TD 4 - Traitement Numérique du Signal

Informatique - 1reAnnée

Miloud Frikel & P.-E. Morant

2015–2016

ENSICAEN
ÉCOLE NATIONALE SUPÉRIEURE D'INGÉNIEURS DE CAEN
& CENTRE DE RECHERCHE

Filtre continue :

-
-

Transformation bilinéaire avec pré-décalage

filtre réjecteur

Filtre continue :

- $$G(p) = \frac{p^2 + 1}{(p+1)^2}$$

Transformation bilinéaire avec pré-décalage

filtre réjecteur

Filtre continue :

- $$G(p) = \frac{p^2 + 1}{(p+1)^2}$$

- $$G(j\omega) =$$

Transformation bilinéaire avec pré-décalage

filtre réjecteur

Filtre continue :

- $$G(p) = \frac{p^2 + 1}{(p+1)^2}$$

- $$G(j\omega) = \frac{-\omega^2 + 1}{(j\omega+1)^2}$$

-

Transformation bilinéaire avec pré-décalage
filtre réjecteur

Filtre continue :

- $$G(p) = \frac{p^2 + 1}{(p+1)^2}$$

- $$G(j\omega) = \frac{-\omega^2 + 1}{(j\omega + 1)^2}$$

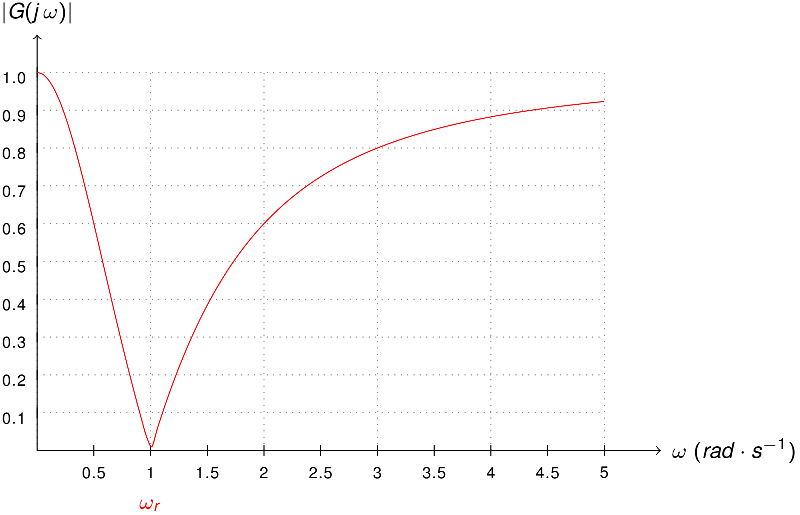
- $$|G(j\omega)| =$$

Transformation bilinéaire avec pré-décalage
filtre réjecteur

Filtre continue :

- $$G(p) = \frac{p^2 + 1}{(p+1)^2}$$
- $$G(j\omega) = \frac{-\omega^2 + 1}{(j\omega + 1)^2}$$
- $$|G(j\omega)| = \frac{|\omega^2 - 1|}{\omega^2 + 1}$$

ENSICAEN

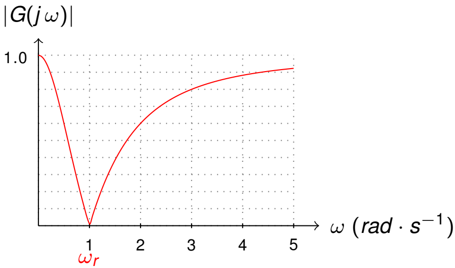


Module de la réponse fréquentielle de $G(j\,\omega)$

$$\omega_r = 1\ rad \cdot s^{-1}$$

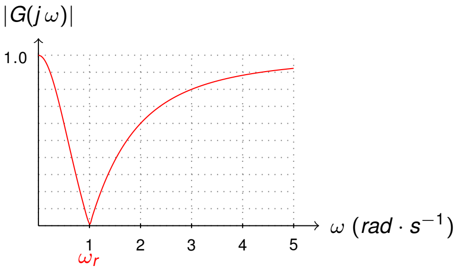
ENSICAEN

$$|G(j\,\omega)| = \frac{|\omega^2 - 1|}{\omega^2 + 1}$$



- En $\omega = 0, \quad |G(0)| =$
- En $\omega = \omega_r = 1, \quad |G(1)| =$
- $\lim\limits_{\omega \to \infty} |G(\omega)| =$

$$|G(j\,\omega)| = \frac{|\omega^2 - 1|}{\omega^2 + 1}$$

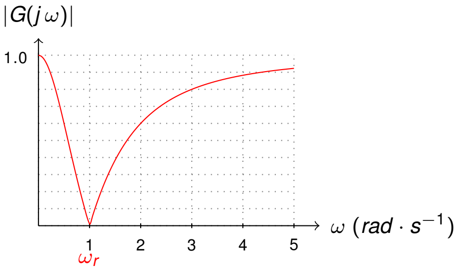


- En $\omega = 0, \quad |G(0)| = 1$
- En $\omega = \omega_r = 1, \quad |G(1)| =$
- $\lim\limits_{\omega \to \infty} |G(\omega)| =$

Transformation bilinéaire avec pré-décalage

filtre réjecteur

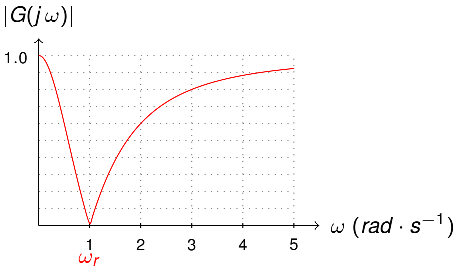
$$|G(j\omega)| = \frac{|\omega^2 - 1|}{\omega^2 + 1}$$



- En $\omega = 0, \quad |G(0)| = 1$
- En $\omega = \omega_r = 1, \quad |G(1)| = 0$
- $\lim\limits_{\omega \to \infty} |G(\omega)| =$

Transformation bilinéaire avec pré-décalage
filtre réjecteur

$$|G(j\,\omega)| = \frac{|\omega^2 - 1|}{\omega^2 + 1}$$



- En $\omega = 0, \quad |G(0)| = 1$
- En $\omega = \omega_r = 1, \quad |G(1)| = 0$
- $\lim\limits_{\omega \to \infty} |G(\omega)| = 1$

À partir de $G(p)$, peut-on effectuer la synthèse d'un filtre discret dont la fréquence d'échantillonnage est $T_s = 1\ s$? Justifiez votre réponse.

À partir de $G(p)$, peut-on effectuer la synthèse d'un filtre discret dont la fréquence d'échantillonnage est $T_s = 1\ s$? Justifiez votre réponse.

On souhaite conserver l'aspect « réjecteur » du filtre
$\Longrightarrow$ la fréquence de réjection $\omega_r = 1\ rad.s^{-1}$ doit être dans la bande de Shannon.

À partir de $G(p)$, peut-on effectuer la synthèse d'un filtre discret dont la fréquence d'échantillonnage est $T_s = 1\ s$? Justifiez votre réponse.

On souhaite conserver l'aspect « réjecteur » du filtre
$\Longrightarrow$ la fréquence de réjection $\omega_r = 1\ rad.s^{-1}$ doit être dans la bande de Shannon.

$$\omega_r = 1 \ \in [0, \omega_s/2] \quad \text{avec } \omega_s/2 = 3,14\ rad.s^{-1}$$

À partir de $G(p)$, peut-on effectuer la synthèse d'un filtre discret dont la fréquence d'échantillonnage est $T_s = 1\ s$? Justifiez votre réponse.

On souhaite conserver l'aspect « réjecteur » du filtre
$\Longrightarrow$ la fréquence de réjection $\omega_r = 1\ rad.s^{-1}$ doit être dans la bande de Shannon.

$$\omega_r = 1\ \in [0, \omega_s/2] \quad \text{avec } \omega_s/2 = 3,14\, rad.s^{-1}$$

$\Longrightarrow$ l'aspect réjecteur est conservé.

Transposition par transformation bilinéaire

Transposition par transformation bilinéaire

- Méthode basée sur l'approximation numérique de la dérivée.
-

Transposition par transformation bilinéaire

- Méthode basée sur l'approximation numérique de la dérivée.
-

$$p \rightarrow$$

Transposition par transformation bilinéaire

- Méthode basée sur l'approximation numérique de la dérivée.
-
$$p \to \frac{2}{T_s} \frac{z-1}{z+1}$$

Fonction de transfert discrète $H(z)$ du filtre numérique après transformation :

$$p \rightarrow \frac{2}{T_s} \frac{z-1}{z+1} \quad \text{avec } T_s = 1$$

$$\Longrightarrow H(z) \quad =$$

Fonction de transfert discrète $H(z)$ du filtre numérique après transformation :

$$p \rightarrow \frac{2}{T_s}\frac{z-1}{z+1} \quad \text{avec } T_s = 1$$

$$\Longrightarrow H(z) = \frac{\frac{4\,(z-1)^2}{(z+1)^2}+1}{(\frac{2\,(z-1)}{z+1}+1)^2}$$

ENSICAEN

Fonction de transfert discrète $H(z)$ du filtre numérique après transformation :

$$p \rightarrow \frac{2}{T_s} \frac{z-1}{z+1} \quad \text{avec } T_s = 1$$

$$\Longrightarrow H(z) = \frac{\frac{4\,(z-1)^2}{(z+1)^2} + 1}{\left(\frac{2\,(z-1)}{z+1} + 1\right)^2}$$

$$H(z) = \frac{5\,z^2 - 6\,z + 5}{(3\,z-1)^2}$$

ENSICAEN

Précisez les valeurs des pôles et des zéros :

$$H(z) = \frac{5\,z^2 - 6\,z + 5}{(3\,z - 1)^2}$$

Précisez les valeurs des pôles et des zéros :

$$H(z) = \frac{5\,z^2 - 6\,z + 5}{(3\,z - 1)^2}$$

- Pôles doubles :

Précisez les valeurs des pôles et des zéros :

$$H(z) = \frac{5\,z^2 - 6\,z + 5}{(3\,z - 1)^2}$$

- Pôles doubles :

$$p = \frac{1}{3}$$

ENSICAEN

Précisez les valeurs des pôles et des zéros :

$$H(z) = \frac{5\,z^2 - 6\,z + 5}{(3\,z - 1)^2}$$

- Pôles doubles :

$$p = \frac{1}{3}$$

- 2 zéros complexes conjugués :

ENSICAEN

Précisez les valeurs des pôles et des zéros :

$$H(z) = \frac{5\,z^2 - 6\,z + 5}{(3\,z - 1)^2}$$

- Pôles doubles :

$$p = \frac{1}{3}$$

- 2 zéros complexes conjugués :

$$z_1 = \frac{3}{5} + j\,\frac{4}{5} \qquad \text{et} \qquad z_2 = \frac{3}{5} - j\,\frac{4}{5}$$

Précisez les valeurs des pôles et des zéros :

$$H(z) = \frac{5\,z^2 - 6\,z + 5}{(3\,z - 1)^2}$$

- Pôles doubles :

$$p = \frac{1}{3}$$

- 2 zéros complexes conjugués :

$$\begin{aligned}
z_1 &= \frac{3}{5} + j\,\frac{4}{5} \quad &\text{et}\quad z_2 &= \frac{3}{5} - j\,\frac{4}{5}\\
z_1 &= e^{j\,\arctan(\frac{4}{3})} \quad &\text{et}\quad z_2 &= e^{-j\,\arctan(\frac{4}{3})}\\
z_1 &= e^{j\,0.9273} \quad &\text{et}\quad z_2 &= e^{-j\,0.9273}
\end{aligned}$$

Représentation dans le plan complexe :

- Pôles doubles : $p = \frac{1}{3}$
- 2 zéros complexes conjugués :

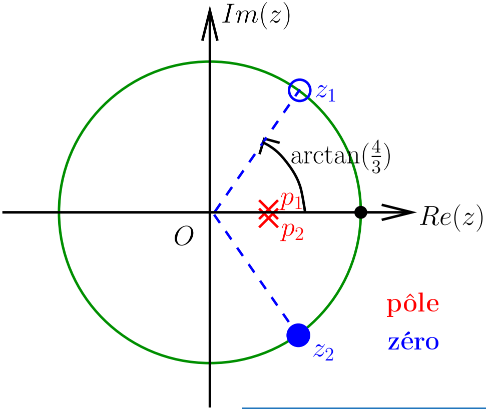
$$z_1 = e^{j\,\mathrm{arctan}\left(\frac{4}{3}\right)} \quad \text{et} \quad z_2 = e^{-j\,\mathrm{arctan}\left(\frac{4}{3}\right)}$$

ENSICAEN

Représentation dans le plan complexe :

- Pôles doubles :$p = \dfrac{1}{3}$
- 2 zéros complexes conjugués :

$$z_1 = e^{j\ \mathrm{arctan}(\frac{4}{3})} \quad \text{et} \quad z_2 = e^{-j\ \mathrm{arctan}(\frac{4}{3})}$$



ENSICAEN

- En $\omega = 0, \quad z = 1,$
- En $\omega = \dfrac{\omega_s}{2}, \quad z = -1,$

ENSICAEN

- En $\omega = 0, \quad z = 1, \quad |H(1)| = 1$
- En $\omega = \dfrac{\omega_s}{2}, \quad z = -1,$

- En $\omega = 0, \quad z = 1, \quad |H(1)| = 1$
- En $\omega = \dfrac{\omega_s}{2}, \quad z = -1, \quad |H(-1)| = 1$

- En $\omega = 0, \quad z = 1, \quad |H(1)| = 1$
- En $\omega = \dfrac{\omega_s}{2}, \quad z = -1, \quad |H(-1)| = 1$

Pulsation de réjection du filtre discret :

$$\omega_r^* =$$

- En $\omega = 0, \quad z = 1, \quad |H(1)| = 1$
- En $\omega = \dfrac{\omega_s}{2}, \quad z = -1, \quad |H(-1)| = 1$

Pulsation de réjection du filtre discret :

$$\omega_r^* = \arctan(\frac{4}{3}) = 0,9272952179 \approx 1\, rad.s^{-1}$$

ENSICAEN

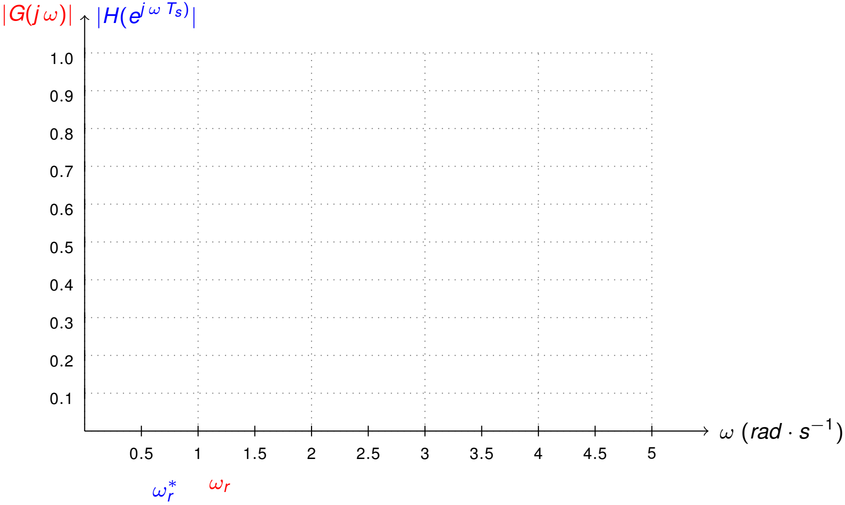
- En $\omega = 0, \quad z = 1, \quad |H(1)| = 1$
- En $\omega = \dfrac{\omega_s}{2}, \quad z = -1, \quad |H(-1)| = 1$

Pulsation de réjection du filtre discret :

$$\omega_r^* = \text{arctan}(\frac{4}{3}) = 0,9272952179 \approx 1 \, rad.s^{-1}$$

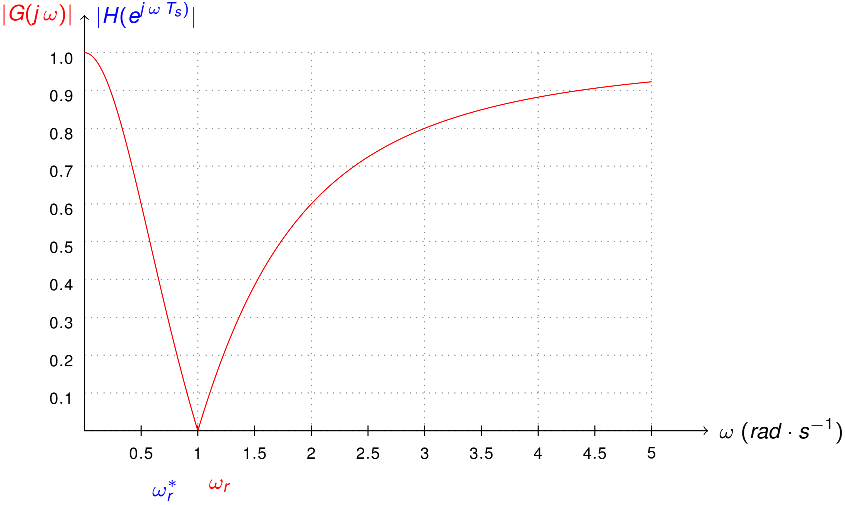
$$\omega_r^* < \omega_r$$

$\Longrightarrow$ Décalage fréquentielle (compression) de ω_r par transformation bilinéaire.

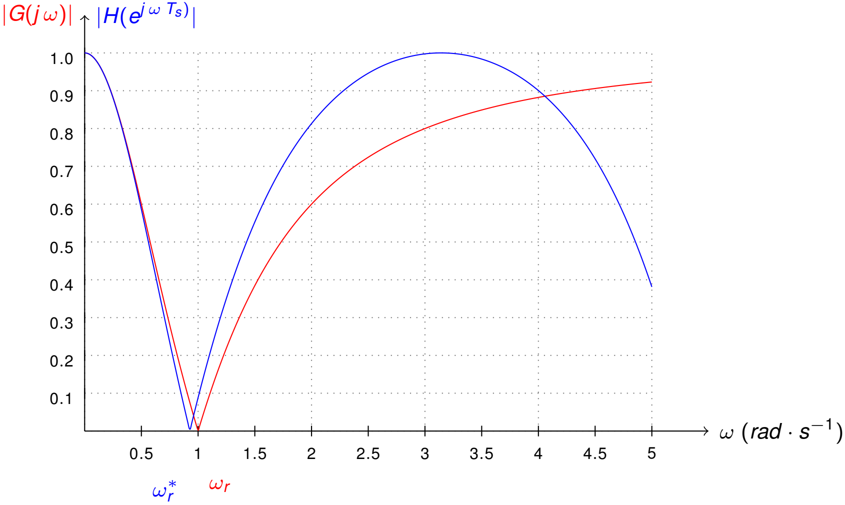


Modules des réponses fréquentielle de $G(j\,\omega)$ et $H(z)$.

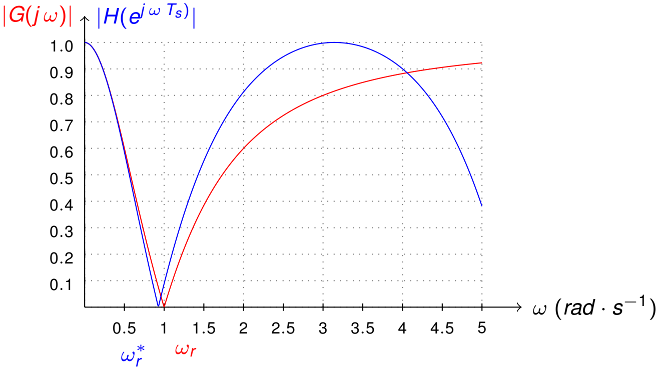
ENSICAEN



Modules des réponses fréquentielle de $G(j\,\omega)$ et $H(z)$.

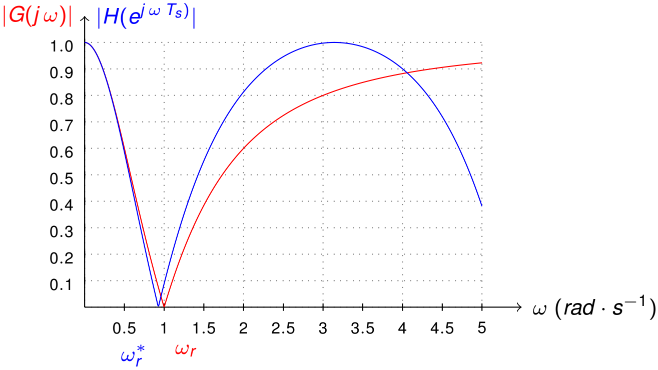


Modules des réponses fréquentielle de $G(j\,\omega)$ et $H(z)$.

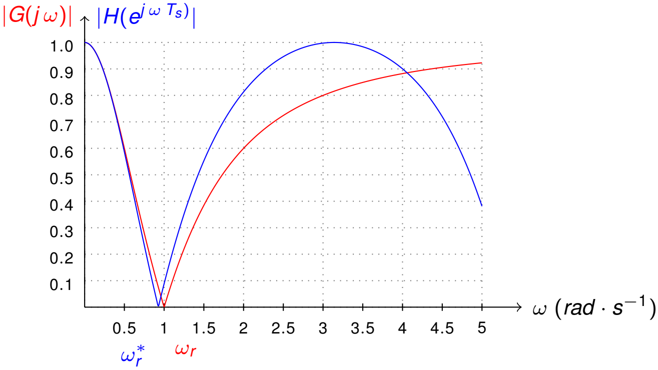


$|G(j\omega)|$
$|H(e^{j\omega T_s})|$
1.0
0.9
0.8
0.7
0.6
0.5
0.4
0.3
0.2
0.1
0.5
1
1.5
2
2.5
3
3.5
4
4.5
5
$\omega\ (rad \cdot s^{-1})$
ω_r^*
ω_r

$$H(z) =$$

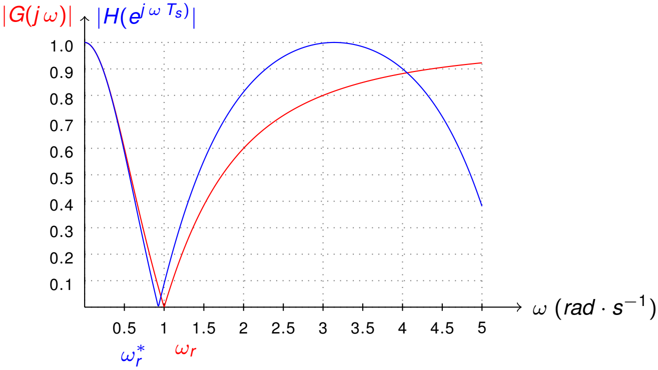


$$H(z) = \frac{5\,(e^{j\,\omega})^2 - 6\,e^{j\,\omega} + 5}{(3\,e^{j\,\omega} - 1)^2}$$



$$H(z) = \frac{5\,(e^{j\,\omega})^2 - 6\,e^{j\,\omega} + 5}{(3\,e^{j\,\omega} - 1)^2}$$

$$|H(e^{j\,\omega})| =$$



$$H(z) = \frac{5\,(e^{j\,\omega})^2 - 6\,e^{j\,\omega} + 5}{(3\,e^{j\,\omega} - 1)^2}$$

$$|H(e^{j\,\omega})| = \cdots = \left|\frac{5\,\cos(\omega) - 3}{3\,\cos(\omega) - 5}\right|$$

ENSICAEN

Transformation bilinéaire avec pré-décalage

Transformation de Tustin

Pré-décalage fréquentiel de ses caractéristiques vers les hautes fréquences :

$$\omega_0^* = \frac{2}{T_s} \tan(\frac{\omega_0 T_s}{2})$$

Pré-décalage fréquentiel de ses caractéristiques vers les hautes fréquences :

$$\omega_0^* = \frac{2}{T_s} \tan(\frac{\omega_0 T_s}{2})$$

Nouvelle fréquence de réjection du filtre continu $G^*(p)$:

$$\omega_0^* =$$

ENSICAEN

Transformation bilinéaire avec pré-décalage

Transformation de Tustin

Pré-décalage fréquentiel de ses caractéristiques vers les hautes fréquences :

$$\omega_0^* = \frac{2}{T_s} \tan(\frac{\omega_0 T_s}{2})$$

Nouvelle fréquence de réjection du filtre continu $G^*(p)$:

$$\omega_0^* = \frac{2}{T_s} \tan(\frac{\omega_0 T_s}{2}) = 2 \tan\left(\frac{1}{2}\right) = 1,092604980 \, rad.s^{-1}$$

ENSICAEN

Expression du nouveau filtre continu $G^{*}(p)$:

$$G^{*}(p) =$$

Expression du nouveau filtre continu $G^*(p)$:

$$G^*(p) = G(p \cdot \omega_0 / \omega_0^*)$$

Expression du nouveau filtre continu $G^*(p)$:

$$G^*(p) = G(p \cdot \omega_0/\omega_0^*)$$

$$G^*(p) = \frac{0.8376713244\, p^2 + 1}{(0.9152438606\, p + 1)^2}$$

Expression du nouveau filtre discret $H^*(z)$:

$$p \to \frac{2}{T_s} \frac{z-1}{z+1} \quad \text{avec } T_s = 1$$

$$\Longrightarrow H^*(z) \quad =$$

Expression du nouveau filtre discret $H^*(z)$:

$$p \to \frac{2}{T_s}\,\frac{z-1}{z+1} \quad \text{avec } T_s = 1$$

$$\Longrightarrow \; H^*(z) \; = \; \frac{\dfrac{3.3507\,(z-1)^2}{(z+1)^2}+1}{(\dfrac{1.8305\,(z-1)}{z+1}+1)^2}$$

ENSICAEN

Expression du nouveau filtre discret $H^*(z)$:

$$p \to \frac{2}{T_s}\,\frac{z-1}{z+1} \quad \text{avec } T_s = 1$$

$$\begin{aligned}
\Longrightarrow \; H^*(z) &= \frac{\dfrac{3.3507\,(z-1)^2}{(z+1)^2}+1}{\left(\dfrac{1.8305\,(z-1)}{z+1}+1\right)^2} \\
H^*(z) &= \frac{4.3507\,z^2 - 4.7014\,z + 4.3507}{(2.8305\,z - 0.8305)^2}
\end{aligned}$$

ENSICAEN

Précisez les valeurs des pôles et des zéros :

$$H^*(z) = \frac{4.3507\,z^2 - 4.7014\,z + 4.3507}{(2.8305\,z - 0.8305)^2}$$

ENSICAEN

Précisez les valeurs des pôles et des zéros :

$$H^*(z) = \frac{4.3507\,z^2 - 4.7014\,z + 4.3507}{(2.8305\,z - 0.8305)^2}$$

- Pôles doubles :

ENSICAEN

Précisez les valeurs des pôles et des zéros :

$$H^*(z) = \frac{4.3507\,z^2 - 4.7014\,z + 4.3507}{(2.8305\,z - 0.8305)^2}$$

- Pôles doubles :

$$p = 0.2934$$

Précisez les valeurs des pôles et des zéros :

$$H^*(z) = \frac{4.3507\,z^2 - 4.7014\,z + 4.3507}{(2.8305\,z - 0.8305)^2}$$

- Pôles doubles :

$$p = 0.2934$$

- 2 zéros complexes conjugués :

ENSICAEN

Précisez les valeurs des pôles et des zéros :

$$H^*(z) = \frac{4.3507\,z^2 - 4.7014\,z + 4.3507}{(2.8305\,z - 0.8305)^2}$$

- Pôles doubles :

$$p = 0.2934$$

- 2 zéros complexes conjugués :

$$z_1 = 0.5403 + j\,0.8415 \quad \text{et} \quad z_2 = 0.5403 - j\,0.8415$$

Précisez les valeurs des pôles et des zéros :

$$H^*(z) = \frac{4.3507\, z^2 - 4.7014\, z + 4.3507}{(2.8305\, z - 0.8305)^2}$$

- Pôles doubles :

$$p = 0.2934$$

- 2 zéros complexes conjugués :

$z_1 = 0.5403 + j\,0.8415$ et $z_2 = 0.5403 - j\,0.8415$

$z_1 = e^{j}$ et $z_2 = e^{-j}$

Précisez les valeurs des pôles et des zéros :

$$H^*(z) = \frac{4.3507\, z^2 - 4.7014\, z + 4.3507}{(2.8305\, z - 0.8305)^2}$$

- Pôles doubles :

$$p = 0.2934$$

- 2 zéros complexes conjugués :

$$z_1 = 0.5403 + j\,0.8415 \quad \text{et} \quad z_2 = 0.5403 - j\,0.8415$$

$$z_1 = e^{j} \quad \text{et} \quad z_2 = e^{-j}$$

La pulsation de réjection de $H^*(z)$ est la même que pour $G(p)$:

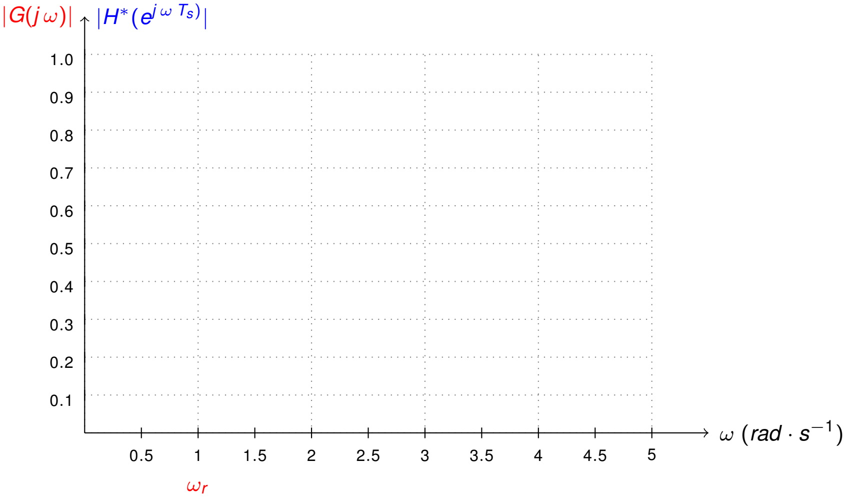
$$\omega_r = 1\ rad.s^{-1}$$

- En $\omega = 0, \quad z = 1, \quad |H^*(1)| =$
- En $\omega = \dfrac{\omega_s}{2}, \quad z = -1, \quad |H^*(-1)| =$

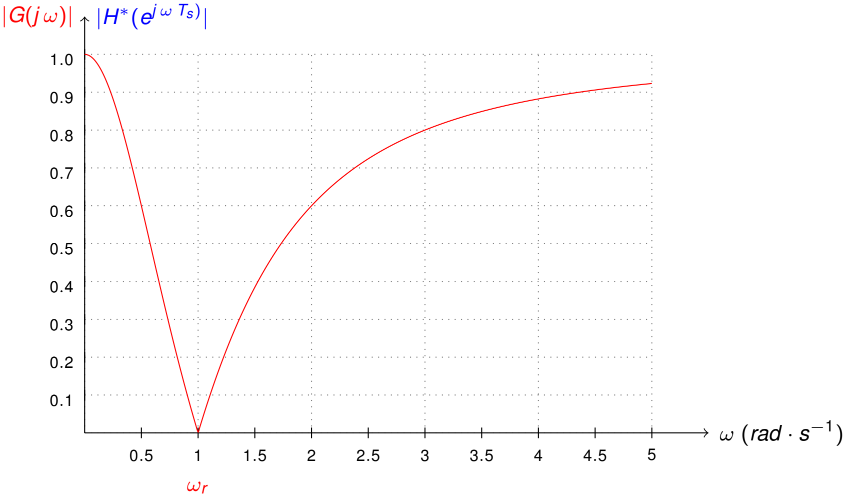
- En $\omega = 0, \quad z = 1, \quad |H^*(1)| = |H(1)| = 1$
- En $\omega = \dfrac{\omega_s}{2}, \quad z = -1, \quad |H^*(-1)| =$

- En $\omega = 0, \quad z = 1, \quad |H^*(1)| = |H(1)| = 1$
- En $\omega = \dfrac{\omega_s}{2}, \quad z = -1, \quad |H^*(-1)| = |H(-1)| = 1$

$\Longrightarrow$ mêmes propriétés que $H(z)$.

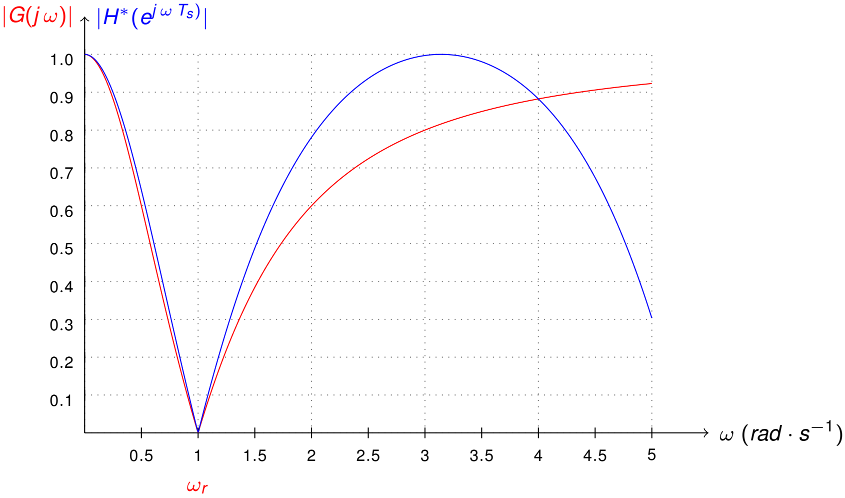


Modules des réponses fréquentielle de $G(j\,\omega)$ et $H^*(z)$.

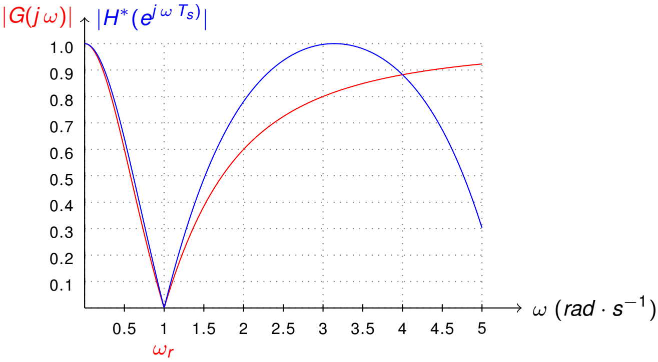


Modules des réponses fréquentielle de $G(j\,\omega)$ et $H^*(z)$.

ENSICAEN



Modules des réponses fréquentielle de $G(j\,\omega)$ et $H^*(z)$.



$$H^*(z) = \frac{4.3507\,(e^{j\,\omega})^2 - 4.7014\,e^{j\,\omega} + 4.3507}{(2.8305\,e^{j\,\omega} - 0.8305)^2}$$

$$|H^*(e^{j\,\omega})| = \cdots$$

ENSICAEN