

TRAVAUX PRATIQUES

Les séances de travaux pratiques ont été conçues pour illustrer la démarche d'analyse et de synthèse des asservissements échantillonnés. Une préparation vigoureuse des travaux pratiques est vitale pour réaliser leur motivation principale. La mission de l'équipe pédagogique en charge de ces travaux pratiques est d'aider les élèves qui ont fait cette préparation à apprécier l'ingénierie de l'approche de synthèse des asservissements développée dans les séances du cours et des bureaux d'étude. Pour vous aider à tirer le meilleur profit de l'enseignement des systèmes asservis échantillonnés, je vous propose une démarche constructive pour ce faire.

Mohammed M'SAAD

TRAVAUX PRATIQUES

UNE DEMARCHE PROMETTEUSE

1 Bien connaître le système et son environnement

- Identifier l'entrée et la sortie du système

$$(\{u(t)\} \Rightarrow \{u_\sigma(t)\}) \text{ et } (\{y(t)\} \Rightarrow \{y_\sigma(t)\})$$

- Tracer la caractéristique statique de l'actionnaire
- Etudier les éventuels problèmes du capteur
- Identifier les sources des perturbations qui affectent le fonctionnement du système

$$\{v_i(t)\}_{i \in [1,m]} \Rightarrow (\{v_e(t)\} \Rightarrow \{v_s(t)\})$$

- Etudier la carte d'entrée-sortie et apprécier les ressources logicielles disponibles
- Choisir une procédure de mise en oeuvre de l'algorithme de commande. On distingue deux procédures selon que l'on applique le signal de commande juste après son calcul ou non. La première procédure est donnée par

$\mathcal{E}1$. Attendre le top d'horloge.

$\mathcal{E}2$. Acquisition de la sortie du système : conversion et sauvegarde.

$\mathcal{E}3$. Détermination du signal de commande.

$\mathcal{E}4$. Appliquer le signal de commande au système.

$\mathcal{E}5$. Aller en $\mathcal{E}1$.

Quant à la seconde procédure, elle est donnée par

$\mathcal{E}1$. Attendre le top d'horloge.

$\mathcal{E}2$. Appliquer le signal de commande au système.

$\mathcal{E}3$. Acquisition de la sortie du système : conversion et sauvegarde.

$\mathcal{E}4$. Détermination du signal de commande.

$\mathcal{E}5$. Aller en $\mathcal{E}1$.

- Déterminer un modèle linéaire invariant dans le temps qui représente au mieux le comportement d'entrée-sortie du système, notamment la fonction de transfert

$$\mathcal{G}_c(s) = e^{-\tau_\sigma s} \frac{B(s)}{A(s)}$$

où τ_σ désigne le retard du système.

2 Lire attentivement cahier des charges

- S1. Une poursuite admissible caractérisée par un mode d'amortissement ζ_p et de pulsation propre ω_p .
- S2. Une compensation parfaite des perturbations (resp. une précision maximale pour une séquence de points de consigne donnée) avec une dynamique de régulation caractérisée par un mode dominant d'amortissement ζ_r et de pulsation propre ω_r .
- S3. Une insensibilité aux bruits de mesure inéluctables.
- S4. Un blocage en entrée du système des composantes indésirables dans la sortie du système ou un affinement des performances nominales et de robustesse en stabilité.

Cette lecture du cahier des charge permet d'effectuer des spécifications et des choix vitaux pour la synthèse de l'asservissement considéré.

- Spécifier la période d'échantillonnage T_e .
- Définir le domaine de stabilité et des performances \mathcal{D}_{sp} .
- Elaborer le modèle échantillonné de synthèse de l'asservissement en tenant compte du retard intrinsèque au processus d'échantillonnage

$$\tau_{pe} = \begin{cases} \tau_{can} + \tau_{cna} + \tau_{cal} & \text{si on adopte la première procédure} \\ T_e & \text{si on adopte la seconde procédure} \end{cases}$$

La structure d'un tel modèle est donnée par

$$\mathcal{SYS} \begin{cases} A(q^{-1})y_\sigma(t) = B(q^{-1})u(t-d-1) + \sum_{i=1}^m E_i(q^{-1})v_i(t) \\ D_i(q^{-1})v_i(t) = C_i(q^{-1})\delta_i(t) \text{ avec } \delta_i(t) = v_i\delta(t) \text{ pour } i \in [1, m] \\ D_{ind}(q^{-1})y_{ind}(t) = C_{ind}(q^{-1})\delta_{ind}(t) \text{ avec } \delta_{ind}(t) = v_{ind}\delta(t) \end{cases}$$

- Choisir la nature de la poursuite faisable

une poursuite admissible PA ou une précision maximale PM

3 Adopter une structure appropriée du régulateur

La structure du régulateur qui permet de répondre rigoureusement aux spécifications du cahier des charges est donnée par

$$\mathcal{REG} \left\{ \begin{array}{l} D_r(q^{-1})S(q^{-1})u(t) + D_c(q^{-1})R(q^{-1})y(t) = T(q^{-1})y^*(t + d + 1) \\ y(t) = y_\sigma(t) + \eta(t) \\ A^*(q^{-1})y^*(t + d + 1) = B^*(q^{-1})u^*(t) \\ D^*(q^{-1})u^*(t) = C^*(q^{-1})\delta^*(t) \text{ avec } \delta^*(t) = u^*\delta(t) \end{array} \right.$$

- Le polynôme $T(q^{-1})$ dépend essentiellement de la nature des performances réalisables en poursuite, i.e. une poursuite admissible \mathcal{PA} ou une précision maximale \mathcal{PM} , modulo une complexité raisonnable du régulateur, i.e. un régulateur d'ordre minimal. Rappelons que la poursuite admissible est une poursuite parfaite \mathcal{PP} ou une poursuite semi-parfaite \mathcal{PSP} et que la précision maximale n'est autre qu'une poursuite parfaite pour une séquence de consigne donnée. Quant à la complexité d'un régulateur, elle dépend essentiellement de son ordre. Le polynôme $T(q^{-1})$ est alors donnée par

$$T(q^{-1}) = \left\{ \begin{array}{ll} \frac{P_c(q^{-1})}{B(q^{-1})} & \text{si } \mathcal{PA} \\ \frac{P_c(q^{-1})}{B(1)} & \text{si } \mathcal{PSP} \\ q^{-d-1}R(q^{-1})D_c(q^{-1}) & \text{si } \mathcal{PM} \end{array} \right.$$

On notera que l'admissibilité de la poursuite est intrinsèquement lié à la configuration des zéros du système, i.e. une \mathcal{PP} requiert que tous les zéros du système soient situés dans le domaine de stabilité et de performance \mathcal{D}_{sp} , alors qu'une \mathcal{PSP} requiert le système n'admet aucun zéro en 1.

- Le générateur de la séquence de référence permet de réaliser une poursuite indépendante de la dynamique de régulation, en l'occurrence

$$\mathcal{G}^*(z^{-1}) = \frac{z^{-d-1} \left(1 - e^{-\zeta_p \omega_p T_e} \cos \left(\sqrt{(1 - \zeta_p^2)} \omega_p T_e \right) + e^{-2\zeta_p \omega_p T_e} \right)}{1 - e^{-\zeta_p \omega_p T_e} \cos \left(\sqrt{(1 - \zeta_p^2)} \omega_p T_e \right) z^{-1} + e^{-2\zeta_p \omega_p T_e} z^{-2}}$$

- Le polynôme $D_r(q^{-1})$ est particulièrement motivé par des considérations de compensation parfaite des perturbations (resp. de précision maximale). Il est donné par

$$D_r(q^{-1}) = \begin{cases} D_{rp}(q^{-1}) & \text{si } \mathcal{PA} \\ \text{ppcm}(D_{rp}(q^{-1}), D_{rc}(q^{-1})) & \text{si } \mathcal{PM} \end{cases}$$

↑

$$D_{rp}(q^{-1}) = \text{ppcm}(D_{r1}(q^{-1}), \dots, D_{rm}(q^{-1}))$$

avec

$$D_{ri}(q^{-1}) = \frac{D_i(q^{-1})}{\text{pgcd}(D_i(q^{-1}), E_i(q^{-1}))}$$

et

$$D_{rc}(q^{-1}) = \frac{D^*(q^{-1})}{\text{pgcd}(D^*(q^{-1}), A(q^{-1}))}$$

- Le polynôme $D_c(q^{-1})$ permet de réaliser la spécification $\mathcal{S4}$. Il est donné par

$$D_c(q^{-1}) = \begin{cases} D_{ind}(q^{-1}) & \text{si } \mathcal{S4} \\ D_{apa}(q^{-1}) & \text{autrement} \end{cases}$$

↑

$$D_{apa}(q^{-1}) = 1 + q^{-1} \text{ est un choix judicieux}$$

4 Effectuer une synthèse modale

$$? (S(z^{-1}), R(z^{-1})) / A(z^{-1})D_r(z^{-1})S(z^{-1}) + z^{-d-1}B(z^{-1})D_c(z^{-1})R(z^{-1}) = M(z^{-1})\bar{M}(z^{-1})$$

où $\bar{M}(z^{-1})$ désigne le polynôme des modes que l'on ne peut pas assigner, i.e.

$$\bar{M}(z^{-1}) = \begin{cases} B(z^{-1}) & \text{si } \mathcal{PP} \\ 1 & \text{si } \mathcal{PSP} \text{ ou } \mathcal{PM} \end{cases}$$

alors que $M(z^{-1})$ désigne le polynôme des modes que l'on peut assigner comme suit

$$M(z^{-1}) = M_d(z^{-1}) M_a(z^{-1})$$

↑

$$\text{Mode dominant} \longrightarrow M_d(z^{-1}) = 1 - e^{-\zeta_r \omega_r T_e} \cos\left(\sqrt{1 - \zeta_r^2} \omega_r T_e\right) z^{-1} + e^{-2\zeta_r \omega_r T_e} z^{-2}$$

$$\text{Modes auxiliaires } (\omega_a, \zeta_a) / \omega_a \zeta_a \gg \omega_r \zeta_r \quad \text{et} \quad \zeta_a \geq \zeta_r$$

↓

$$M_a(z^{-1}) = \prod_{i=1}^{nm-2} \left(1 - e^{-\gamma_i \zeta_r \omega T_e} z^{-1}\right) \text{ avec } \gamma_i \geq 2$$

? $T(q^{-1})$ conformément aux performances faisables en matière de poursuite, soit

$$T(z^{-1}) = \begin{cases} M(z^{-1}) & \text{si } \mathcal{PP} \\ \beta M(z^{-1}) & \text{si } \mathcal{PSP} \\ z^{-d-1} R(z^{-1}) D_c(z^{-1}) & \text{si } \mathcal{PM} \end{cases}$$

$$\mathcal{G}^*(z^{-1}) = \frac{z^{-d-1} \left(1 - e^{-\zeta_p \omega_p T_e} \cos\left(\sqrt{1 - \zeta_p^2} \omega_p T_e\right) + e^{-2\zeta_p \omega_p T_e}\right)}{1 - e^{-\zeta_p \omega_p T_e} \cos\left(\sqrt{1 - \zeta_p^2} \omega_p T_e\right) z^{-1} + e^{-2\zeta_p \omega_p T_e} z^{-2}}$$

5 Remémorer la résolution d'une équation polynomiale.

Le résultat suivant permet d'apprécier le contexte de résolution d'une équation polynomiale.

Soient $\bar{A}(z^{-1})$ et $\bar{B}(z^{-1})$ des polynômes de degrés respectifs $n\bar{a}$ et $n\bar{b}$ et $\bar{C}(z^{-1})$ un polynôme arbitraire de degré $n\bar{c}$ tels que

$$C1. \quad \text{pgcd}(\bar{A}(z^{-1}), \bar{B}(z^{-1})) = 1$$

$$C2. \quad n\bar{c} \leq n\bar{a} + n\bar{b} - 1$$

Alors, l'équation polynomiale

$$\mathcal{EQP} \quad \left\{ \begin{array}{l} \bar{A}(z^{-1})X(z^{-1}) + \bar{B}(z^{-1})Y(z^{-1}) = \bar{C}(z^{-1}) \end{array} \right.$$

admet une solution unique pourvu que les degrés des polynômes $X(z^{-1})$ et $Y(z^{-1})$ soient spécifiés comme suit

$$nx = n\bar{b} - 1 \quad \text{et} \quad ny = n\bar{a} - 1$$

Les remarques suivantes permettent de mieux apprécier ce résultat

$\mathcal{R}1.$ La solution unique de l'équation polynomiale \mathcal{EQP} n'est autre que celle du système d'équations linéaires sous-jacent, soit

$$\mathbf{A} \mathbf{X} = \mathbf{B}$$

avec

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \bar{a}_o & & \bar{b}_o & & \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \\ \vdots & & \bar{a}_o & \vdots & \bar{b}_o \\ \bar{a}_{n\bar{a}} & & \vdots & \bar{b}_{n\bar{b}} & \vdots \\ & \ddots & \vdots & & \ddots \\ & & \bar{a}_{n\bar{a}} & & \bar{b}_{n\bar{b}} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{X} = \begin{bmatrix} x_o \\ \vdots \\ x_{n\bar{b}-1} \\ y_o \\ \vdots \\ y_{n\bar{a}-1} \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} \bar{c}_o \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \bar{c}_{n\bar{a}+n\bar{b}-1} \end{bmatrix}$$

où \mathbf{A} désigne la matrice de Sylvester associée à la paire polynomiale $(\bar{A}(z^{-1}), \bar{B}(z^{-1}))$ et $\bar{c}_i = 0$ pour tout $i \geq n\bar{c}$.

$\mathcal{R}2.$ Une équation polynomiale admet une infinité de solutions si aucune contrainte n'est imposée sur la structure de la solution recherchée. En effet si $(X(z^{-1}), Y(z^{-1}))$ est une solution, alors $(X(z^{-1}) + \bar{B}(z^{-1})W(z^{-1}), Y(z^{-1}) - \bar{A}(z^{-1})W(z^{-1}))$ est une solution pour tout polynôme arbitraire $W(z^{-1})$.

L'équipe pédagogique vous proposera une procédure pour la résolution d'une équation polynomiale. Il va falloir étudier sa sensibilité par rapport aux erreurs numériques.

6 Comment traiter le cas d'une poursuite parfaite

- *La propriété fondamentale*

$$y_r(t) = y^*(t) \text{ pour tout } t$$

où d'une manière équivalente

$$\mathcal{G}_{sr}(z^{-1}) = \frac{B(z^{-1})R_p(z^{-1})}{P_c(z^{-1})} = 1 \quad \forall z \in \mathcal{C}$$

Les zéros du système doivent alors être des modes du système asservi puisque

$$B(z^{-1})R_p(z^{-1}) = P_c(z^{-1})$$

On aura alors

$$\bar{M}(z^{-1}) = B(z^{-1})$$

- *La condition requise*

$$\mathcal{CZ}(\mathcal{SYS}) \subset \mathcal{D}_{sp}$$

- *La structure du régulateur*

$$\mathcal{REG} \left\{ \begin{array}{l} D_r(q^{-1})S(q^{-1})u(t) + D_c(q^{-1})R(q^{-1})y(t) = T(q^{-1})y^*(t + d + 1) \\ y(t) = y_\sigma(t) + \eta(t) \\ A^*(q^{-1})y^*(t + d + 1) = B^*(q^{-1})u^*(t) \end{array} \right.$$

↓

$$D_r(z^{-1}) = D_{rp}(z^{-1})$$

$$D_c(z^{-1}) = \begin{cases} D_{ind}(z^{-1}) & \text{si } \mathcal{S4} \\ D_{apa}(z^{-1}) & \text{autrement} \end{cases}$$

- *Le calcul du régulateur*

$$M(z^{-1}) = M_d(z^{-1})M_a(z^{-1})$$

↓

$$T(z^{-1}) = M(z^{-1})$$

$$S(z^{-1}) = B(z^{-1})G(z^{-1})$$

$$A(z^{-1})D_r(z^{-1})G(z^{-1}) + z^{-d-1}D_c(z^{-1})R(z^{-1}) = M(z^{-1})$$

↑

$$nm \leq na + nd_r + nd_c + d$$

$$ng = nd_c + d$$

$$nr = na + nd_r - 1$$

7 Comment traiter le cas d'une poursuite semi parfaite

- *La propriété fondamentale*

$$y_r(t) = \beta B(q^{-1})y^*(t) \quad \text{avec} \quad \beta = \frac{1}{B(1)}$$

où d'une manière équivalente

$$\mathcal{G}_{sr}(z^{-1}) = \frac{B(z^{-1})}{B(1)} \quad \left(\mathcal{G}_{sr}(1) = 1 \right)$$

On aura alors

$$R_p(z^{-1}) = \beta P_c(z^{-1})$$

- *La condition requise*

$$1 \notin \mathcal{CZ}(\mathcal{SYS}) \iff B(1) \neq 0$$

- *La structure du régulateur*

$$\mathcal{REG} \begin{cases} D_r(q^{-1})S(q^{-1})u(t) + D_c(q^{-1})R(q^{-1})y(t) = T(q^{-1})y^*(t+d+1) \\ y(t) = y_\sigma(t) + \eta(t) \\ A^*(q^{-1})y^*(t+d+1) = B^*(q^{-1})u^*(t) \end{cases}$$

↓

$$D_r(z^{-1}) = D_{rp}(z^{-1})$$

$$D_c(z^{-1}) = \begin{cases} D_{ind}(z^{-1}) & \text{si } \mathcal{S4} \\ D_{apa}(z^{-1}) & \text{autrement} \end{cases}$$

- *Le calcul du régulateur*

$$T(z^{-1}) = \beta M(z^{-1})$$

$$A(z^{-1})D_r(z^{-1})S(z^{-1}) + z^{-d-1}B(z^{-1})D_c(z^{-1})R(z^{-1}) = M(z^{-1})$$

↑

$$nm \leq na + nb + nd_r + nd_c + d$$

$$ns = nb + nd_c + d$$

$$nr = na + nd_r - 1$$

8 Comment traiter le cas d'une précision maximale

- La propriété fondamentale

$$\{e_\sigma(t)\} \in \mathcal{SAZI}$$

avec

$$\lim_{t \rightarrow \infty} e_c(t) = 0 \text{ pour une séquence de points de consigne spécifique}$$

↓

$$D^*(q^{-1})u^*(t) = C^*(q^{-1})\delta^*(t) \text{ avec } \delta^*(t) = u^*\delta(t)$$

et

$$\lim_{t \rightarrow \infty} e_p(t) = 0$$

- La structure du régulateur

$$\mathcal{REG} \left\{ \begin{array}{l} S(q^{-1})D_r(q^{-1})u(t) = R(q^{-1})D_c(q^{-1})(y^*(t) - y(t)) \\ y(t) = y_\sigma(t) + \eta(t) \\ A^*(q^{-1})y^*(t+d+1) = B^*(q^{-1})u^*(t) \\ D^*(q^{-1})u^*(t) = C^*(q^{-1})\delta^*(t) \end{array} \right.$$

↓

$$D_r(z^{-1}) = \text{ppcm} (D_{rp}(z^{-1}), D_{rc}(z^{-1}))$$

$$D_c(z^{-1}) = \begin{cases} D_{ind}(z^{-1}) & \text{si } \mathcal{S4} \\ D_{apa}(z^{-1}) & \text{autrement} \end{cases}$$

- Le calcul du régulateur

$$T(z^{-1}) = z^{-d-1}D_c(z^{-1})R(z^{-1})$$

$$A(z^{-1})D_r(z^{-1})S(z^{-1}) + z^{-d-1}B(z^{-1})D_c(z^{-1})R(z^{-1}) = M(z^{-1})$$

↑

$$nm \leq na + nb + nd_r + nd_c + d$$

$$ns = nb + nd_c + d$$

$$nr = na + nd_r - 1$$

9 Mettre en oeuvre le régulateur proprement

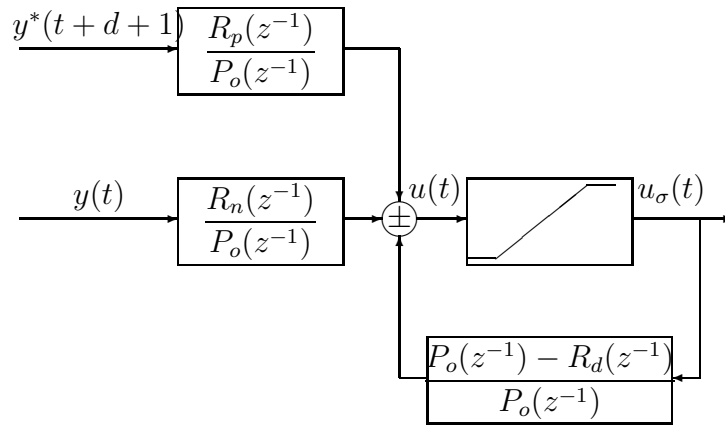
La mise en oeuvre d'un régulateur peut être réalisée comme l'indique la figure ci-dessous pour pallier relativement raisonnablement le problème de saturation des actionneurs lorsque le régulateur n'est pas stable, soit

$$u_\sigma(t) = \text{sat}(u(t))$$

avec

$$u(t) = -\frac{R_d(q^{-1}) - P_o(q^{-1})}{P_o(q^{-1})} u_\sigma(t) - \frac{R_n(q^{-1})}{P_o(q^{-1})} y(t) + \frac{R_p(q^{-1})}{P_o(q^{-1})} y^*(t + d + 1)$$

où $\text{sat}(\cdot)$ désigne la fonction de saturation et $X_i(q^{-1}) = x_{i0} + x_{i1}q^{-1} + \dots + x_{inx_i}q^{-nx_i}$.



Elle est issue d'une réécriture du régulateur sous la forme

$$u(t) - \frac{P_o(q^{-1})}{P_o(q^{-1})} u(t) + \frac{R_d(q^{-1})}{P_o(q^{-1})} u(t) + \frac{R_n(q^{-1})}{P_o(q^{-1})} y(t) = \frac{R_p(q^{-1})}{P_o(q^{-1})} y^*(t + d + 1)$$

↑

$$P_o(q^{-1}) \in \mathcal{R}_{sp}[q^{-1}] \text{ avec } np_o = nr_d \text{ et } p_{oo} = r_{do}$$

Il est important de noter que, compte tenu des propriétés du polynôme $P_o(q^{-1})$, toutes les composantes du régulateur sont stables et la sortie de la composante définie par la fonction de transfert

$$\frac{R_d(q^{-1}) - P_o(q^{-1})}{P_o(q^{-1})}$$

ne dépend que du passé de la commande.