MODES ET POLES

Décomposition en éléments simples:

Le passage de X(z) = TZ[x(t)] à x(t) peut se faire à partir des éléments de base contenus dans les tables: décomposition en éléments simples.

Pôles, zéros:

L'élément de base de la méthode est: $TZ[\alpha^{\frac{t}{T_s}}] = \frac{z}{z-\alpha} = \sum_{k=0}^{+\infty} \alpha^k z^{-k}$ avec α complexe.

La fonction X(z) est sous forme polynomiale: $X(z) = \frac{N(z)}{D(z)}$. Nous pouvons définir:

- les pôles z_i tels que D(z)=0. C'est <u>l'équation caractéristique</u> associée à X(z). Cela permet d'écrire: $D(z) = K_1 \prod_i (z - z_i)$.
- les zéros z_k tels que N(z)=0. Cela permet d'écrire: $N(z) = K_2 \prod_k (z - z_k)$.
- la forme pôles et zéros de X(z): $X(z) = K \frac{\prod_k (z - z_k)}{\prod_i (z - z_i)}$

Décomposition, modes:

Si le degré de N(z) est inférieur ou égal à celui de D(z) nous pouvons écrire dans le cas où tous les pôles sont simples:

$X(z) = \sum_i \frac{C_i z}{z - z_i}$ décomposition en éléments simples de X(z).

Le calcul de C_i se fait par $C_i = \left[(z - z_i) \frac{X(z)}{z} \right]_{z = z_i}$

L'inversion sera telle que: $x_k = \sum_i \underbrace{C_i z_i^k}_{\text{mode}}$ Chaque terme de la somme est un <u>mode</u> de X(z).

Exemple:

$$X(z) = \frac{z}{(z-a)(z-b)} \quad \Rightarrow \quad X(z) = \frac{1}{a-b}\left[\frac{z}{(z-a)} - \frac{z}{(z-b)}\right] \quad \Rightarrow \quad x_k = \frac{1}{a-b}\left[a^k - b^k\right]$$

Pôles simples réels: ***z_i est réel.***

Le mode associé est donc une simple puissance z_i^k décroissante si $|z_i| < 1$ ou croissante si $|z_i| > 1$.

Pôles simples complexes: ***z_i est complexe.***

Si z_i est complexe et si les coefficients des polynômes N(z) et D(z) sont réels (cas des problèmes correspondant à la réalité), $\overline{z}_i$ est aussi pôle du système et le coefficient de décomposition en éléments simples associé sera $\overline{C}_i$.

Dans la solution temporelle apparaîtrons les termes:

$$x_k = \ldots\ldots + C_i z_i^k + \overline{C}_i \overline{z}_i^k + \ldots\ldots$$

en posant $z_i = |z_i| e^{j\omega_i T_s}$ et $C_i = |C_i| e^{j\varphi_i}$

il vient:

$$x_k = \ldots\ldots + |z_i|^k \left[|C_i| \left(e^{j\omega_i kT_s} e^{j\varphi_i} \right) + |C_i| \left(e^{-j\omega_i kT_s} e^{-j\varphi_i} \right) \right] + \ldots.$$
$$= \ldots\ldots + 2\,|C_i|\,|z_i|^k \cos(\omega_i kT_s + \varphi_i) + \ldots$$

les deux pôles complexes conjugués correspondent à un <u>mode sinusoïdal amorti</u> si $|z_i| < 1$ ou divergent si $|z_i| > 1$.

Pôles multiples:

Dans l'équation caractéristique $D(z) = 0$, il se peut que z_i soit une racine multiple d'ordre m.

$$\Rightarrow D(z) = (\ldots\ldots.).(z-z_i)^m.(\ldots\ldots.).$$

Dans ce cas la décomposition en éléments simples est un peu plus délicate :

$$X(z) = \ldots + \frac{C_{i,1}\, z}{z - z_i} + \frac{C_{i,2}\, z}{(z - z_i)^2} + \ldots + \frac{C_{i,m}\, z}{(z - z_i)^m} + \ldots$$

Le calcul des coefficients $C^{i,q}$ est réalisable en prenant des cas particuliers ($z = 0$, $z \to \infty$,…) mais cette méthode est vite limitée et ne s'applique véritablement bien que pour m = 2. Pour une multiplicité plus grande il y a une formulation générale que nous ne justifirons pas ici:

$$C_{i,q} = \left[\frac{1}{(m-q)!} \frac{d^{m-q}}{dp^{m-q}} \left[(z - z_i)^m \frac{X(z)}{z} \right] \right]_{z = z_i}$$

Nous vérifions aisément que pour q = m : $C_{i,q} = \left[(z - z_i)^m \dfrac{X(z)}{z} \right]_{z = z_i}$

de même que pour une multiplicité m = 1 : $C_i = \left[(z - z_i) \dfrac{X(z)}{z} \right]_{z = z_i}$

<u>l'exemple simple:</u> $g(t) = t.x(t)$ et $x(t) = z_i^{t/Ts}$ avec z_i réel.

$$x_k = z_i^k \text{ et } g_k = kT_s\, z_i^k.$$

$X(z) = \dfrac{z}{z - z_i}$ et, en appliquant le théorème de la dérivation $G(z) = -\,z\,T_s \dfrac{d}{dz}\left[\dfrac{z}{z - z_i} \right] = \dfrac{z\ z_i\ T_s}{(z - z_i)^2}$

Utilisons ce résultat:

Un pôle $\mathbf{z_i}$ de multiplicité 2 correspond aux échantillons (à quelques coefficients près) : $(k.z_i^k)$.

Le mode correspondant est donc une puissance z_i^k multipliée par un temps échantillonné k. La croissance comparée des deux fonctions pour $k \to +\infty$ donne priorité à z_i^k (pour $|z_i| \neq 1$) et nous retrouvons ainsi en partie le cas d'un pôle simple:

- si $|z_i| < 1 \Rightarrow$ mode amorti.
- si $|z_i| > 1 \Rightarrow$ mode divergent.
- si $|z_i| = 1 \Rightarrow$ ce qui était un mode borné dans le cas du pôle simple devient un mode

divergent d'amplitude donnée par k.

Généralisation:

Le calcul précédent peut être généralisé à un pôle $\mathbf{z_i}$ de multiplicité m quelconque. Sans détailler, nous pouvons rapidement retracer les grandes lignes du raisonnement:

$$X(z) = \frac{(..)}{......(z-z_i)^m....} = \ldots + \frac{C_{i,1}\, z}{(z-z_i)} + \frac{C_{i,2}\, z}{(z-z_i)^2} + \ldots\ldots + \frac{C_{i,m}\, z}{(z-z_i)^m} + \ldots\ldots$$

Ceci donne comme échantillons:

$$x_k = \ldots\ldots + (.)\, z_i^k + (.)\, k.\, z_i^k + \ldots\ldots + (.)\, k^{m-1}\, z_i^k + \ldots\ldots$$

$$x_k = \ldots\ldots + [(.) + (.)\, k. + \ldots\ldots + (.)\, k^{m-1}]\, z_i^k + \ldots\ldots$$

où (.) désigne des coefficients à calculer.

Si nous appelons mode associé au pôle de multiplicité m le terme:

$$[(.) + (.)\, k. + \ldots\ldots + (.)\, k^{m-1}]\, z_i^k = P_{m-1}(k).\, z_i^k$$

il est constitué du produit d'un polynôme en k ($P_{m-1}(k)$) d'ordre (m-1) par la puissance z_i^k.

Pour les limites asymptotiques lorsque $k \to +\infty$ nous aurons les trois points suivants:

- si $|z_i| < 1 \Rightarrow$ mode amorti.
- si $|z_i| > 1 \Rightarrow$ mode divergent.
- si $|z_i| = 1 \Rightarrow$ ce qui était un mode borné dans le cas du pôle simple devient un mode divergent d'amplitude bornée par $P_{m-1}(k)$ équivalent à k^{m-1} lorsque $k \to +\infty$.

MODES ET POLES ILLUSTRATION

Dans l'étude de l'inversion de la transformée en Z soit $X(z) \to \{x_k\}$ deux grandes méthodes s'associent à la notion de "modes": la décomposition en éléments simples et la méthode des résidus. Ces deux méthodes sont rigoureusement équivalentes et décomposent le problème en séparant les différents termes liés aux pôles de X(z).

Cas de pôles simples:

Il y a deux raisons essentielles pour s'intéresser au cas particulier d'une fonction en z n'ayant que des pôles simples: c'est un cas simple à analyser et c'est, pratiquement, le cas le plus fréquent.

Dans le cas de pôles simples, nous avons établi le résultat général suivant: un pôle simple z_i dans l'expression de X(z) introduira un terme en $(z_i)^k$ dans la réponse temporelle. Ce terme est appelé un "mode".

Cette notion est légèrement modifiée:

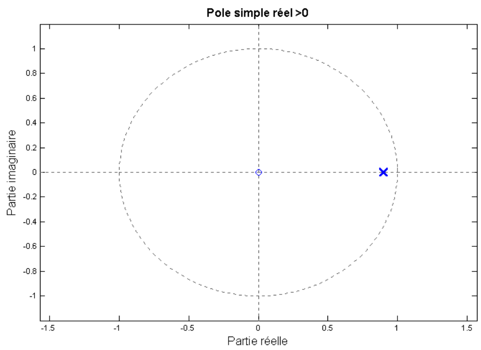
- z_i réel: le mode est bien en $(z_i)^k$
- z_i complexe: $z_i = |z_i|\, e^{j\omega T_s}$. On associe dans l'expression temporelle, le terme provenant du pôle complexe conjugué. Le résultat donne un terme du type $|z_i|^k \cos(\omega k T_s + \varphi)$ qui est appelé un mode oscillant (c'est en réalité la superposition de deux modes associés à deux pôles complexes conjugués).

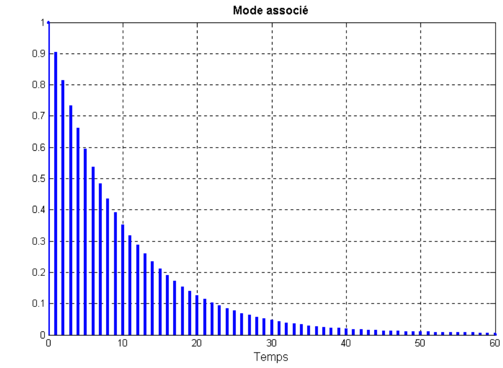
première conséquence:

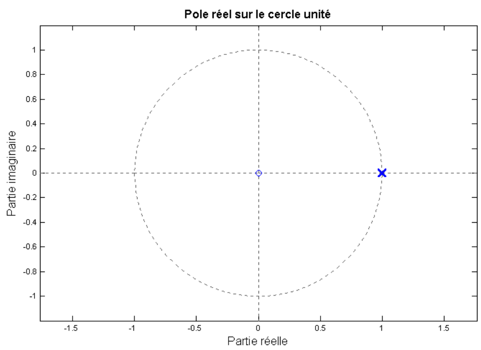
Pour un pôle simple donné, le mode temporel correspondant peut avoir trois comportements:

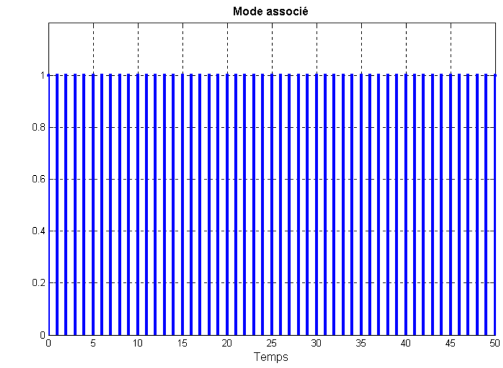
- il est amorti et tend asymptotiquement vers 0 lorsque $k \to +\infty$. C'est le cas si $|z_i| < 1 \Rightarrow$ le ou les pôles étudiés sont à l'intérieur d'un cercle de rayon 1 : le cercle unité. L'amortissement sera d'autant plus lent que le ou les pôles seront voisins du cercle unité.
- il est divergent et tend asymptotiquement vers une limite non bornée lorsque $k \to +\infty$. C'est le cas si $|z_i| > 1 \Rightarrow$ le ou les pôles étudiés sont à l'extérieur du cercle unité. La divergence sera d'autant plus lente que le ou les pôles seront voisins du cercle unité.
- il n'est ni convergent ni divergent et son amplitude reste bornée à une valeur non nulle lorsque $k \to +\infty$. C'est le cas si $|z_i| = 1 \Rightarrow$ le ou les pôles étudiés sont sur le cercle unité.

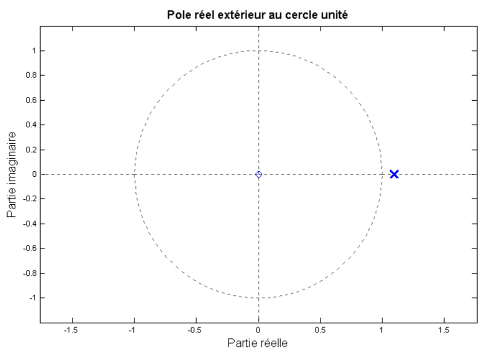
Ces résultats sont rappelés dans des cas simples par les figures ci-dessous. Lorsque les modes se superposent dans une expression temporelle, ils sont affectés de coefficients plus ou moins grands qui dépendent des zéros de la fraction X(z).

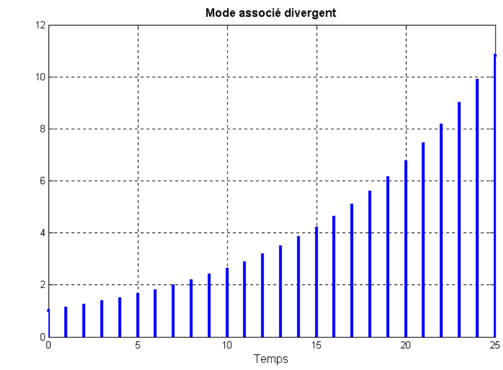


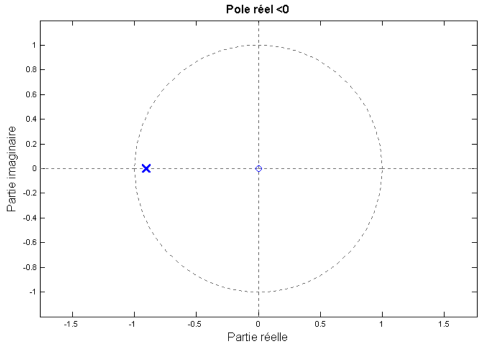


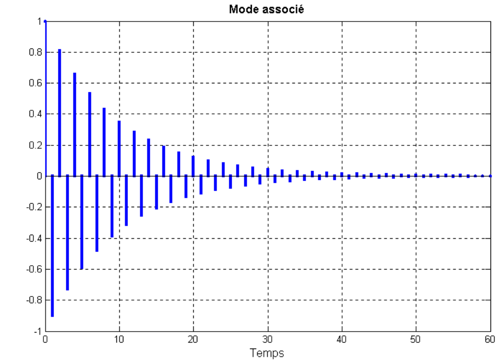


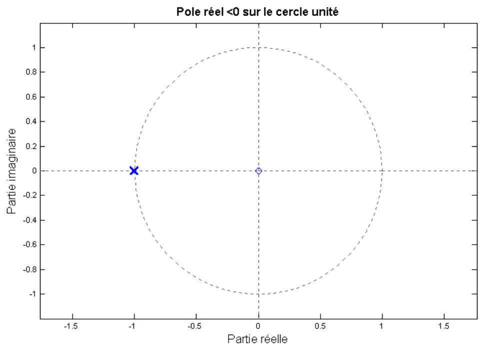


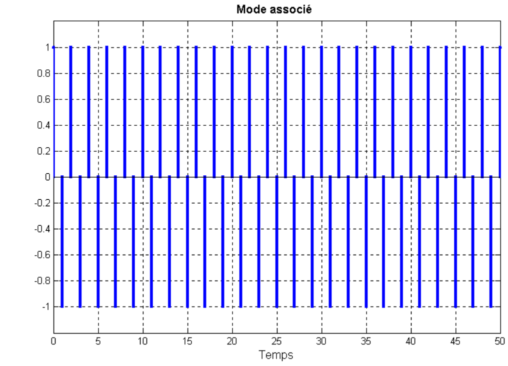


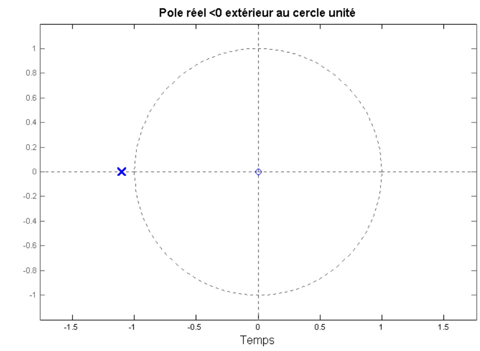


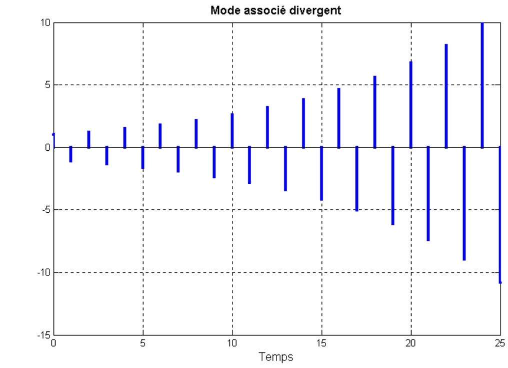

Pole réel <0
Partie imaginaire
Partie réelle

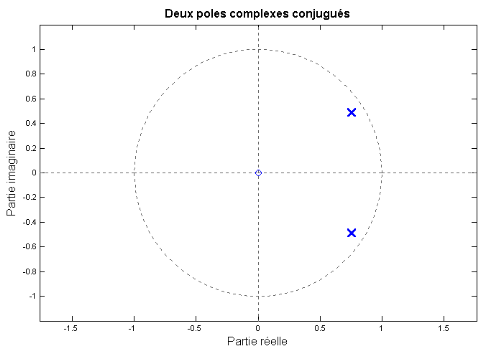

Mode associé
Temps

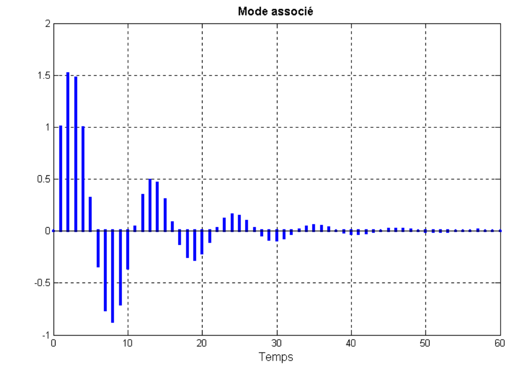

Pole réel <0 sur le cercle unité
Partie imaginaire
Partie réelle

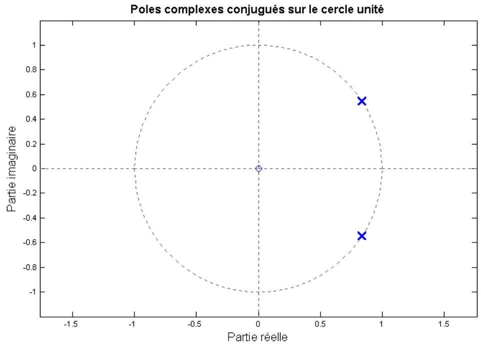

Mode associé
Temps

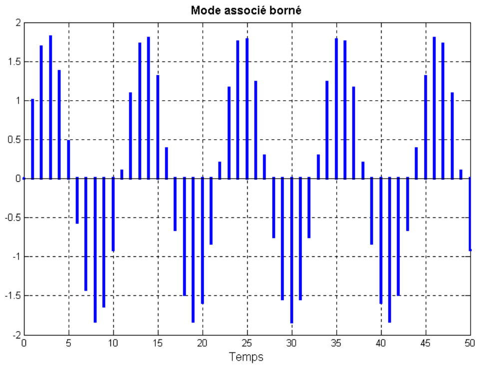

Pole réel <0 extérieur au cercle unité
Temps

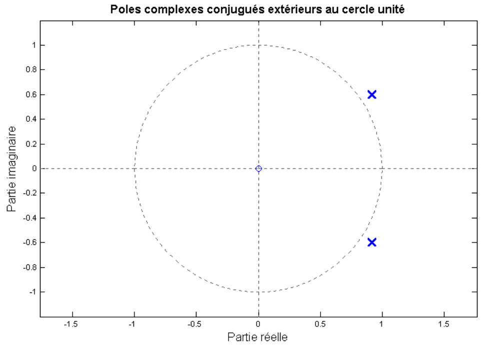

Mode associé divergent
Temps

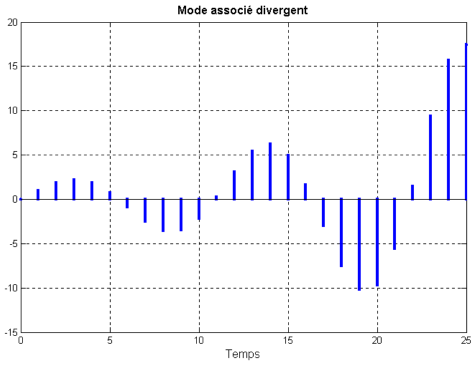

Deux poles complexes conjugués
Partie imaginaire
Partie réelle

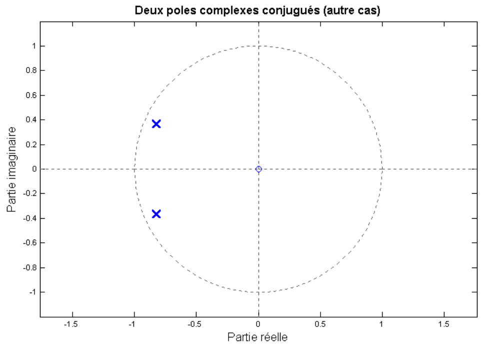

Mode associé
Temps

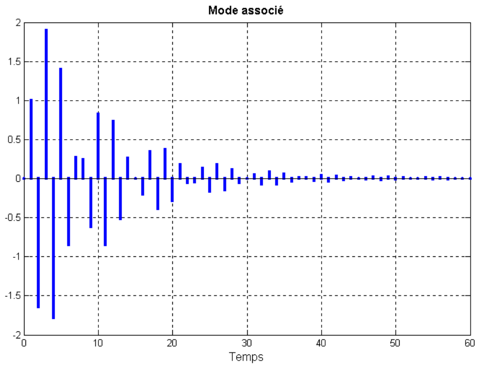


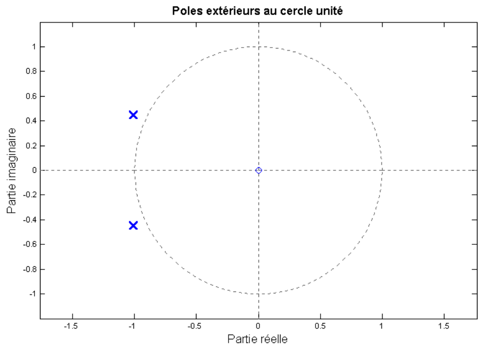


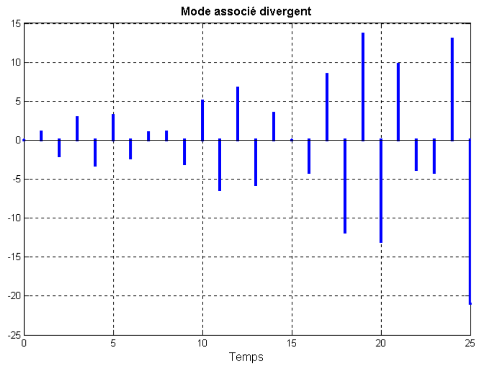












Cas des pôles de multiplicité >1:

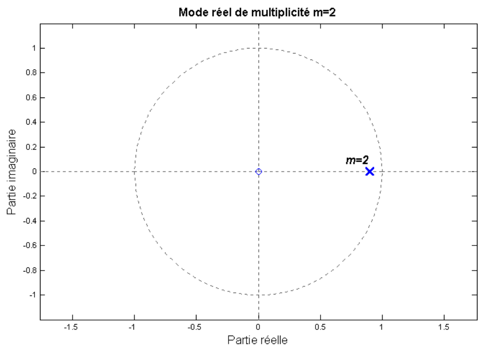
Nous avons vu qu'un pôle z_i de multiplicité m introduisait dans la solution un terme du type $P_{m-1}(k).z_i^k$ que nous appelons mode associé au pôle de multiplicité m. Il est constitué du produit d'un polynôme $P_{m-1}(k)$ d'ordre (m-1) en k par la puissance z_i^k.

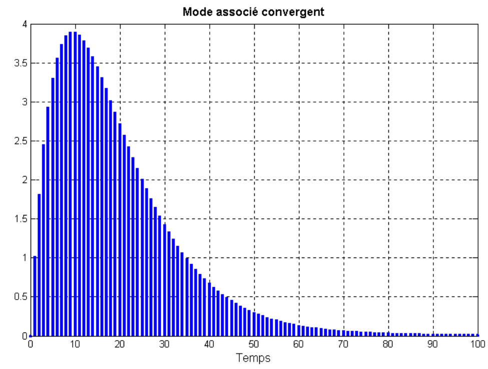
Pour les limites asymptotiques lorsque $k \to +\infty$ nous avons les trois points suivants:

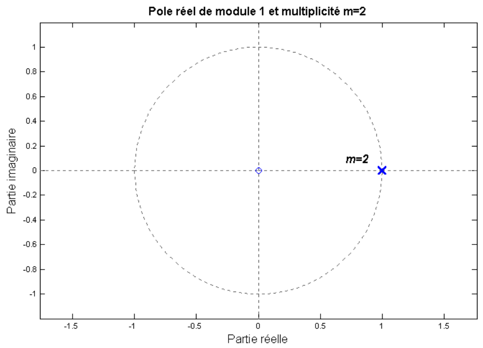
- si $| z_i | < 1 \Rightarrow$ mode amorti.

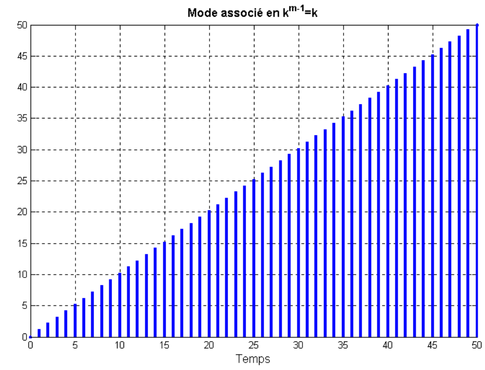
- si $| z_i | > 1 \Rightarrow$ mode divergent.
- si $| z_i | < 1 \Rightarrow$ ce qui était un mode borné dans le cas du pôle simple devient un mode divergent d'amplitude bornée par $P_{m-1}(k)$ équivalent à k^{m-1} lorsque $k \to +\infty$.

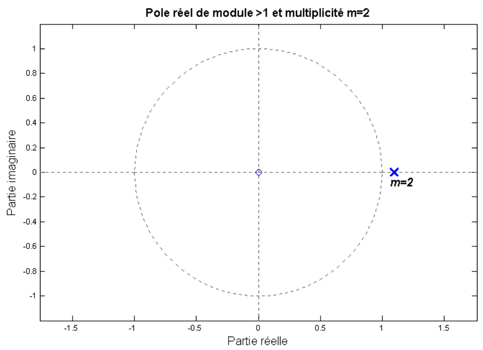
Tout ceci est illustré par les quelques figures suivantes:

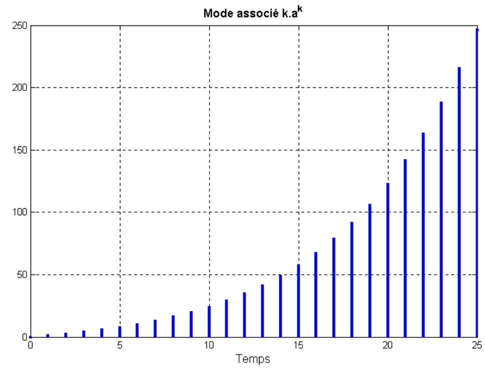


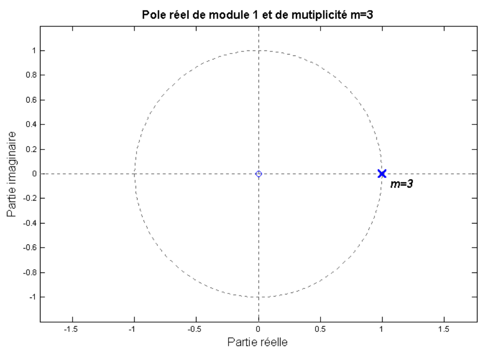


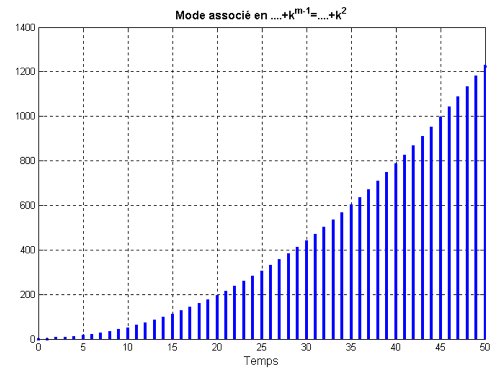


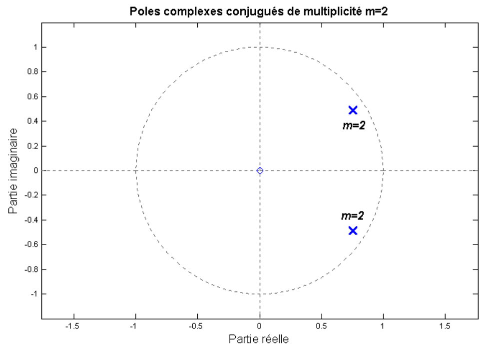


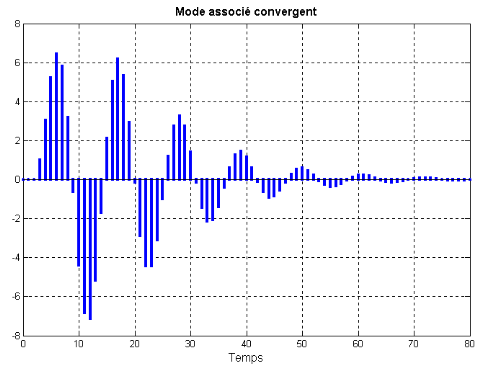


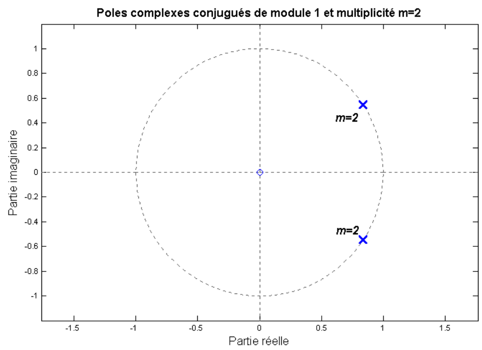


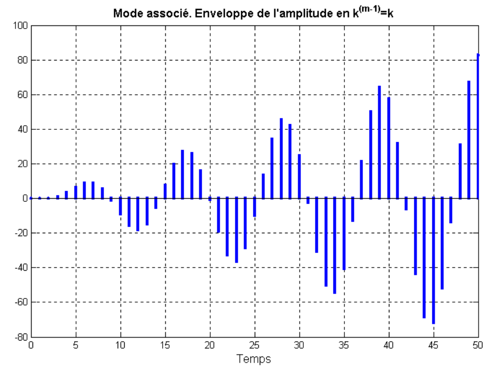


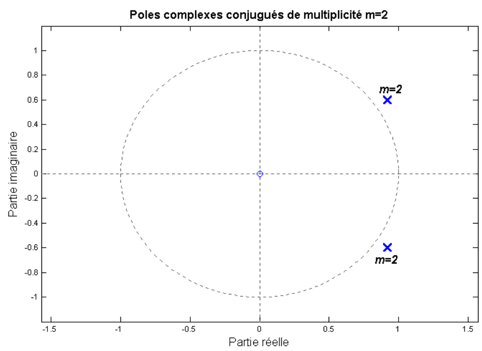


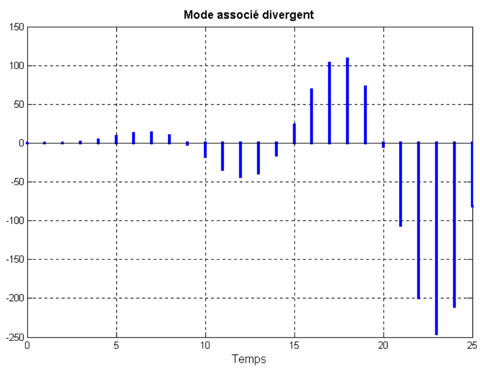












Stabilité :

Lors de l'étude de l'inversion de la TZ nous avons établi qu'il existe une représentation par pôles et zéros telle que:

Zéros du système ≡ Racines du numérateur $N(z)=0 \rightarrow \{z_k\}$.

Pôles du système ≡ Racines du dénominateur $D(z)=0 \rightarrow \{z_i\}$.

$$\boxed{H(z) = K\frac{\prod_k (z - z_k)}{\prod_i (z - z_i)}}$$

A un pôle z_i simple ou multiple nous pouvons associer un mode qui diverge si $|z_i|>1$ et converge si $|z_i|<1$.

Pour un pôle complexe, on lui associe son complexe conjugué ce qui fait apparaître un mode oscillant amorti ou divergent selon la valeur de $|z_i|$.

La réponse impulsionnelle ou une réponse libre sont caractéristiques du système. Dans ces réponses nous avons la superposition de tous les modes du système associés à ses pôles. Pour que le système soit stable, il faut que tous ses modes le soient et donc que tous les pôles du système soient situés à l'intérieur du cercle unité.

Un système linéaire invariant discret est asymptotiquement stable lorsque tous les pôles de sa fonction de transfert sont situés à l'intérieur du cercle unité du plan z.

Nous aurons les trois situations suivantes:

- Tous les pôles sont à l'intérieur du cercle unité: le système est dit strictement stable.
- Un ou plusieurs pôles de multiplicité simple sont situés sur le cercle unité : le système est à la limite de stabilité ou stabilité au sens large.
- Un ou plusieurs pôles sont situés à l'extérieur du cercle unité: système instable.

Autre conséquence un filtre RIF a tous ses pôles à l'origine et sera donc toujours stable.

Mode dominant - Mode auxiliaire:

Dans le cas de modes amortis, plusieurs modes peuvent se superposer dans l'expression temporelle. Il est évident que lorsque $k \to +\infty$ le mode qui a tendance à subsister est celui qui est le moins amorti et nous le qualifieront de dominant.

- lors de la comparaison de deux modes, on appellera mode dominant celui dont l'expression s'amortit le plus lentement. L'autre sera qualifié de mode auxiliaire.
- le mode dominant correspond donc à un ou des pôles plus proches du cercle unité que dans le cas d'un mode auxiliaire. Par extension on parle aussi de pôle(s) dominant(s) et de pôle(s) auxiliaire(s).