + 1) = B^*(q^{-1})u^*(t)$$

↓

$$D_r(z^{-1}) = D_{rp}(z^{-1})$$

$$D_c(z^{-1}) = \begin{cases} D_{ind}(z^{-1}) & \text{si } \mathcal{DS}\mathcal{E} \\ D_{apa}(z^{-1}) & \text{autrement} \end{cases}$$

- Le calcul du régulateur

$$T(z^{-1}) = \beta M(z^{-1})$$

$$A(z^{-1})D_r(z^{-1})S(z^{-1}) + z^{-d-1}B(z^{-1})D_c(z^{-1})R(z^{-1}) = M(z^{-1})$$

↑

$$M(z^{-1}) = M_d(z^{-1})M_a(z^{-1})$$

↑

$$nm \leq na + nb + nd_r + nd_c + d$$

$$ns = nb + nd_c + d$$

$$nr = na + nd_r - 1$$

PRECISION MAXIMALE

- La propriété fondamentale

$$\{e_\sigma(t)\} \in \mathcal{SAZI}$$

$$\uparrow$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} e_c(t) = 0$$

$$\downarrow$$

$$D^*(q^{-1})u^*(t) = C^*(q^{-1})\delta^*(t) \text{ avec } \delta^*(t) = u^*\delta(t)$$

et

$$\lim_{t \rightarrow \infty} e_p(t) = 0$$

- La structure du régulateur

$$D_r(q^{-1})S(q^{-1})u(t) = D_c(q^{-1})R(q^{-1})(y^*(t) - y(t))$$

$$y(t) = y_\sigma(t) + \eta(t)$$

$$A^*(q^{-1})y^*(t+d+1) = B^*(q^{-1})u^*(t)$$

$$D^*(q^{-1})u^*(t) = C^*(q^{-1})\delta^*(t)$$

$$\downarrow$$

$$D_r(z^{-1}) = \text{ppcm}(D_{rp}(z^{-1}), D_{rc}(z^{-1}))$$

$$D_c(z^{-1}) = \begin{cases} D_{ind}(z^{-1}) & \text{si } \mathcal{DS}\mathcal{E} \\ D_{apa}(z^{-1}) & \text{autrement} \end{cases}$$

- Le calcul du régulateur

$$T(z^{-1}) = z^{-d-1}D_c(z^{-1})R(z^{-1})$$

$$A(z^{-1})D_r(z^{-1})S(z^{-1}) + z^{-d-1}B(z^{-1})D_c(z^{-1})R(z^{-1}) = M(z^{-1})$$

↑

$$M(z^{-1}) = M_d(z^{-1})M_a(z^{-1})$$

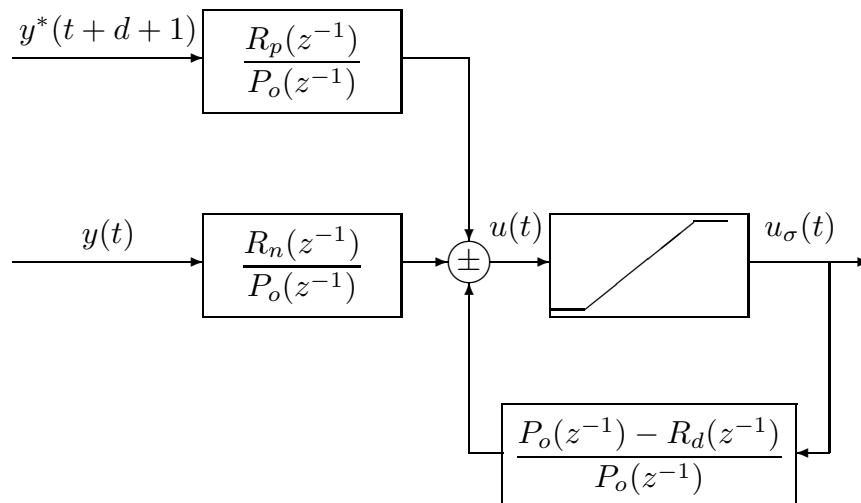
↑

$$nm \leq na + nb + nd_r + nd_c + d$$

$$ns = nb + nd_c + d$$

$$nr = na + nd_r - 1$$

MISE EN OEUVRE DU REGULATERUR



$$P_o(q^{-1}) \in \mathcal{R}_{sp}[q^{-1}] \text{ avec } \uparrow np_o = nr_d \text{ et } p_{oo} = r_{do}$$

$$u(t) - u(t) + \frac{R_d(q^{-1})}{P_o(q^{-1})} u(t) + \frac{R_n(q^{-1})}{P_o(q^{-1})} y(t) = \frac{R_p(q^{-1})}{P_o(q^{-1})} y^*(t+d+1)$$

$$\Downarrow$$

$$u(t) = \frac{P_o(q^{-1}) - R_d(q^{-1})}{P_o(q^{-1})} u(t) - \frac{R_n(q^{-1})}{P_o(q^{-1})} y(t) + \frac{R_p(q^{-1})}{P_o(q^{-1})} y^*(t+d+1)$$

comme $P_o(q^{-1}) \in \mathcal{R}_{sp}[q^{-1}]$ et $np_o = nr_d$ et $p_{oo} = r_{do}$, toutes les composantes du régulateur sont stables et la composante relative à l'entrée, soit la fonction de transfert

$$\frac{R_d(q^{-1}) - P_o(q^{-1})}{P_o(q^{-1})}$$

exhibe un retard pur d'une période d'échantillonnage; et donc sa sortie ne dépend que du passé de la commande.

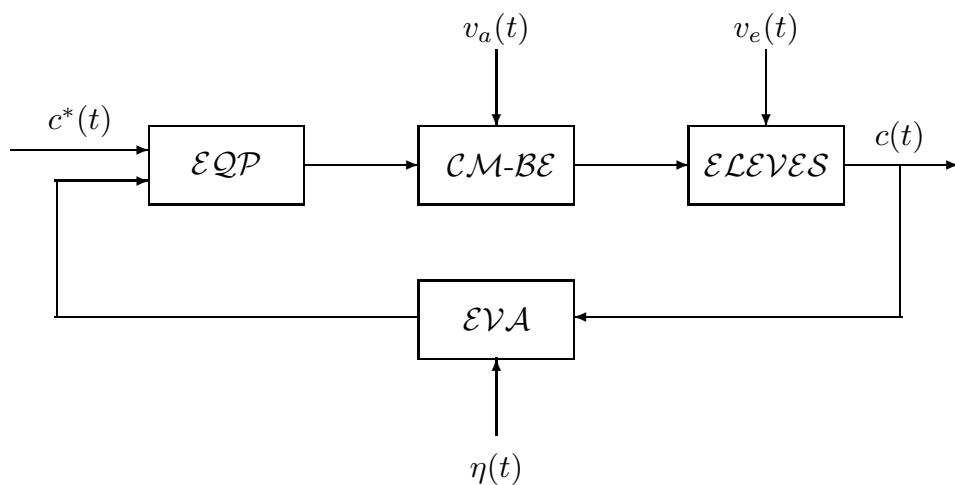
CONCLUSION

- ♠ Asservissement standard
- ♠ Une démarche méthodologique et rationnelle
- ♠ Système
- ♠ Régulateur
- ♠ Système de commande
- ♠ Analyse systémique
- ♠ Spécifications élémentaires
- ♠ Performances essentielles
- ♠ Structure usuelle du régulateur

UNE APPROCHE SYSTEME

DANS

UN CONTEXTE POLYNOMIAL



LA RETROACTION EST AU COEUR DE LA PEDAGOGIE