TD - BE
Traitement Numérique du Signal

M. Frikel, A. Skrpzypczak

ENSICAEN 1A - EPA/INFO
mfrikel@ensicaen.fr

Table des matières

Chapitre 1

TD 1 - Signaux discrets

1.1 Représentation d'un signal discret

La mesure d'un signal aux instants t (en s) donne respectivement les valeurs indiquées dans le tableau ci-dessous :

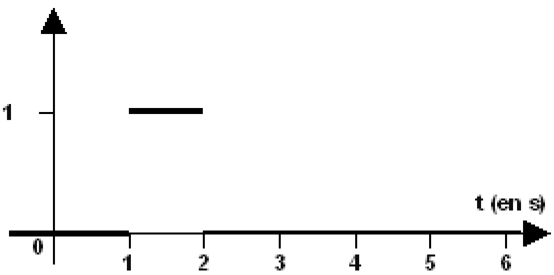
$1s$	$2s$	$4.3s$	$7.6s$	$12s$
0.85 V	-0.56 V	4 V	-6.3 V	12 V

1. Représenter le signal discret physique correspondant à ces mesures.
2. Écrire le modèle mathématique (ou expression analytique) associé à ce signal et le représenter.

1.2 Expression analytique d'un signal échantillonné

Le signal continu ci-dessous est échantillonné avec la période d'échantillonnage T_s.

Donner l'expression analytique du signal échantillonné pour :



T_{s1}	T_{s2}	T_{s3}	T_{s4}	T_{s5}
0.8 s	1.5 s	0.5 s	1 s	2 s

1.3 Périodes d'échantillonnage

Un signal sinusoïdal continu de période 1 ms est représenté sur les trois figures suivantes (fig. 1.1,fig. 1.2,fig. 1.3). En trait gras, représenter sur chaque graphique le signal échantillonné à la cadence indiquée.

Dans chaque cas interpréter l'allure du signal échantillonné obtenu.

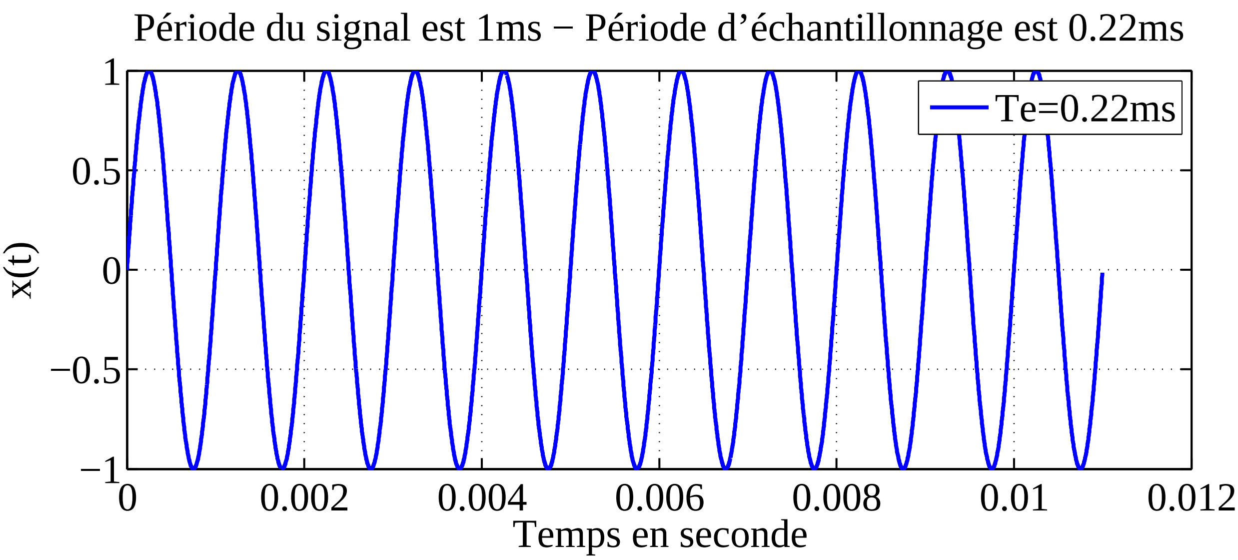


FIGURE 1.1 – Période d'échantillonnage 0.22 ms

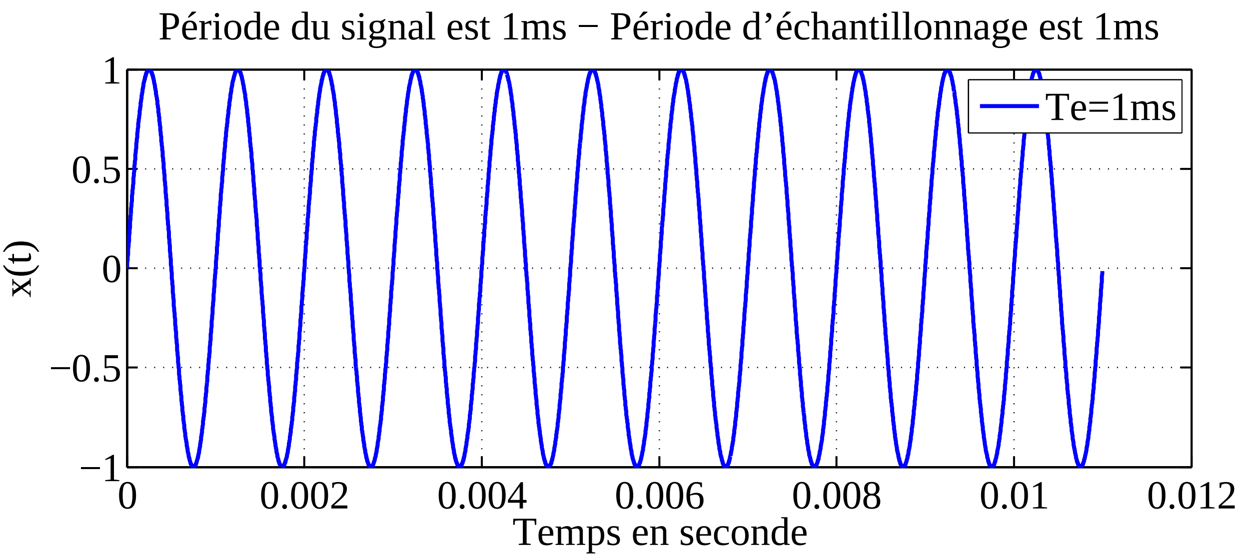


FIGURE 1.2 – Période d'échantillonnage 1 ms

1.4 Échantillonnage

Soit le signal continu où $x_c(t) = e^{-\alpha t}e(t)$ est l'échelon unité d'Heaviside et α un réel strictement positif. Ce signal est échantillonné avec une période d'échantillonnage T_s.

1. Représenter sur la même figure le signal continu et le signal échantillonné.
2. Donner l'expression analytique de l'échantillon x_k à l'instant $t = kT_s$ et écrire la représentation mathématique du signal échantillonné.
3. Rappeler l'expression de la transformée de Fourier du signal continu $X_c(f)$ et calculer la transformée de Fourier du signal échantillonné $X(f)$.
4. Dans les deux cas, quelles sont les parités des modules et des phases des transformées de Fourier. Quelle est l'origine de ces propriétés ?
5. Montrer que $X(f)$ est périodique. Quelle est sa période ?

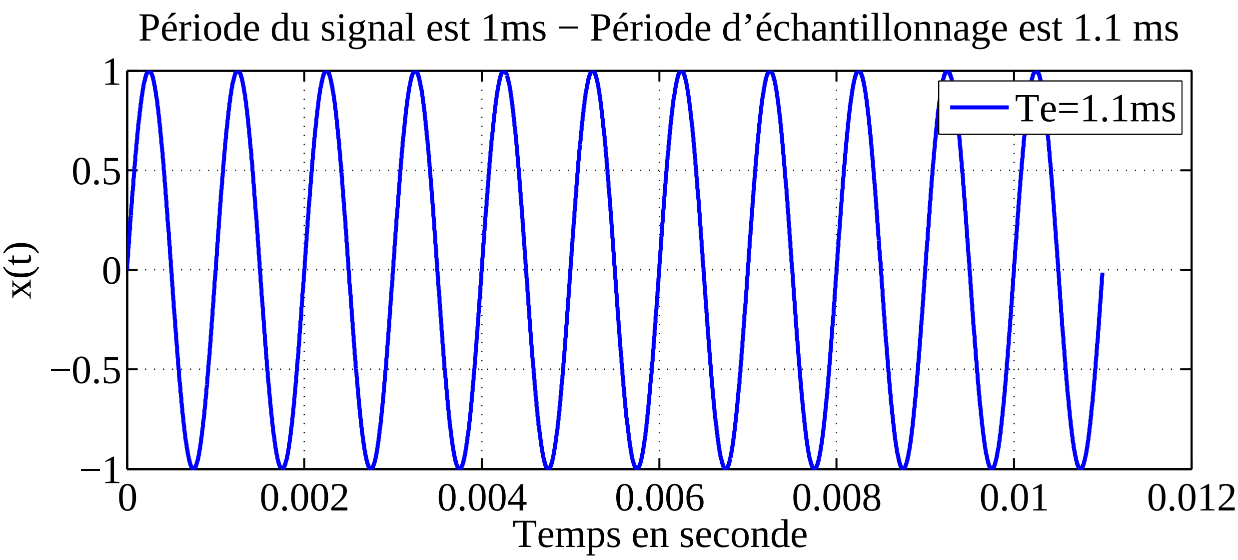


FIGURE 1.3 – Période d'échantillonnage 1.1 ms

6. A quelle condition y a-t-il une relation simple entre $X_c(f)$ et $X(f)$? Quelle est cette relation ?

1.5 Transformée de Fourier de rect(t)

1. Rappeler la TF de $rect(t)$.
   En déduire la TF de $\frac{sin\,(\pi t)}{\pi t}$.
2. Un signal continu $x_c(t) = \frac{sin\,(\pi t)}{\pi t}$ est échantillonné avec une période T_s de $0.3s$. Représenter la TF du signal échantillonné obtenu.
   Reprendre la même question pour une période d'échantillonnage $T_s = 1.5s$ et commenter les résultats obtenus.
3. On échantillonne le signal continu $y_c(t) = rect(t)$.
   Peut-on satisfaire la condition de Shannon ? Comment s'y prend-on pratiquement ?

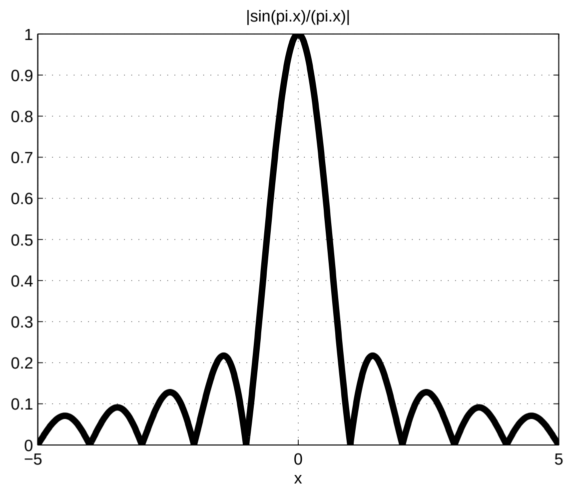


FIGURE 1.4 – Spectre du signal $rect(t)$

Chapitre 2

TD 2 - Transformée de Fourier Discrète (TFD)

2.1 Transformée de Fourier du signal rect(t)

Nous cherchons à évaluer la transformée de Fourier du signal grâce à la TFD :

$$x(t) = rect\left(t - \frac{1}{2}\right) \tag{2.1}$$

1. Rappeler l'expression de $X(f) = TF\left[x(t)\right]$.
2. Le signal est échantillonné à la période T_s pendant un temps d'acquisition $T_a = N.T_s$ ce qui permet de disposer de N échantillons $\{x_k\}$, k = {0 ; 1 ;... ; N-1}.

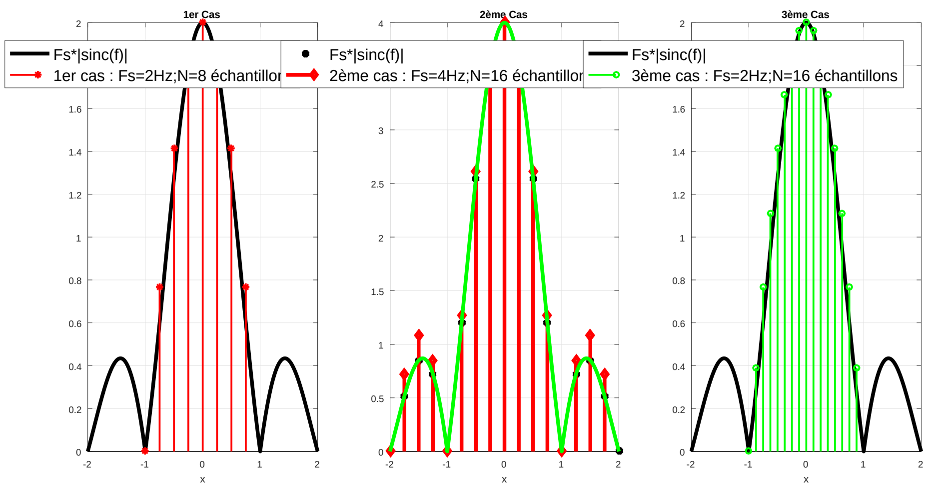
   Rappeler l'expression de la TFD permettant de calculer à partir de $\{x_k\}$ les valeurs $\{X_n\}$.

   La TFD constitue une approximation $\widehat{X}(f)$ du spectre $X(f)$. Rappeler cette approximation.
3. (a) On choisit $T_s = 0.5s$ et $T_a = 4s$. Préciser la séquence $\{x_k\}$ et calculer l'expression de $\{X_n\}$. Sur une même courbe, comparer $|X_n|$ et $|X(f)|$.

   Étalonner l'axe des fréquences et préciser la bande de Shannon.

   (b) Effectuer la même étude avec $T_s = 0.25s$ et $T_a = 4s$ puis avec $T_s = 0.5s$ et $T_a = 8s$.

   Interpréter les résultats obtenus et discuter des causes de la qualité des différentes estimations.



2.2 TFD - Étalonnage fréquentiel

La figure ci-dessous (figure 2.1) représente différents signaux discrets ainsi que le module de leur TFD. (TFD du signal $S_i \rightarrow TFS_i$, les abscisses des différentes courbes représentent des numéros d'échantillons)

1. Le signal S_1 est obtenu avec un échantillonnage à la fréquence $1200Hz$. Définir la transformée de Fourier discrète, calculer celle du signal S_1 et en déduire les valeurs présentées dans le cadre 4. Étalonner l'axe des fréquences de ce cadre (On justifiera cet étalonnage).
2. Le signal S_2 est obtenu à partir du signal S_1, comment ? Calculer sa TFD, quel est le lien entre la TFD de S_2 et celle de S_1 ? (le justifier). Étalonner l'axe des fréquences du cadre 5. Quel est l'intérêt pratique d'une telle manipulation ?
3. Le signal S_3 est obtenu à partir du signal S_1, comment ? Calculer sa TFD, quel est le lien entre la TFD de S_3 et celle de S_1 ? (le justifier). Étalonner l'axe des fréquences du cadre 6. Quel est l'intérêt pratique d'une telle manipulation ?

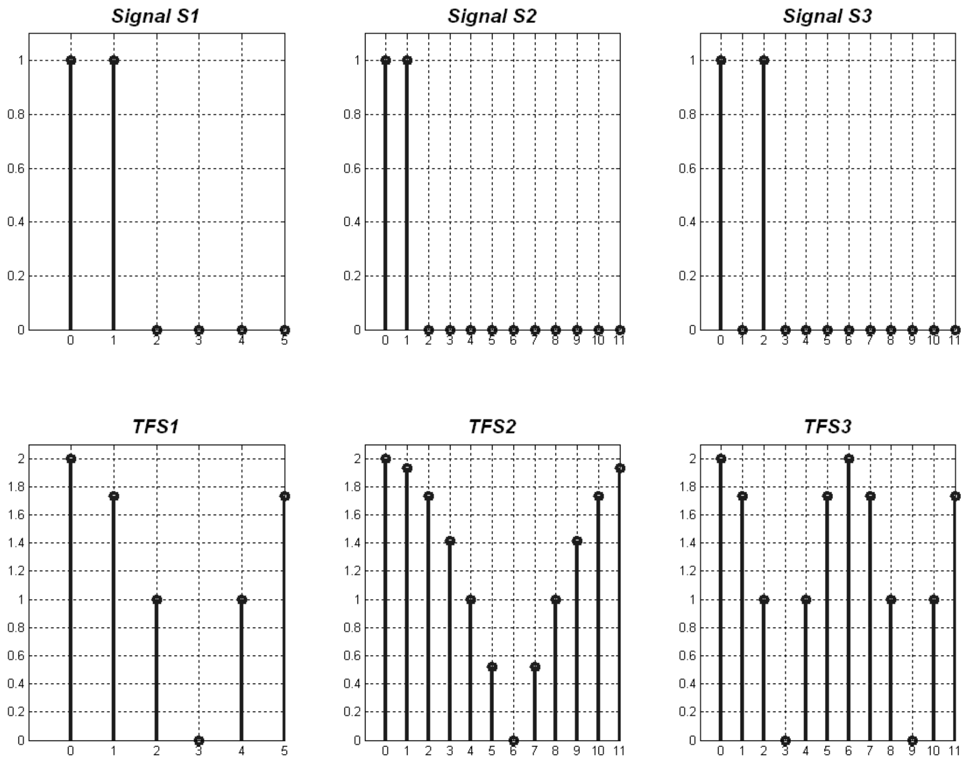


Figure 2.1 – Différents signaux discrets et le module de leur TFD

2.3 TFD d'un sinus cardinal

1. Rappeler les TF des fonctions $rect(t)$ et $tri(t)$. En déduire la transformée de Fourier de la fonction :
$sinc_2(t) = \left[\dfrac{sin\,(\pi t)}{\pi t}\right]^2$ et la représenter.
2. On échantillonne la fonction $sinc_2(t)$. Quel est l'effet de l'échantillonnage sur le spectre de Fourier ? A quelle condition doit satisfaire la période d'échantillonnage ?

3. On veut estimer le spectre de $sinc_2(t)$ à l'aide de la TFD et, pour cela, on constitue les fichiers de données de la manière suivante :
   — A la période d'échantillonnage T_s, on mesure le signal sur n échantillons allant de $t = -\frac{n}{2}T_s$ à $t = \left(\frac{n}{2} - 1\right) T_s$.
   — Ces échantillons sont complétés par des zéros pour obtenir N points.
   — Avec ces N points, on réalise une TFD.

   Les six calculs suivants ont été réalisés :

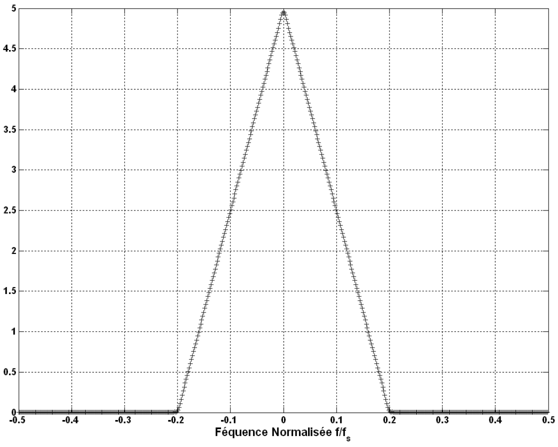
Calcul 1	$T_s = 0.2$s	n = 120	N = 512
Calcul 2	$T_s = 0.5$s	n = 48	N = 512
Calcul 3	$T_s = 0.6$s	n = 40	N = 512
Calcul 4	$T_s = 0.2$s	n = 120	N = 128
Calcul 5	$T_s = 0.2$s	n = 10	N = 512
Calcul 6	$T_s = 0.2$s	n = 120*	$N = 512$

   Calcul 6 : * en intercalant deux zéros entre deux échantillons successifs du signal puis en complétant avec des zéros.

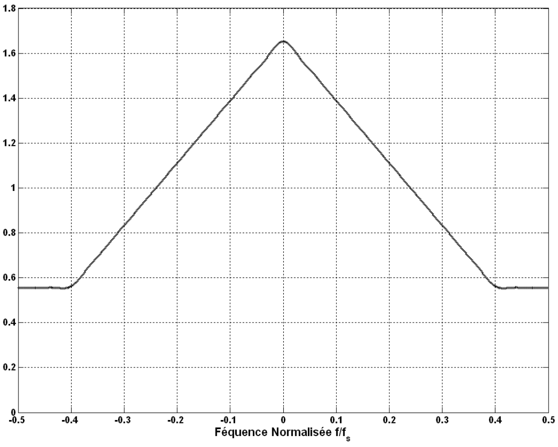
   Les résultats obtenus sont portés sur les six figures jointes où les abscisses correspondent à la bande fréquentielle normalisée de Shannon.

4. (a) La figure A correspond au cas $n°1$. Justifier précisément son allure.
   (b) Pour les autre figures, justifier à quel calcul correspond chacune d'entre elles.

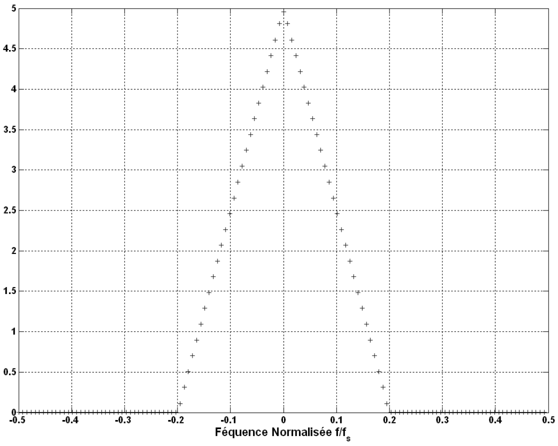
courbe A



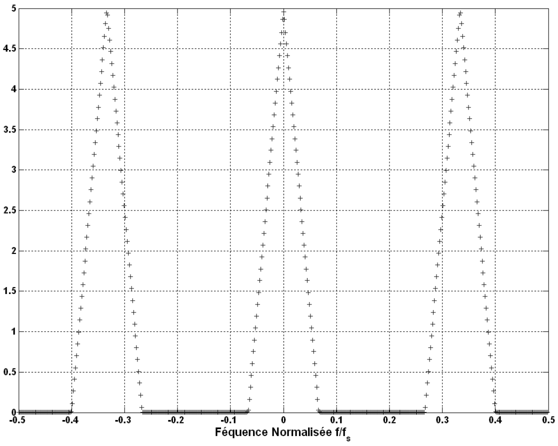
courbe B



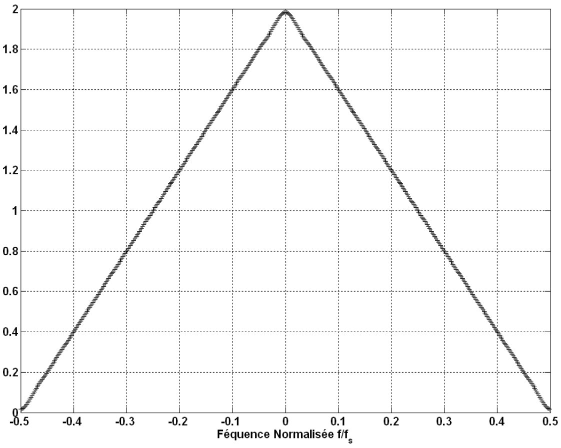
courbe C



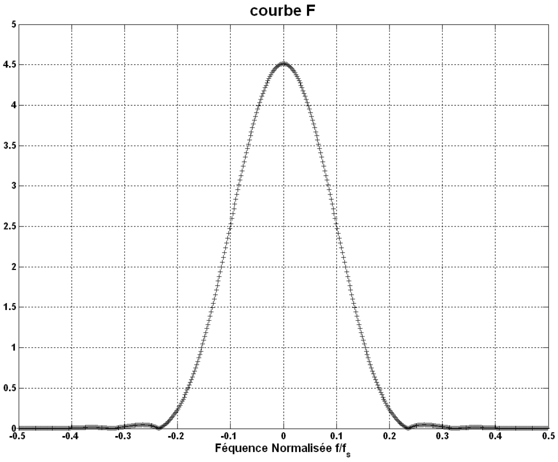
courbe D



courbe E



courbe F



Chapitre 3

TD 3 - Les filtres numériques

3.1 Quelques rappels sur la TZ monolatérale

Un signal $x(t)$ est le résultat d'un échantillonnage du signal $x_c(t)$ à la période T_s et les échantillons obtenus sont $\{x_k\}$.

1. Sous quelle forme est modélisé mathématiquement ce signal ?
2. Quelle sera par définition la transformée en Z monolatérale (notée ensuite TZ) du signal ?
3. Soit $x_c(t) = \alpha^{t/T_s}$ avec $\alpha \in C$.
   (a) Que vaut l'échantillon x_k ? En déduire l'expression de la TZ du signal $x(t)$.
   (b) Déduire du α la valeur de la TZ de l'échelon d'Heaviside $e(t)$.
   (c) Déduire du α la valeur de la TZ de $e^{j\omega t}$ puis celle de $sin\,(\omega t)$ et $cos\,(\omega t)$.

3.2 Equation aux différences

Le comportement d'un système linéaire invariant est caractérisé par l'équation aux différences :

$$\boxed{y_n - 1.8y_{n-1} + 0.8y_{n-2} = 3.10^{-2}x_n + 6.10^{-2}x_{n-1} \qquad (3.1)}$$

1. Calculer la fonction de transfert du système et la mettre sous forme pôles et zéros.
2. En l'absence de conditions initiales, calculer la réponse indicielle du système.

3.3 Réponse en fréquence d'un système

Un système linéaire invariant de signal d'entrée $x(t)$ et de signal de sortie $y(t)$ a un comportement caractérisé par la fonction de transfert :

$$\boxed{H(z) = \frac{0.8(z+2)}{z^2(z-0.2)^2} \qquad (3.2)}$$

1. Avec 3 points astucieusement choisis, représenter le module de la réponse en fréquence du système. Justifier l'allure avec la représentation des pôles et des zéros.

2. Quelle est l'équation récurrente associée au système ?
3. En l'absence de conditions initiales on veut calculer la réponse indicielle du système.
   (a) Expliquer pourquoi $y_k = 0$ pour $k = 0, 1, 2$
   (b) Calculer y_k pour $k \geq 3$
4. L'excitation $x(t)$ est nulle mais le système a une condition initiale non nulle : $y_{-1} = 1$. A partir du 2°), écrire la relation entre $Y(z)$ et y_{-1}. En déduire, dans ce cas, y_k pour $k \geq 0$.

3.4 Etude d'un filtre discret

Un filtre discret de signal d'entrée $x(t)$ et de signal de sortie $y(t)$ a pour fonction de transfert :

$$\boxed{H(z) = \frac{(z+1)}{(z-0.5)^2} \qquad (3.3)}$$

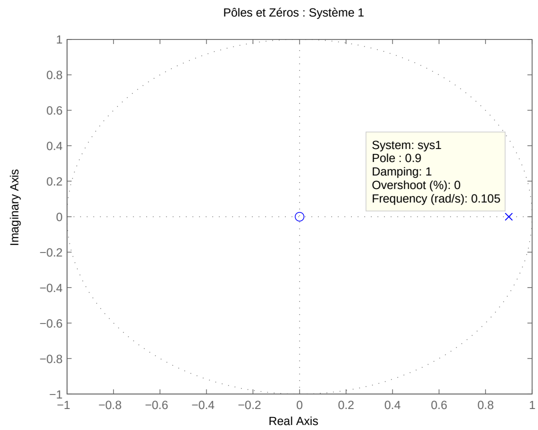
1. Quels sont les pôles et zéros de ce filtre. Les placer dans le plan z.

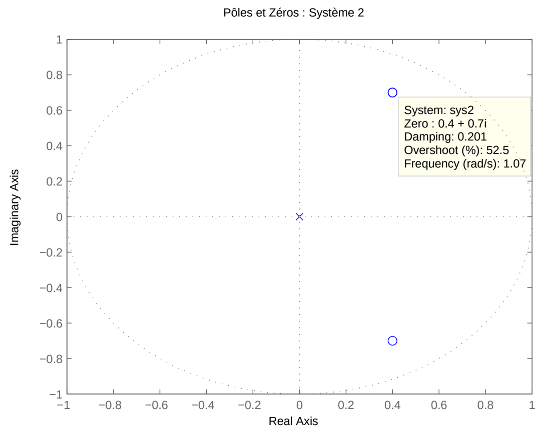
   Avec ce diagramme indiquer le type de comportement fréquentiel de ce filtre. Toujours à l'aide du diagramme des pôles et zéros, calculer le module de la transmittance du filtre pour les fréquences normalisées $\{0, 0.25, 0.5\}$. Tracer l'allure du module de la réponse en fréquence.
2. A l'aide de la transformée en z, calculer les coefficients $\{h_k\}$ de la réponse impulsionnelle $h(t)$ du filtre. Quelles sont les valeurs numériques de h_0, h_1, h_2 et h_3 ?
3. Quelle est l'équation récurrente liant $y(t)$ et $x(t)$? Pour calculer les coefficients de la réponse impulsionnelle on impose que $y_n = 0$ pour $n < 0$. Pourquoi ? Retrouver les valeurs de h_0, h_1, h_2 et h_3.

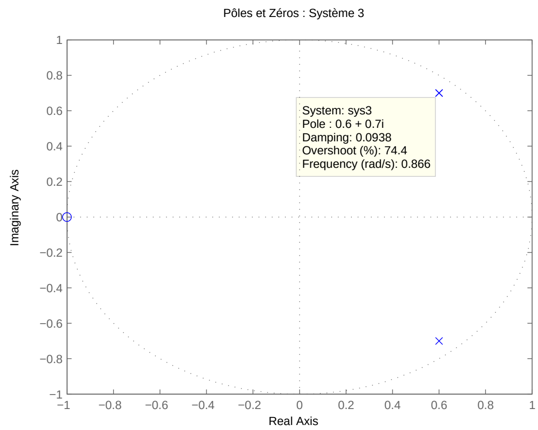
3.5 Association des réponses fréquentielle et impulsionnelle de quelques exemples de systèmes discrets

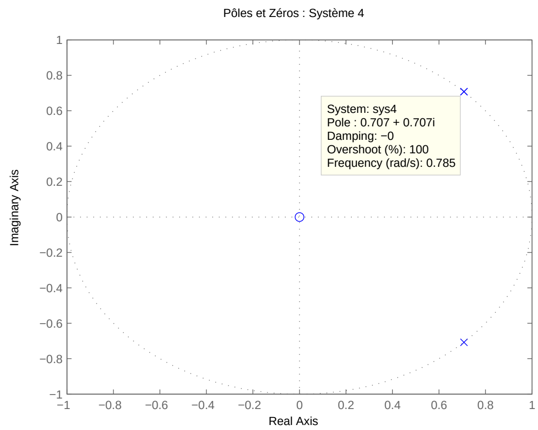
Sur les figures ci-dessous, sont représentées les positions des pôles et des zéros de la fonction de transfert de quatre systèmes différents (numérotés de 1 à 4, le coefficient de gain K n'étant pas précisé). Puis, sont représentées respectivement (mais dans un ordre différent) les réponses fréquentielles et les réponses impulsionnelles des systèmes.

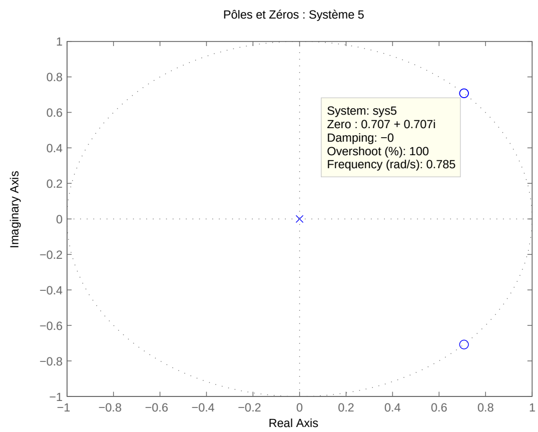
En justifiant votre réponse, associer à chaque système sa réponse fréquentielle et sa réponse impulsionnelle.

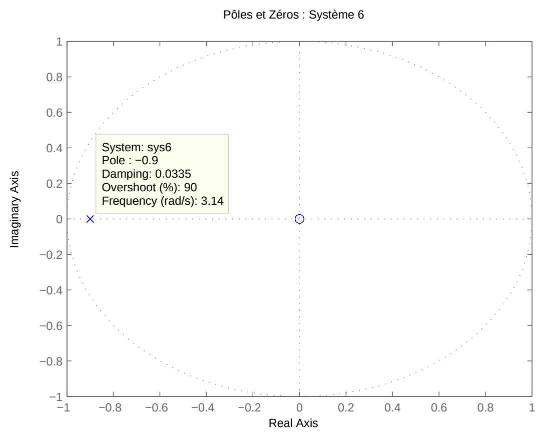

Pôles et Zéros : Système 1
System: sys1
Pole : 0.9
Damping: 1
Overshoot (%): 0
Frequency (rad/s): 0.105
Imaginary Axis
Real Axis

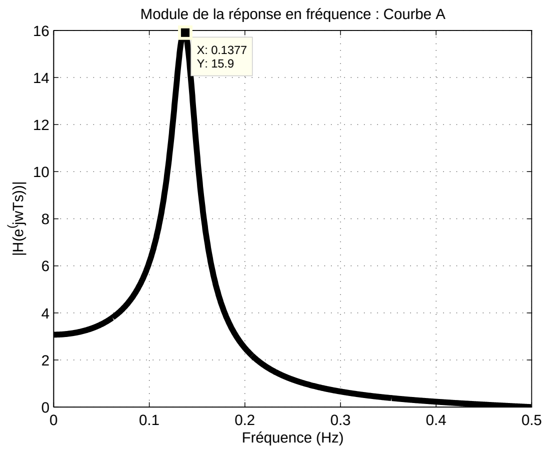

Pôles et Zéros : Système 2
System: sys2
Zero : 0.4 + 0.7i
Damping: 0.201
Overshoot (%): 52.5
Frequency (rad/s): 1.07
Imaginary Axis
Real Axis

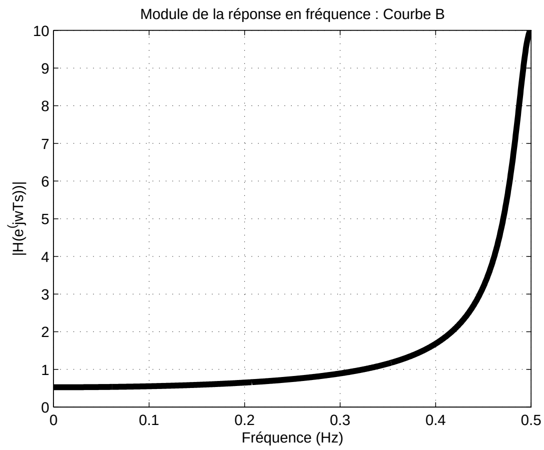

Pôles et Zéros : Système 3
System: sys3
Pole : 0.6 + 0.7i
Damping: 0.0938
Overshoot (%): 74.4
Frequency (rad/s): 0.866
Imaginary Axis
Real Axis

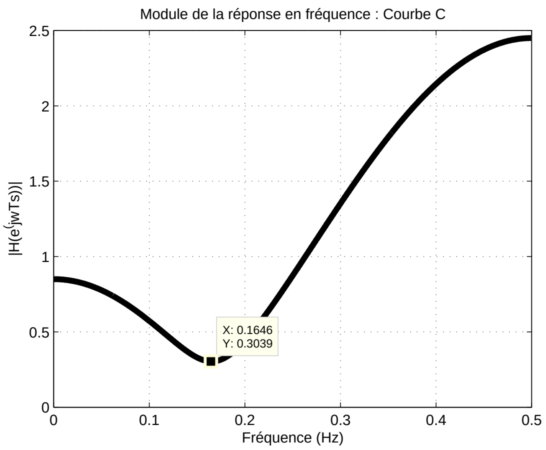

Pôles et Zéros : Système 4
System: sys4
Pole : 0.707 + 0.707i
Damping: −0
Overshoot (%): 100
Frequency (rad/s): 0.785
Imaginary Axis
Real Axis

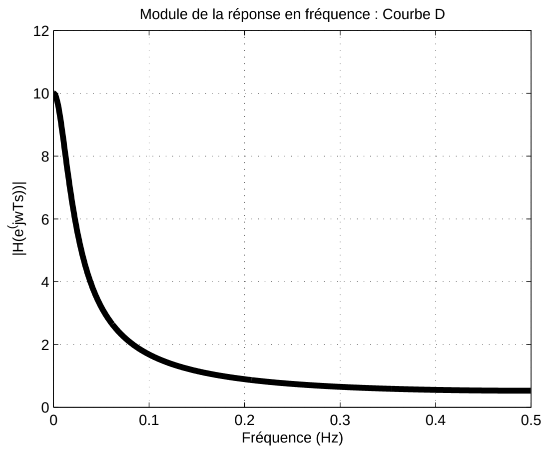

Pôles et Zéros : Système 5
System: sys5
Zero : 0.707 + 0.707i
Damping: −0
Overshoot (%): 100
Frequency (rad/s): 0.785
Imaginary Axis
Real Axis

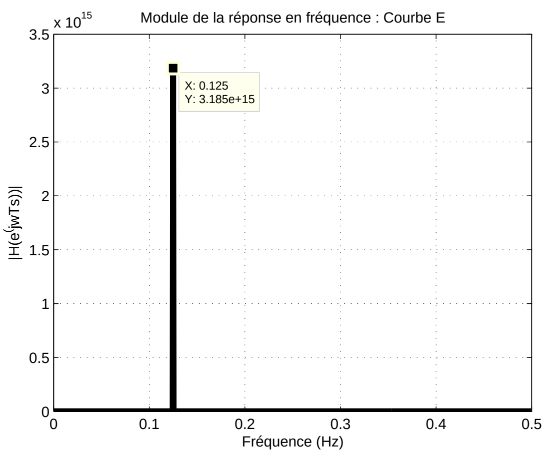

Pôles et Zéros : Système 6
System: sys6
Pole : −0.9
Damping: 0.0335
Overshoot (%): 90
Frequency (rad/s): 3.14
Imaginary Axis
Real Axis

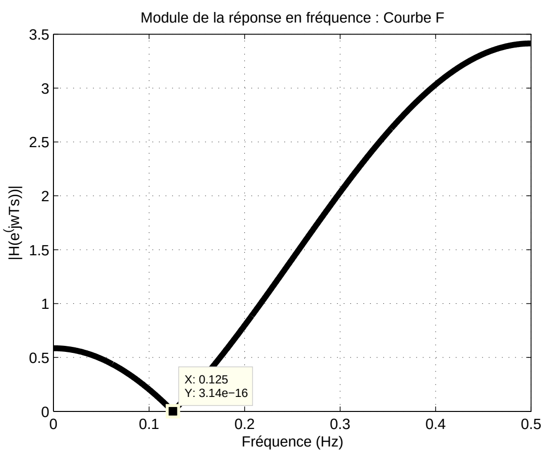

Module de la réponse en fréquence : Courbe A
X: 0.1377
Y: 15.9
|H(e^(jwTs))|
Fréquence (Hz)

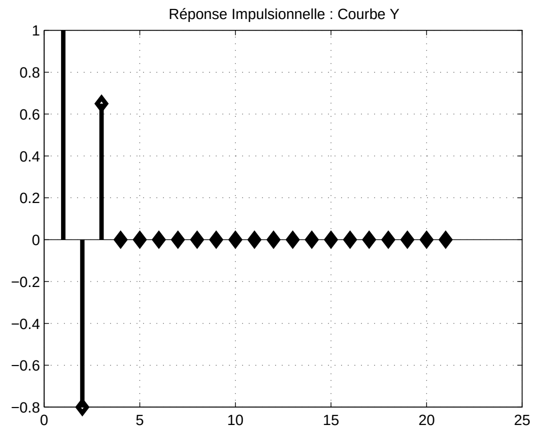

Module de la réponse en fréquence : Courbe B
|H(e^(jwTs))|
Fréquence (Hz)

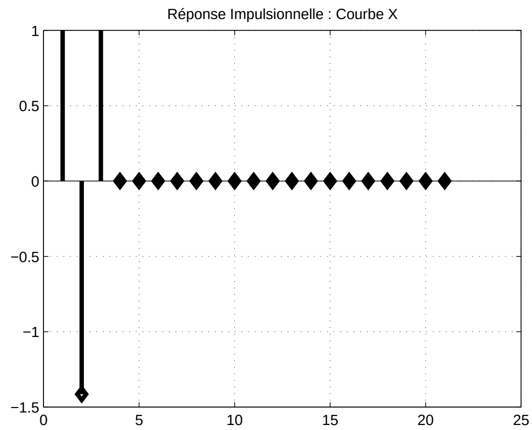

Module de la réponse en fréquence : Courbe C
X: 0.1646
Y: 0.3039
|H(e^(jwTs))|
Fréquence (Hz)

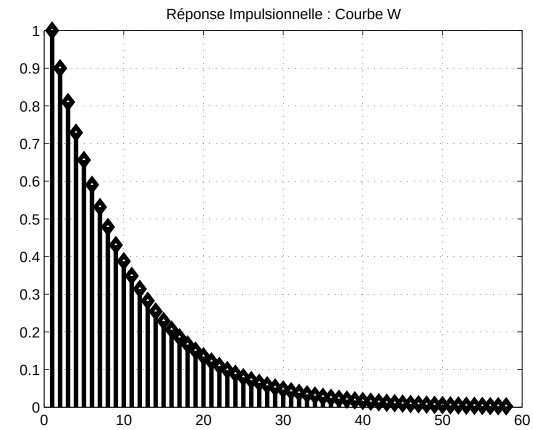

Module de la réponse en fréquence : Courbe D
|H(e^(jwTs))|
Fréquence (Hz)

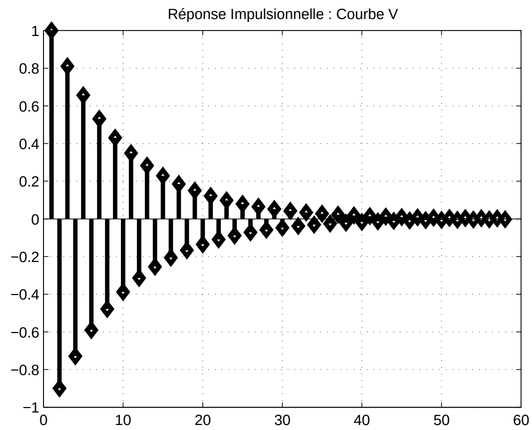

x 10^15
Module de la réponse en fréquence : Courbe E
X: 0.125
Y: 3.185e+15
|H(e^(jwTs))|
Fréquence (Hz)

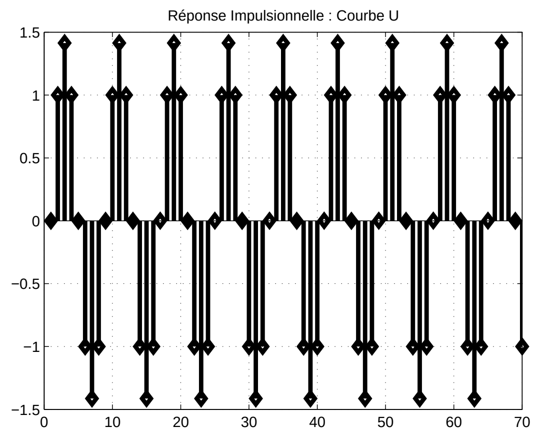

Module de la réponse en fréquence : Courbe F
X: 0.125
Y: 3.14e−16
|H(e^(jwTs))|
Fréquence (Hz)

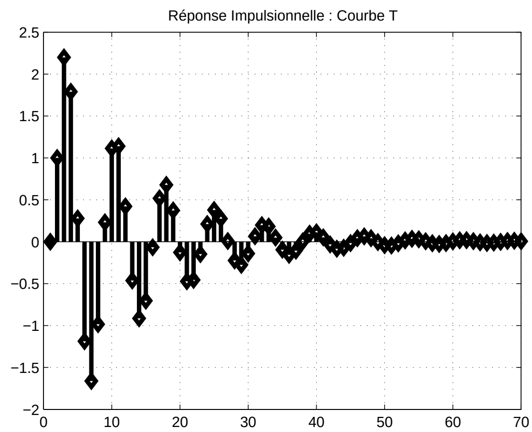

Réponse Impulsionnelle : Courbe Y


Réponse Impulsionnelle : Courbe X


Réponse Impulsionnelle : Courbe W


Réponse Impulsionnelle : Courbe V


Réponse Impulsionnelle : Courbe U


Réponse Impulsionnelle : Courbe T

Chapitre 4

TD 4 - Filtres IIR - Transpositions

4.1 Transformation bilinéaire

Un système continu est caractérisé par sa fonction de transfert :

$$G(p) = \frac{1}{p(p+a)} \tag{4.1}$$

Nous recherchons un système discret travaillant à la période d'échantillonnage T_s ayant un comportement voisin. Pour cela nous choisissons de calculer une fonction de transfert équivalente $H(z)$ grâce à la transformée bilinéaire.

1. Définir la transformation bilinéaire.
2. Calculer la fonction de transfert $H(z)$ transposée par cette méthode. La mettre sous forme pôles et zéros en exprimant les paramètres en fonction de aT_s. Faire l'application numérique pour a=0.05263 et $T_s = 2s$.
3. Quels sont le(s) pôle(s) obtenu(s). Comparer avec $e^{p_i T_s}$ le(s) transposé(s) du(des) pôles du système continu.

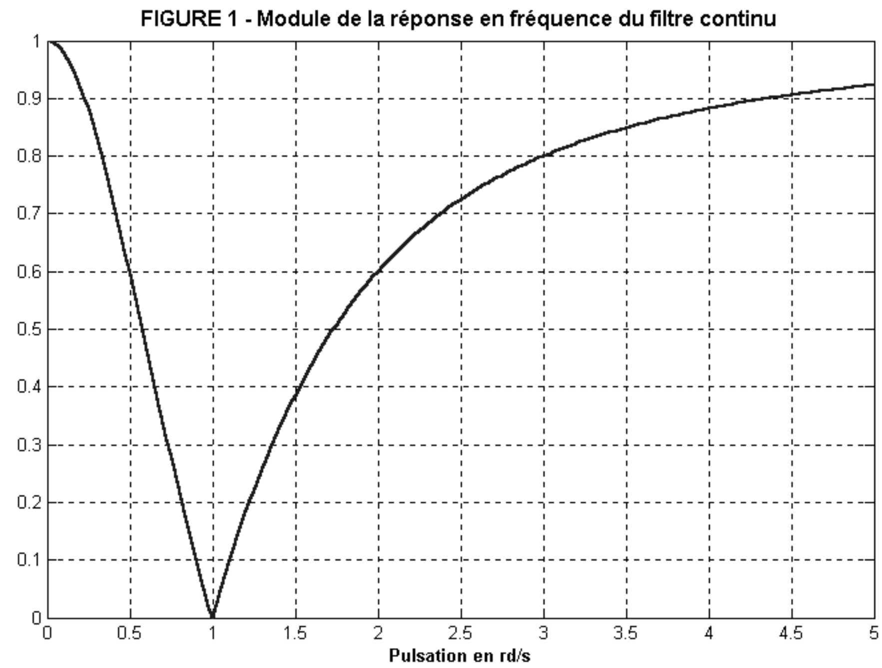
4.2 Filtre réjecteur

Un filtre continu réjecteur de bande a comme fonction de transfert :

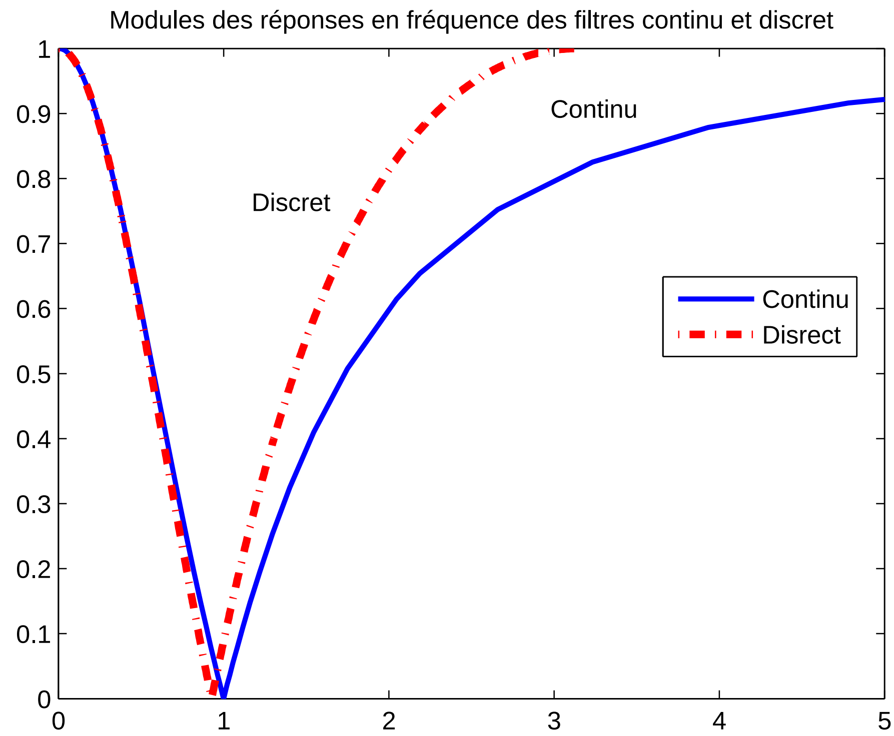
$$G(p) = \frac{p^2+1}{(p+1)^2} \tag{4.2}$$

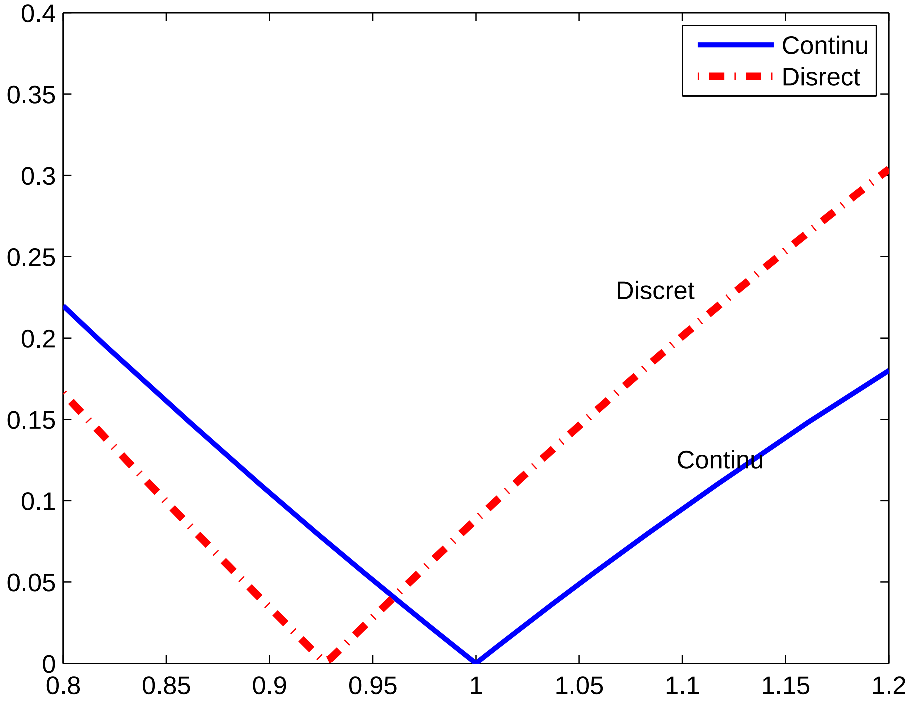
Le module de sa réponse en fréquence est indiqué sur la figure 1. Ce filtre travaille en fréquences basses et sa réalisation est délicate. Nous allons rechercher un filtre discret réalisant la même fonction grâce à une méthode de transposition.

1. La période d'échantillonnage du filtre discret est choisie $T_s = 1s$. Discuter ce choix.
2. transposition bilinéaire :
   (a) En quoi consiste cette méthode ?
   (b) Calculer la fonction de transfert discrète $H_1(z)$ du filtre discret. Quels sont ses pôles et ses zéros ? Quels sont les points singuliers responsables de l'effet recherché (effet réjecteur de bande). Les représenter dans le plan z. On calculera le module de la réponse en fréquence pour $\omega = 0$, $\omega = \omega_{max}$(maximum autorisé



par le théorème de Shannon) et $\omega = \omega_R$ (pulsation rejetée). Comparer aux caractéristiques du filtre continu. Comment s'interprètent ces résultats ?





(c) Le résultat n'est pas complètement satisfaisant. Effectuer les opérations nécessaires pour qu'il le devienne.

3. Nous aurions pu choisir une méthode réputée plus simple : la transformation par la méthode des rectangles dite "arrière".

(a) Quelle est la fonction de transfert $H_2(z)$ obtenue par cette méthode ?

(b) Quels sont ses pôles et ses zéros ?

(c) Calculer le module de la réponse en fréquence pour $\omega = \{0, \omega_{max}, \omega_{rejet}\}$. Comparer aux résultats précédents. Conclusions.

TP

Traitement Numérique du Signal

Digital Signal Processing

Chapitre 5

BE I : Échantillonnage de signaux et transformée de Fourier discrète (TFD)

5.1 But du Bureau d'Etude :

Mettre en pratique l'utilisation de la TFD dans les deux cas suivants :

1. Estimer la transformée de Fourier Discrète d'un signal
2. Réaliser l'analyse spectrale (mise en évidence de raies) de signaux inconnus : analyseur de spectre.

L'étude sera effectuée avec le logiciel :

`Matlab/Simulink©`

pour cela, quelques normes sont à respecter :

Utilisation d'un fichier `"script" :`

Les différentes étapes du travail seront réalisées par l'intermédiaire d'un fichier `"script" (.m file)`. Pour partir sur des bases saines, il est recommandé de commencer ce fichier par les instructions `clc` (clear command qui réinitialise la fenêtre de commande), clear (qui efface les variables stockées dans l'espace de travail) et `close all` (qui efface toutes les figures). Les figures éventuellement seront sauvegardées dans des fichiers.

```
clc
clear all
close all
```

Chargement des données :

Les données sont fournies dans des fichiers de données d'extension `.mat`, ces fichiers contiennent à la fois les mesures sous forme d'un tableau de valeurs $\{x_k\}$ et la fréquence d'échantillonnage utilisée notée F_s. Par exemple, pour le fichier de données `sig1_rect.mat` :

Le chargement est réalisé par la commande

load `sig1_rect`

Dans l'espace de travail (workspace) sont générées deux variables : F_s la fréquence d'échantillonnage du signal et x_k le tableau de points résultant de l'échantillonnage.

Visualisation graphique :

Comme nous travaillons en échantillonné, il sera préférable d'utiliser la commande stem plutôt que la commande plot. Comme sur toute commande de `Matlab`, une aide en ligne est disponible avec la commande help.

Elle est calculable avec la commande `fft`. Lorsque le nombre de points est une puissance de 2, alors l'algorithme de transformée de Fourier rapide est utilisé, autrement il s'agit d'un calcul classique des exponentielles avec sinus et cosinus et, pour le travail de ce BE, cela n'a aucune importance.

La lecture de l'aide en ligne de `Matlab` est fortement conseillée. Il est intéressant de compléter ces travaux par la réalisation personnelle d'un algorithme de `FFT` mais cela relève d'un enseignement d'informatique, algorithmique ou génie informatique.

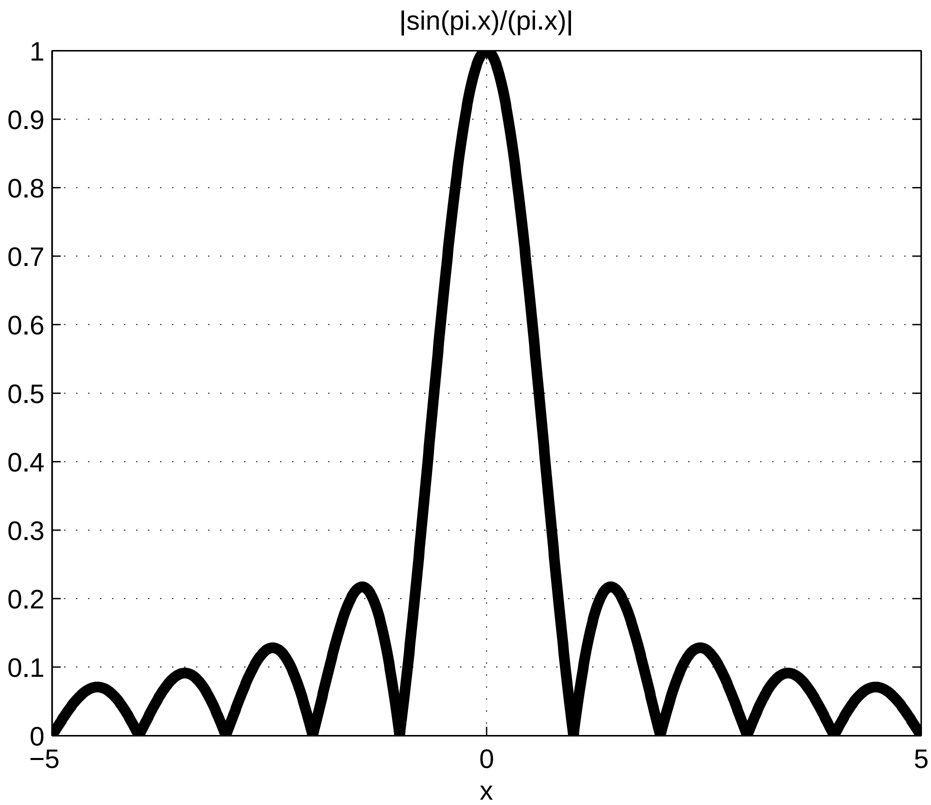
5.2 Travail préparatoire :

1. Rappeler la transformée de Fourier de $rect(t)$. En déduire celle de $rect\left(\frac{t}{\theta}\right)$

   `puis celle de`

   $$\boxed{x(t) = rect\left(\frac{t-t_0}{\theta}\right) \qquad (5.1)}$$

   On posera $TF[x(t)] = X(f)$.
2. Le signal $x(t)$ est échantillonné à la période T_s. Avec la courbe 1 ci-dessous calculer la relation entre T_s et θ pour que la condition de Shannon soit remplie à 10% puis à 5%.
3. L'échantillonnage de $x(t)$ dure un temps $T > \theta$ et fourni N échantillons : $T = N.T_s$. A partir des N échantillons $\{x_k\}$ nous calculons la transformée de Fourier discrète $\{X_n\}$. Combien d'échantillons comporte $\{X_n\}$? Quelle est la relation entre X_n et $X(f)$?



5.3 Travail à réaliser :

Etude du fichier :

1. Charger les données du signal `sig1_rect`, le représenter graphiquement en étalonnant correctement l'axe des abscisses. En déduire T, T_s et θ.

   La condition de Shannon a-t-elle été respectée ?
2. Calculer X_n la TFD de x_k.
3. Représenter graphiquement son module en étalonnant correctement l'axe des abscisses en fréquences. Nous pouvons nous contenter de la moitié des points : pourquoi ?
4. Comparer à la valeur théorique.

Interpolation de la TFD :

1. Nous ne disposons pas de suffisamment de points dans l'estimation de X(f). Pour cela nous allons procéder à la manipulation suivante :

   Constituer un nouveau signal x_{k1} à partir de x_k auquel on ajoute M.N zéros. (on utilisera M=10)
2. Calculer la TFD X_{n1} de ce nouveau signal.
3. La représenter sur la même figure que X_n (commande hold on).
4. Comparer les résultats et interpréter la manipulation effectuée.

Analyse spectrale d'un signal par la TFD :

Signal sinusoïdal : Le signal étudié est contenu dans le fichier `sig1_quidonc`.

Analyse spectrale élémentaire :

1. Charger les données du fichier . Représenter le signal en étalonnant correctement l'axe des abscisses. Quelles indications pouvez vous en retirer ?
2. Calculer la TFD X_n du signal x_k et représenter son module. Qu'en déduisez vous ?

Amélioration de la précision fréquentielle :

1. Compte tenu de l'étude précédente, construire un signal x_{k1} constitué du signal x_k auquel on concatènera M.N zéros (M=10).
2. Calculer X_{n1} la TFD de x_{k1}.
3. Représenter simultanément (commande hold on) les modules de X_n et X_{n1} en étalonnant correctement l'axe des abscisses (utiliser des couleurs différentes et commencer par représenter X_{n1} qui, ayant plus de points, risque de masquer X_n).
4. Pouvez-vous en déduire une forme analytique du signal étudié ?

Intérêt d'une fenêtre de pondération :

1. Créer le signal x_{kh} en pondérant x_k par une fenêtre de Hanning (commande Hanning)
2. Reprendre l'analyse précédente avec ce nouveau fichier soit : Avec la commande `fft`, calculer la TFD X_{nh} du signal x_{kh}.
3. Construire un signal x_{kh1} constitué du signal x_{kh} auquel on concatènera $M.N$ zéros.
4. Calculer X_{nh1} la TFD de x_{kh1}.
5. Sur une troisième figure, représenter simultanément les modules de X_{nh} et X_{nh1} en étalonnant correctement l'axe des abscisses
6. Pouvez-vous en déduire une forme analytique du signal étudié ?
7. Étudier la différence en plaçant une fenêtre de Hamming.

Signal inconnu :

1. Reprendre l'analyse précédente avec le signal dont les données sont contenues dans le fichier `sig2_quidonc`. Pouvez-vous fournir une expression analytique du signal ?
2. Influence de la période d'échantillonnage

   Le même signal est échantillonné à la fréquence $F_{s1} = \dfrac{F_s}{4}$ et ces données sont contenues dans le fichier de données `sig3_quidonc`.

   Quel est le résultat de l'analyse spectrale réalisée avec ces données ? Justifier les différences observées par rapport à l'analyse précédente.
3. Ce problème n'aurait jamais dû intervenir expérimentalement. Pourquoi ?

Chapitre 6

BE II : La Transformée de Fourier Discrète (DFT)

Objectif : Comprendre le principe de la Transformée de Fourier Discrète (DFT), connaître certaines de ses propriétés et comparer sa complexité avec des algorithmes rapides (`fft`).

6.1 Partie I : Algorithme de calcul de la TFD

Montrez que la transformée de Fourier Discrète sur N points, définie par :

$$\boxed{X(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x[n] e^{(-j\frac{2\pi nk}{N})} \qquad (6.1)}$$

peut s'écrire comme le produit d'une matrice W, de taille NxN, avec le vecteur colonne $x[n]$, où l'élément $W(n,k)$ de la matrice W est :

$$\boxed{W(k,n) = e^{(-j\frac{2\pi}{N})nk} \qquad (6.2)}$$

(k est le numéro de la ligne, qui vaut entre 0 et $N-1$, et n est le numéro de la colonne, qui vaut aussi entre 0 et $N-1$). Faites en particulier le cas $N=4$, et montrez que la matrice W est donnée par :

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -j & -1 & j \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & j & -1 & -j \end{pmatrix}$$

Dans `MATLAB`, calculez la transformée de Fourier de

$$x = [1 \quad 3 \quad -1 \quad 2]$$

(`Notation MATLAB`) en faisant le produit matriciel Wx^T (T dénote la transposition) puis en calculant la `fft` de x avec $fft(x)$.

Vous devriez obtenir le même résultat.

Pour obtenir la Transformée inverse (i.e. retrouver $x[n]$ à partir de $X(k)$), on applique l'équation de la transformée inverse :

$$x[n] = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} X(k)e^{(j\frac{2\pi}{N})nk} \qquad (6.3)$$

qui peut aussi s'écrire sous forme matricielle. Écrivez cette matrice inverse pour la cas $N = 4$, et appliquez-la à la transformée de Fourier du signal $x[n]$ plus haut - vous devriez retrouver le signal $x[n]$.

Comparez avec la fonction `ifft`.

6.2 Partie II : Charge de calcul des algorithmes de la TFD

On étudie dans cette dernière partie la complexité de la Transformée de Fourier. Pour l'évaluer avec `MATLAB`, on utilisera les fonctions suivantes {*tic, toc*} *ou* { *cputime*}.

1. Évaluez d'abord la complexité de la Transformée de Fourier discrète lorsqu'on applique directement la définition, i.e. lorsqu'on applique l'équation de représente le produit d'une matrice W NxN avec un vecteur colonne x. Évaluez cette complexité avec `MATLAB` pour `N=` 2^3`,` 2^5`,` 2^8`, et` 2^{11} (pour n'importe quel vecteur réel x : x=randn(1,N)). Que remarquez vous ?
2. Refaire maintenant ce calcul de complexité pour la fonction `fft`, pour les mêmes dimensions N ci-dessus.
3. Comparer et commenter. Pour avoir une meilleure idée de la diminution de complexité obtenue par la `fft`, tracez la complexité de la DFT (produit matriciel) et de la `fft` sur le même graphique, pour les valeurs de N ci-dessus.

6.3 Partie III : Génération d'un signal sinusoïdal

Il s'agit ici de générer une sinusoïde pure, de fréquence donnée, à partir de la Transformée de Fourier inverse. Notez d'abord qu'il faut 2 exponentielles complexes pour générer une sinusoïde (ici, un cosinus) :

$$cos[\theta n] = \frac{e^{j\theta n} + e^{-j\theta n}}{2}$$

Notez aussi que la fréquence des 2 exponentielles complexes requises est la même, mais de signe inverse θ et $-\theta$.

Notez que l'exponentielle complexe : $e^{(j\frac{2\pi}{N})n(N-k)}$.

est équivalente à l'exponentielle complexe : $e^{(-j\frac{2\pi}{N})nk}$.

On tire de tout ceci qu'en mettant deux termes non-nuls dans la transformée de Fourier discrète, le premier à k et le second (son complexe conjugué) à $N-k$, on obtient une sinusoïde discrète de pulsation normalisée :

$$\theta = \frac{2\pi}{N}k$$

Dans `MATLAB`, en prenant par exemple $N = 64$ et $k = 3$:

```
N = 64;
k = 3;
X = [zeros(1,k)   N/2   zeros(1,N-(2*k-1)-2)   N/2   zeros(1,k-1)];
x = real(ifft(X));
plot(x);
```

Le résultat est un cosinus pur qui fait exactement $k = 3$ cycles en $N = 64$ échantillons.

Étudiez bien le code MATLAB ci-dessus, notamment la ligne qui génère les coefficients $X(k)$ (troisième ligne), puis réalisez ce qui suit.

En définissant d'abord les coefficients de Fourier $X(k)$ appropriés tel que montré dans le code MATLAB ci-dessus, générez par transformée inverse (ifft) les signaux $x[n]$ suivants :

1. un cosinus pur de durée 1 seconde, de fréquence 500 Hz et d'amplitude 1, pour un système échantillonné à 8000 échantillons/seconde (vous devez donc convertir la durée en nombre d'échantillons, et la fréquence (500 Hz) en une valeur k qui détermine la position des raies non-nulles dans le spectre).
2. un sinus pur de durée 0.5 seconde, de fréquence 800 Hz et d'amplitude 1, pour un système échantillonné à 8000 échantillons/seconde.

6.4 Partie IV : FFT et Fenêtrage

6.4.1 Exemple de FFT et Fenêtrage

On souhaite échantillonner le signal suivant : $x(t) = cos(2\pi 10t)$, avec $t = nTe$ et $F_s = 1/T_s = 1000Hz$, pour obtenir le signal discret $x[n]$.

Le nombre d'échantillons est supposé egale à 2048.

1. Tracer, avec la fonction "stem", le module du spectre de $x[n]$, en étalonant correctement l'échelle fréquentielle.
2. Tracer, cette fois-ci, le module du spectre de $x[n]$ en appliquant à ce dernier une fenêtre de "Hamming". Que constatez vous ?
3. Refaire les deux précédentes questions sur un signal de 204800 échantillons. Commenter le résultat.

6.4.2 Fenêtrage : "wintool"

Taper dans la fenêtre de commande l'instructio nsuivante : **wintool**. Vous obtenez une interface GUI et par défaut la présentation d'une fenêtre de "Hamming" de largeur 64 éhantillons.

1. Examiner le lobe principal et les lobes secondaires des fenêtres suivantes : "Rectangular", "Hamming", "Hann". Etudier la largeur du lobe principal, ainsi que le rapport entre les amplitudes du lobe principal et le premier lobe secondaire.
2. Maintenant, étudier la fenêtre "Kaiser". Vous aurez besoin du paramètre "Beta", faites le varier entre "0.01" à "100", que cosntatez vous ?

6.4.3 Analyse d'un signal d'ECG

On souhaote alanlyser deux signaux d'ECG : ""ECGa.mat" et "ECGb.mat".

L'objectif est de déterminer la période des "pics" contenus dans ces deux signaux. La fréquence de ces battements correspond à la fréquence "fondamentale". Nous allons essayer de déterminer cette fréquence temporellement et fréquentiellement.

1. Charger le fichier "ECGa.mat". Nous allons analyser, uniquement, 2048 échantillons de ce signal.
2. Tracer le signal discret $x[n]$ en étalonant correctement l'échelle des temps. Déterminer la période des "pics"
3. Déterminer, cette fois-ci, cette fréquence en traçant le spectre de $x[n]$. Etaloner correctement l'échelle fréquentielle.

   Avez vous obtenu la même valeur que la question 1).

4. Limiter le nonmbre de points à 1000, et tracer le module du spectre de $x[n]$ en fonction du numéro d'échantillons.

   Comment, à partir de l'échantillon k correspondant à un pic, Avez vous trouvé la fréquence cardiaque ? Commentaires.

   (a) Appliquer une fenêtre de Hamming sur le signal tronqué à 1000 échantillons, est ce que cela à améliorer l'analyse spectrale ?

   (b) Faites du "Zero Padding" pour arriver à 2048 points et refaire une analyse spectrale. Y'a t-il eu des amilorations ? Pourquoi ?

5. Refaire la même analyse pour le signal "ECGb.mat".

Chapitre 7

BE III : Filtres discrets et équation de récurrence

7.1 But du bureau d'études

Au niveau de la programmation, un filtre numérique est une simple équation récurrente.

En utilisant l'environnement de `Matlab` pour la réalisation de programmes d'étude et celui de `Simulink` avec la carte son `E/S` pour les manipulations, nous allons vérifier les propriétés et le fonctionnement de quelques filtres élémentaires.

7.2 Travail préparatoire

7.2.1 Filtres étudiés :

Nous allons nous intéresser à 4 types de filtres :

1. **Le dérivateur numérique :**

$$\boxed{H(z) = \frac{1 - z^{-1}}{T_s} \qquad (7.1)}$$

2. **Filtre intégrateur :**

$$\boxed{p \to \frac{T_s}{1 - z^{-1}} \qquad (7.2)}$$

3. **Moyenne mobile :**

   C'est un filtre numérique qui réalise la moyenne pondérée des k dernières mesures effectuées (filtre MA pour Mobile Average). Sa fonction de transfert échantillonnée est :

$$\boxed{H(z) = 1/k.\left[1 + z^{-1} + z^{-2} + ... + z^{-(k-1)}\right] \qquad (7.3)}$$

   La moyenne mobile étudiée sera prise avec 5 points (k = 5).

   Application sur des données du CAC 40 :

   Afin d'illustrer la moyenne mobile sur des données réelles du CAC 40, lancer le programme $Filtrage\_CAC\_Moyenne$

N_m représente l'ordre de ce filtre. Augmenter cet ordre ($N_m = 100$), que constatez vous ?
Les fichiers $Filtrage\_CAC\_Moyenne\_Mobile.m$ et $table\_cac40.xls$ sont à récupérer sur Moodle (TNS).

4. **Filtre notch élémentaire :**
   Il a pour fonction de supprimer une pulsation particulière ω_0. Il comprend deux pôles complexes conjugués et deux zéros associés :

$$\begin{aligned} &\text{Zéros} \quad \rightarrow \quad e^{\pm j\omega_0 T_s} \\ &\text{Pôles} \quad \rightarrow \quad re^{\pm j\omega_0 T_s} \quad avec \quad r < 1 \end{aligned} \tag{7.4}$$

   ce qui donne la fonction de transfert :

$$\boxed{H(z) = \frac{1 - 2cos(\omega_0 T_s).z^{-1} + z^{-2}}{1 - 2.r.cos(\omega_0 T_s).z^{-1} + r^2.z^{-2}} \qquad (7.5)}$$

Dans la manipulation on choisira $f_0 \approx 600Hz$ et la manipulation sera faite pour deux valeurs de r : $r = 0.9$ et $r = 0.7$.

7.2.2 Travail préparatoire :

Pour tous les filtres étudiés faire :

1. La représentation des pôles et zéros
2. L'étude fréquentielle sommaire
3. L'écriture de l'équation récurrente qui permettra d'implanter le filtre

7.3 Etude avec `Matlab`

Une première étude de ces filtres sera réalisée avec un fichier `"script" de Matlab (.m file)` déjà utilisé lors du BE I (Voir le texte correspondant pour les précautions élémentaires). Ce fichier sera effectuer selon l'ossature suivante :

7.3.1 Vérification du travail préparatoire :

1. Définir une fonction de transfert associée au filtre (tf)
2. Effectuer la représentation des pôles et zéros (pzmap) et du module de la réponse fréquentielle (freqz) :
   `[Rf,fr]=freqz(Num,Den,1024,Fs); plot(fr,abs(Rf))`

7.3.2 Fonctionnement de l'équation récurrente :

Compléter le fichier par :

1. Charger un fichier de données : voir le tableau ci-dessous.
2. Filtrer ces données grâce à l'équation récurrente (boucle for) et comparer le résultat à celui fourni par l'instruction `filter` de `Matlab`

Dérivateur	Intégrateur	Moyenne mobile	Filtre notch
Sinus600.mat	Sinus600.mat	Sinus600.mat	Sinus300.mat
Sinus1800.mat	Sinus1800.mat	Sinus1800.mat	Sinus600.mat
Carre600.mat	Carre600.mat	Carre600.mat	Sinus1800.mat
Scie600.mat	Scie600.mat	Scie600.mat	

7.4 Etude avec `Simulink`

Bien imprégnés du secret des fonctions élémentaires de `Matlab`, le travail peut être repris avec une interface utilisateur graphique : `Simulink`. La partie matérielle d'acquisition des signaux peut être faite avec le DSP de la carte son de l'ordinateur ce qui évite, dans cette phase de découverte, la mise en oeuvre de moyens techniques plus dédiés mais plus lourds comme les cartes E/S, DSP, processeurs,... utilisés usuellement pour ce type d'applications.

Lecture d'un signal : Signal provenant d'un fichier enregistré

Nous utiliserons de préférence les blocs présents dans la bibliothèque `DSP System Toolbox`.

Ces fichiers sont à la norme `.wav` c'est à dire qu'ils respectent l'amplitude pour les données et contiennent la fréquence d'échantillonnage à laquelle ils ont été créés.

1. Réaliser le schéma ci-dessous.

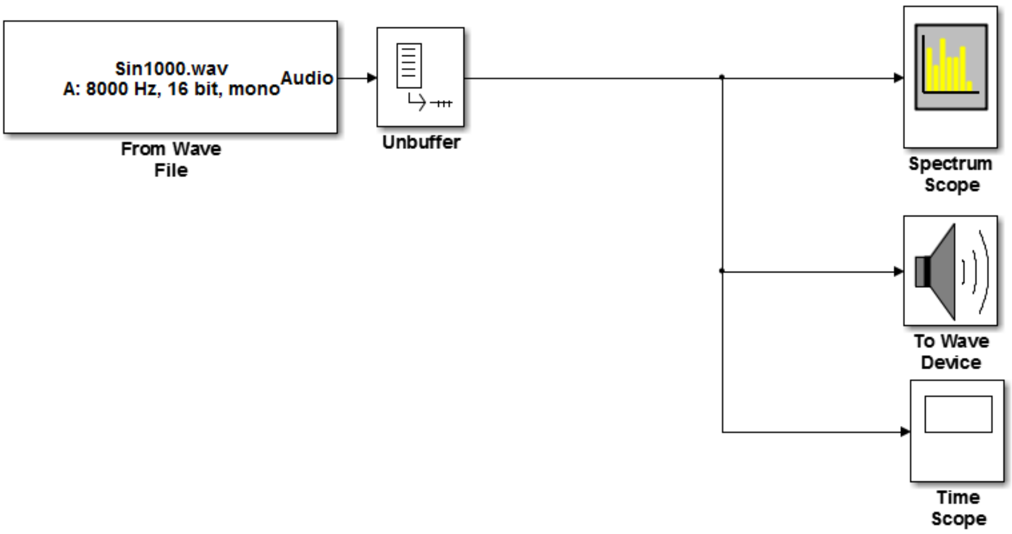


Figure 7.1 – Lecture et analyse du son : sin1000.wav

2. Visualiser le signal qui doit être à priori une sinusoïde de fréquence 1000Hz : figure 7.1
3. Filtrer ce signal avec le filtre dérivateur décrit ci-dessus. Commentaire L'équation récurrente s'implante sous `Simulink` avec le bloc : figure 7.2 `DSP System Toolbox > Filtering > Filter Designs > Filter Implementations > Discrete Filter`
4. Filtrer ce signal avec le filtre intégrateur. Commentaire ?
5. Créer un nouveau modèle Simulink en additionnant deux signaux de 1000Hz et 600Hz : figure 7.3
6. Appliquer le filtre Notch décrit précédemment pour supprimer la deuxième composante de ce mélange :

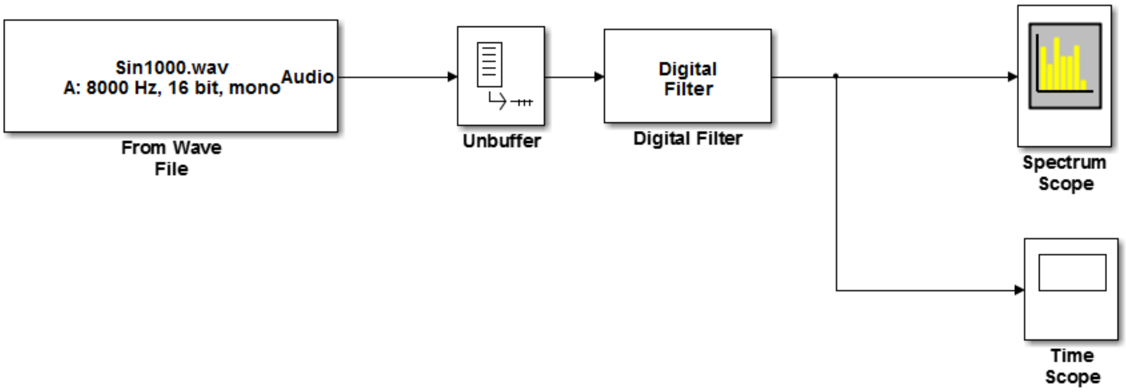


FIGURE 7.2 – Filtrage du son (sin1000.wav) : Dérivateur

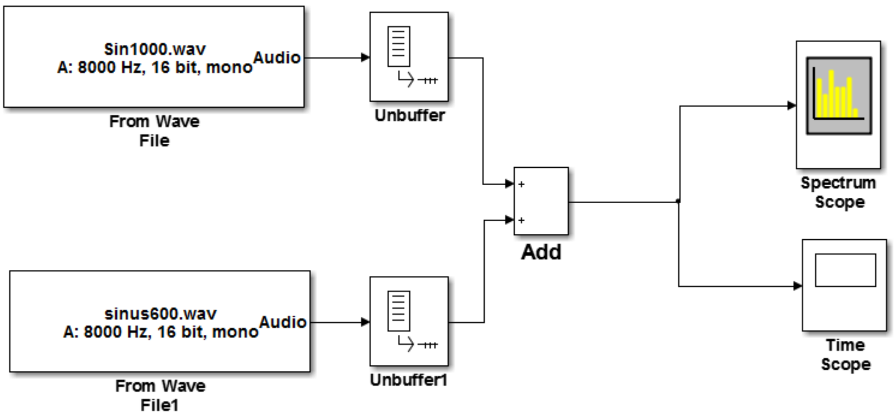


FIGURE 7.3 – Mélange des deux sons : sin1000.wav et sinus600.wav

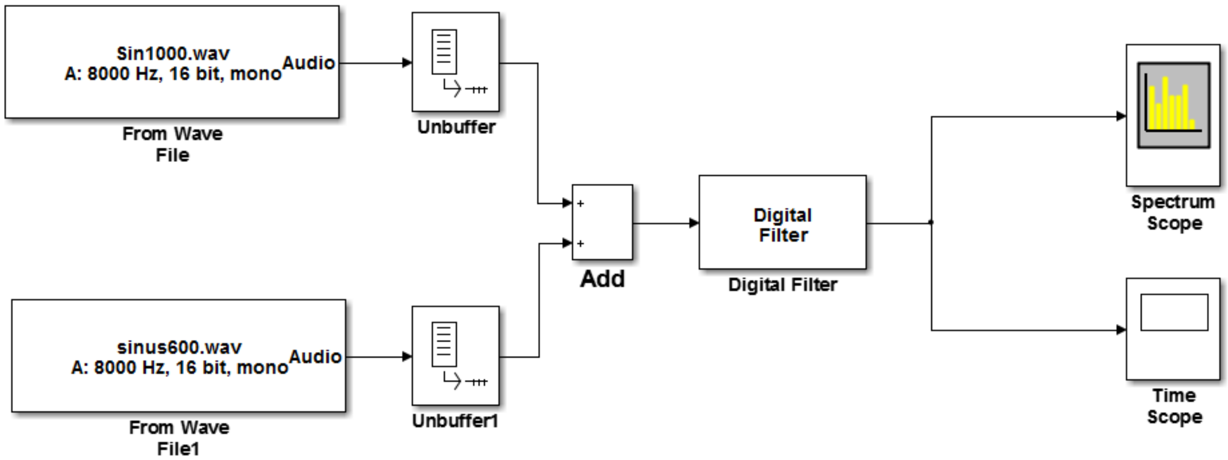


FIGURE 7.4 – Suppression de la composante de 600 Hz par un filtre Notch

Chapitre 8

BE IV : Mise en oeuvre d'un filtrage numérique Pour supprimer le parasite d'un signal sonore

8.1 But de la manipulation

Nous disposons d'un signal musical sur lequel est présent un parasite (sifflement). Le but est de débarrasser ce signal du parasite en procédant de la manière suivante :

1. Identifier la ou les fréquences du parasite en utilisant une `FFT` à fenêtre glissante.
2. Concevoir un filtre dont la réponse en fréquence supprime le parasite en altérant le moins possible le signal musical.
3. Vérifier son fonctionnement avec `Simulink`.

8.2 Analyse du signal

La première étape consiste à analyser le signal pour déterminer la ou les fréquences parasites. L'analyse fréquentielle se fait l'analyseur de `FFT` de `Simulink` qui permet une analyse dynamique par fenêtre glissante puisque le signal varie dans le temps.

8.2.1 Matériel utilisé :

Nous utiliserons `Matlab` mais pour intégrer l'étude temporelle il nous est nécessaire d'utiliser sa `"toolbox" Simulink`. Ce logiciel comporte une boîte à outils `DSP System Toolbox` ($\equiv$ Traitement numérique du signal) qui fournit les blocs de traitement de signal pour des applications orientées vers l'utilisation de processeurs spécialisés.

Dans cette bibliothèque deux éléments sont particulièrement intéressants pour notre application :

1. `Spectrum Analyzer` : analyseur de spectre en temps réel.
2. `From Multimedia File` : lecture en temps réel d'un fichier son au format `.wav`
   D'autres éléments peuvent être intéressants :
3. `Vector Scope` : représentation des signaux temporels.
4. `Audio Device Writer` : envoi du signal sur les hauts parleurs

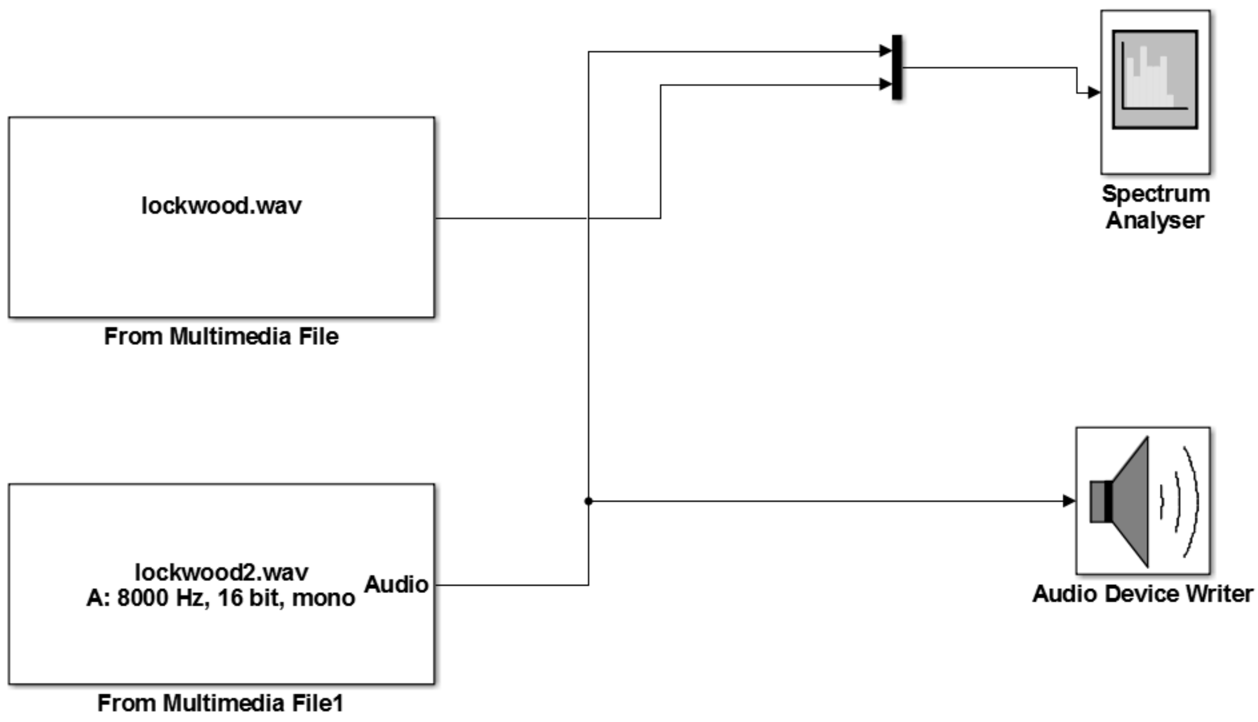


FIGURE 8.1 – Analyse.mdl

8.2.2 Travail à réaliser :

Avec `Simulink`, réaliser l'application `Analyse.mdl` qui en utilise les trois blocs : `From Multimedia File (source)`, `Spectrum Analyzer (Analyse Spectrale)` et `Audio Device Writer (audition du fichier)`.

Paramétrage du bloc `From Multimedia File` :

— Nom du fichier `.wav` utilisé

— Les données sont fournies par "frame" ou par paquets. Ici une "frame" de 256 échantillons.

— La lecture du fichier se fait par paquets, il est élégant de placer ici le même nombre d'échantillons que dans la "frame"

— Type de données manipulées, ici obligatoirement type double

Paramétrage du bloc `Spectrum Analyzer` :

Il y a quatre onglets :

— Propriétés du `Scope`, essentiel au bon fonctionnement de l'analyse

— Propriétés de l'affichage : la présentation du résultat

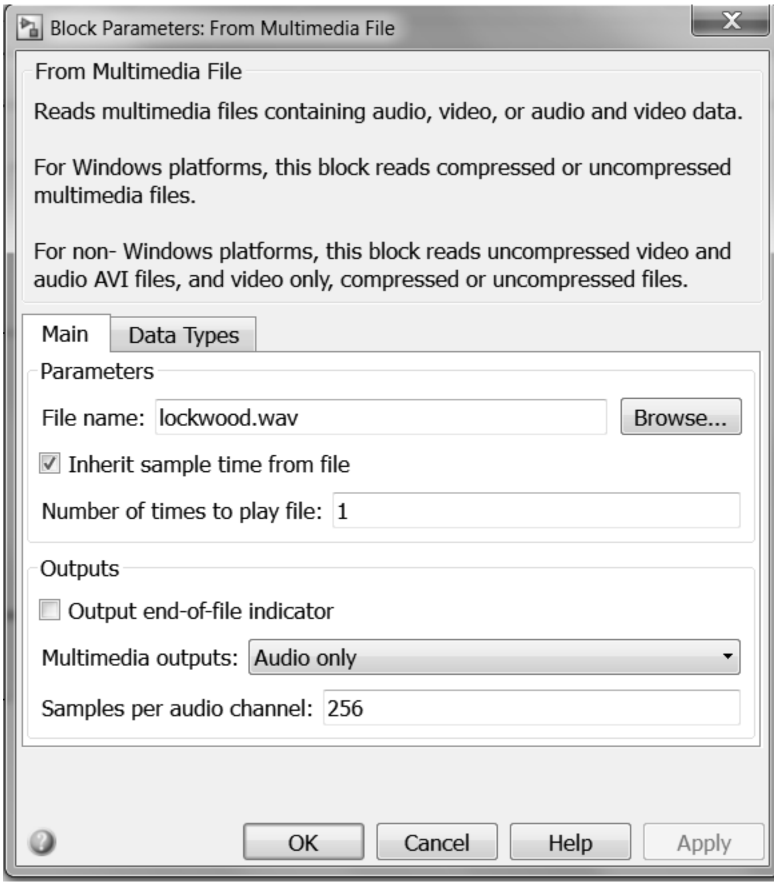
— Propriétés des axes : choix des échelles

— Propriétés des lignes : style (pointillé, continu ...), couleur ....

Pour ce TP :

On utilisera le fichier le fichier `Lockwood2.wav` qui contient de la musique bruitée échantillonnée à 8 kHz. Choisir et justifier la longueur de `FFT` ainsi que le nombre de moyennes spectrales `(Spectrum Scope)`. Choisir les paramètres d'affichage et des axes. En réalité, ceux-ci seront choisis en faisant quelques essais de simulation pour obtenir un affichage confortable. Pour les lignes on peut laisser l'affichage par défaut (continu, noir).

Les paramètres de la simulation sont choisis de manière standard avec un temps de simulation d'environ 60s (ce qui correspond à peu près à la longueur de l'enregistrement) ou l'infini mais dans ce cas il faudra penser à l'arrêter manuellement. Pour éviter les pertes de temps, puisque nous ne traitons que des signaux discrets, le solveur d'équations peut être paramétré à pas fixe et avec uniquement des états discrets.



Dans le même souci, il est préférable de supprimer toutes les sauvegardes de données dans l'espace de travail Data Import/Export.

Effectuer des essais de simulation et affiner les réglages : affichage, axes, choix de la longueur de `FFT`,...

Résultats :

En choisissant un affichage non persistant (temps réel) et écoutant le signal, repérer le spectre de la perturbation.

Refaire la manipulation avec un affichage persistant (les courbes successives sont mémorisées sur l'écran). Vérifier que la perturbation est distincte du signal et déterminer la bande de fréquence qui la concerne.

8.3 Conception du filtre

Le filtre à concevoir est un filtre passe-bas qui doit supprimer les fréquences de la perturbation. Pour cela, `Matlab` fournit un grand nombre d'outils performants mais, pour illustrer la démarche, nous allons concevoir "à la main" notre propre filtre tout en utilisant les outils d'analyse de `Matlab`.

Les différents calculs de mise au point seront menés en utilisant un ficher script de `Matlab` : un fichier `Passe_Bas.m` à créer de toutes pièces.

8.3.1 Filtrage avec un filtre RII de Butterworth :

Dans les années 1930 Butterworth propose des fonctions approximantes du type :

$$T(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^{2n}}}, \quad \text{avec} \quad x = \frac{\omega}{\omega_c}$$

où ω_c est la pulsation de coupure.

Ordre du filtre :

La première question qui se pose est : quel est l'ordre du filtre qui correspond à notre problème ? La réponse peut être trouvée par essais successifs de filtres de plus en plus complexes cependant, une réponse peut être trouvée de manière systématique programmée dans la commande `Matlab buttord`.

[N, Wn] = buttord(Wp, Ws, Rp, Rs)

L'aide en ligne nous indique que cette commande retourne :

— N : le nombre minimal d'échantillons du filtre
— W_n : la fréquence de coupure à 3dB du filtre
— Pour les charges suivantes :
— Une atténuation de R_p (en dB) pour la fréquence W_p en bande passante
— Une atténuation de R_s (en dB) pour la fréquence Ws en bande coupée

Toutes les fréquences sont normalisées par la demi fréquence d'échantillonnage ($F_s/2$).

Sur la manipulation précédente, déterminer la fréquence W_p pour laquelle nous souhaitons une atténuation inférieure à 10% et la fréquence Ws pour laquelle l'atténuation sera supérieure à 90%. En déduire l'ordre et la fréquence de coupure à $3dB$ du filtre.

Calcul des coefficients du filtre :

Ceux-ci peuvent être directement calculés par la commande :

[B,A] = butter(N,Wn)

où B et A contiennent respectivement les coefficients du numérateur et du dénominateur du filtre de Butterworth d'ordre N (N+1 coefficients) et de fréquence de coupure normalisée W_n.

Vérification :

A l'aide de la commande **`freqz`** `: [Rf,fr]=freqz(Num,Den,1024,Fs); plot(fr,abs(Rf))`, calculer la réponse en fréquence du filtre et représenter son module sur une figure.

Modifier le fichier `Simulink analyse.mdl` en y incluant le bloc de filtrage : `Signal Processings>Filter Designs>Digital Filter` pour obtenir un fichier `Filtrage.mdl` et vérifier que le filtrage se réalise correctement.

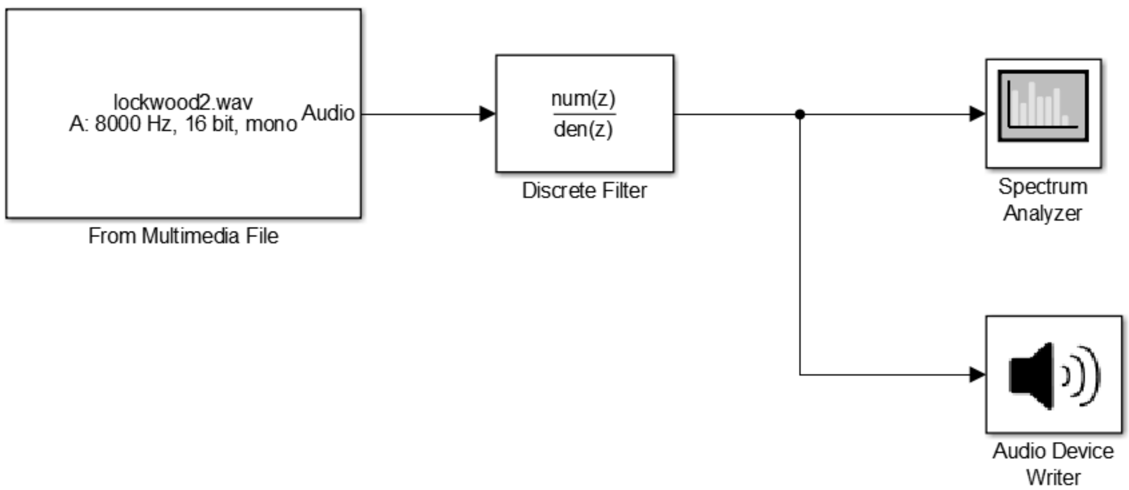


FIGURE 8.2 – Filtrage.mdl

- Pour une étude temporelle et fréquentielle : lancer dans la fenètre de commande >> l'instruction "**fdatool**" : `fdatool : Filter Design & Analysis Tool` et ensuite explorer les différentes possibilités qu'offrent "**fdatool**".

8.3.2 Filtrage avec un filtre RII de Chebyshev :

Chebyshev propose une autre fonction approximante du type :

$$T(x) = \frac{1}{\sqrt{1+\varepsilon^2 T_n^2(x)}}, \quad \text{avec} \quad x = \frac{\omega}{\omega_p}$$

$T_0(x) = 1$; $T_0(x) = x$; $T_n(x) = 2xT_{n-1}(x) - T_{n-2}(x)$

Ces filtres présentent une "oscillation" d'amplitude $\delta_1 = \varepsilon$ en bande passante et la courbe est monotone dans la bande coupée.

La même manipulation est reprise avec une réalisation de Chebyshev

Ordre du filtre :

Une réponse peut être trouvée de manière systématique programmée dans la commande `Matlab cheb1ord` :

[N, Wn] = cheb1ord(Wp, Ws, Rp, Rs)

L'aide en ligne nous indique que cette commande retourne :

- N : le nombre minimal d'échantillons du filtre
- W_n : la fréquence de coupure à $3dB$ du filtre
- Pour les charges suivantes :
- Une atténuation de R_p (en dB) pour la fréquence W_p en bande passante
- Une atténuation de R_s (en dB) pour la fréquence W_s en bande coupée

Toutes les fréquences sont normalisées par la demi fréquence d'échantillonnage (Fs/2).

Sur la manipulation précédente, déterminer la fréquence W_p pour laquelle nous souhaitons une atténuation inférieure à 10% et la fréquence W_s pour laquelle l'atténuation sera supérieure à 90%. En déduire l'ordre et la fréquence de coupure à $3dB$ du filtre.

Calcul des coefficients du filtre :

Calculés par la commande :

[B,A] = cheby1(N,R,Wn)

où B et A contiennent respectivement les coefficients du numérateur et du dénominateur du filtre de Butterworth d'ordre N (N+1 coefficients) et de fréquence de coupure normalisée Wn. Par rapport au filtre de Butterworth apparaît le paramètre R qui est le taux d'ondulation maximal de la réponse en fréquence en bande passante. Une valeur de l'ordre de 2% est jugée acceptable.

Vérification :

A l'aide de la commande `freqz : [Rf,fr]=freqz(Num,Den,1024,Fs); plot(fr,abs(Rf))`, calculer la réponse en fréquence du filtre et superposer son module sur la figure précédente.

Vérifier que le filtrage réalise correctement avec le fichier `Filtrage.mdl` précédemment créé. Comparer l'ordre des filtres de Butterworth et de Chebyshev permettant d'obtenir des actions similaires.

- Pour une étude temporelle et fréquentielle : lancer dans la fenètre de commande >> l'instruction "**fdatool**" : `fdatool : Filter Design & Analysis Tool` et ensuite explorer les différentes possibilités qu'offrent "**fdatool**".

8.3.3 Filtrage avec un filtre RIF :

Le même problème est repris en utilisant un filtre à réponse impulsionnelle finie

Nous pouvons concevoir un filtre RIF par la commande :

B = fir1(N,Wn)

Où B contient les coefficients de la séquence de pondération du filtre d'ordre N et de fréquence de coupure à $3dB$ normalisée W_n.

En superposant sur la même figure la réponse de ce filtre à celle des filtres RII précédents, déterminer par essais successifs les paramètres N et W_n qui donnent une réponse à peu près équivalente.

Implanter le filtre et vérifier son fonctionnement. Comparer son ordre à ceux des filtre précédents.

- Pour une étude temporelle et fréquentielle : lancer dans la fenètre de commande >> l'instruction "**fdatool**" : `fdatool : Filter Design & Analysis Tool` et ensuite explorer les différentes possibilités qu'offrent "**fdatool**".

8.4 Autres types de filtrage :

8.4.1 Filtre "coupe-bande" :

Le filtre IIR de Butterworth synthétisé précédement est un filtre de type "Passe-bas". Dans cette partie, on propose de synthétiser un filtre de Butterworth de type coupe-bande et ensuite on l'applique sur le signal parasité.

8.4.2 Filtre Notch :

Appliquer trois filtres Notch pour supprimer complétement les trois fréquences correspondant à ces sifflements.

8.5 Utilisation de fdatool

fdatool : Filter Design & Analysis Tool

On peut concevoir un filtre "manuellement" pour éliminer les sifflements.

1. Lancer l'instruction "**fdatool**" et effectuer les réglages nécessaires pour éliminer ces sifflements : choix du type de filtre, Fpass, Apass, Fstop, Astop, etc ...
2. Faites une étude complète de ce filtre : réponse impulsionnelle, réponse indicielle, Pôles/Zéros, Réponse en fréquence etc ...
3. Récupérer les coefficients de ce filtre et appliquer les sur les données avec sifflement.

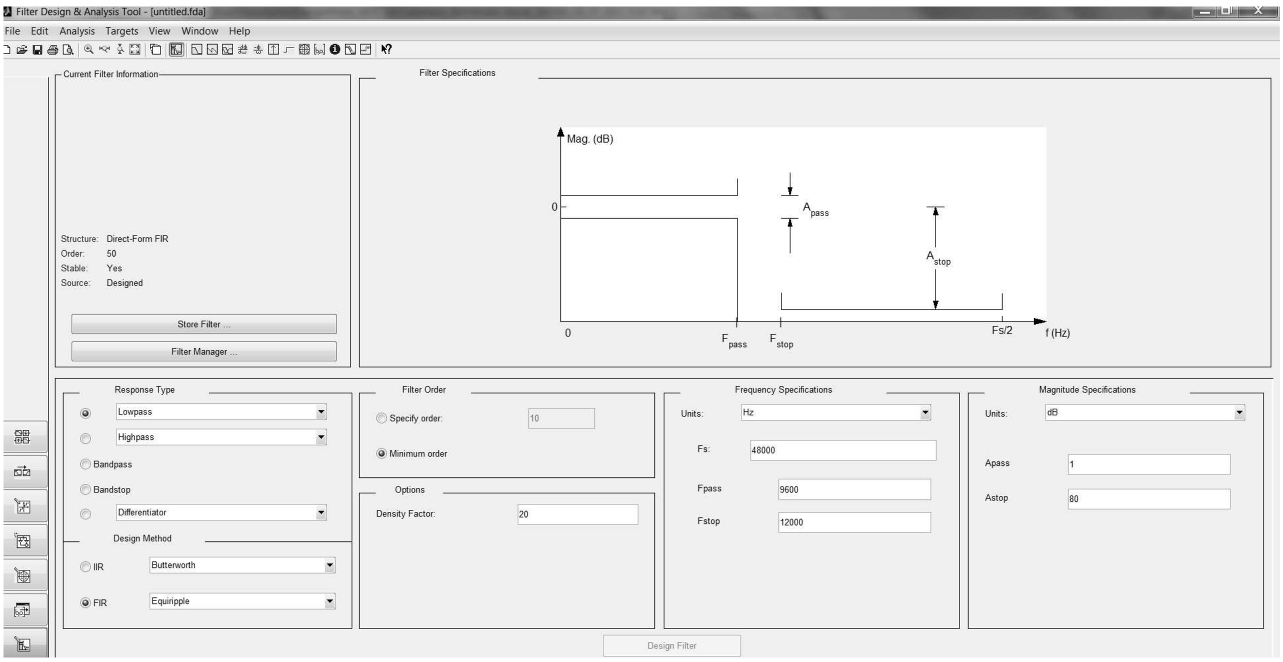


FIGURE 8.3 – Filter Design & Analysis Tool

Chapitre 9

BE V : Débruitage d'un électrocardiogramme (ECG) par filtrage

9.1 Analyse d'un enregistrement d'un ECG

A l'aide de la commande Matlab **load** charger le fichier des données suivant : `load ECG_data.mat`.

Ce fichier contient la variable "datas" qui correspond à un enregistrement de 20 secondes d'un électrocardiogramme (ECG). Malheureusement, ce signal a été perturbé par un bruit haute fréquence.

L'objectif de ce TP est de filtrer ce signal afin d'isoler le signal utile. Notons que le tracé temporel (ou l'aspect visuel) étant important dans ce type de signal biomédical, on s'assurera à choisir le filtre de façon à préserver la forme du signal.

La première partie d'analyse de ce signal ECG consiste à :

1. Spécifier la fréquence d'échantillonnage de ce signal.
2. Afficher son spectre.
3. Noter les caractéristiques du filtre choisi. Quel raisonnement a été suivi pour arriver à ces caractéristiques ?
4. Filtrer le signal ECG bruité
5. Donner la valeur de l'amplitude A_0 de la composante fondamentale, f_0, ($A_0 cos(2\pi f_0 t)$) de ce signal filtré.

9.2 Filtrage du bruit :

La figure, Fig. 9.1, représente l'affichage de la réponse impulsionnelle d'un filtre.

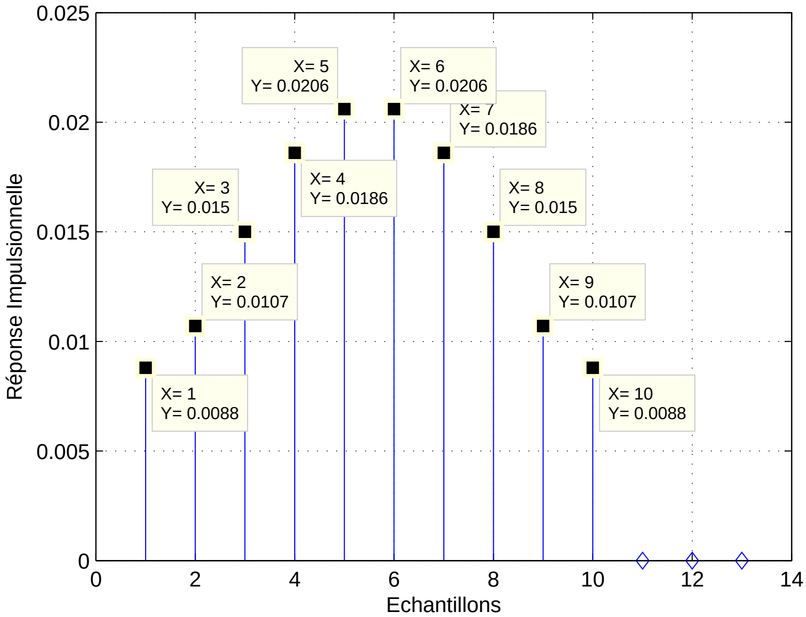


FIGURE 9.1 – Réponse Impulsionnelle

1. A partir de cette réponse impulsionnelle, donner l'expression de la fonction de transfert de ce filtre ? On prend une fréquence d'échantillonnage : $F_e = 200Hz$.
2. Afficher les pôles et les zéros de cette fonction de transfert.
3. En déduire l'allure de la réponse en fréquence de ce filtre. Justifier votre réponse.
4. Vérifier que vos prédictions sont correctes.
5. Ajuster le gain du filtre afin qu'il ne modifie pas le signal continu.
6. Donner les caractéristiques de ce filtre (type, bande passante à $3dB$, bande coupée).
7. Est-ce que ce filtre conviendrait pour analyser un signal ECG bruité par des hautes fréquences qui a été échantillonné, cette fois-ci, à 1000Hz et dont la gamme de fréquences utiles s'étendrait jusqu'à $50Hz$?

Annexe A

Liste des commandes les plus fréquemment utilisées

Voici une courte liste des instructions utiles pour le cours, accompagnées d'une brève description. Pour savoir comment utiliser ces fonctions, se référer à l'aide de MATLAB, par exemple en tapant : help (nom de la commande).

A.1 Commandes générales

`clear`: Efface les variables gardées en mémoire

`save`: Enregistre les variables pour utilisation future

`who`: Affiche le nom des variables

`whos`: Affiche le nom, le type et les dimensions des variables

`load`: Permet de lire des variables préalablement enregistrées

A.2 Fonctions mathématiques

`sin`: Évalue le sinus

`sinh`: Évalue le sinus hyperbolique

`exp`: Évalue l'exponentielle

`log`: Évalue le logarithme naturel

`log10`: Évalue le logarithme en base 10

`sqrt`: Évalue la racine carrée

`mod`: Retourne le modulo

A.3 Matrices particulières

`eye`: Crée une matrice identité

`ones`: Crée une matrice dont tous les éléments valent 1 `zeros`: Crée une matrice dont tous les éléments valent 0

`rand`: Crée une matrice dont les éléments sont générés de manière aléatoire

logspace : Génère un vecteur dont les éléments suivent une progression logarithmique Manipulations de matrices

`'`: Effectue la transposée conjuguée

`.'`: Effectue la transposée (non conjuguée)

`det`: Évalue le déterminant d'une matrice carrée

`inv`: Évalue l'inverse d'une matrice carrée

`size`: Affiche les dimensions d'une matrice

`length`: Donne la longueur d'un vecteur

A.4 Manipulation de nombres

`lcm`: Détermine le plus petit commun multiple

`gcd`: Détermine le plus grand commun diviseur

`fix`: Arrondit en conservant uniquement la partie entière

`ceil`: Arrondit vers le plus gros entier suivant

A.5 Manipulations de nombres complexes

`real`: Retourne la partie réelle d'un nombre complexe

`imag`: Retourne la partie imaginaire d'un nombre complexe

`abs`: Évalue le module d'un nombre complexe

`angle`: Évalue la phase d'un nombre complexe

`conj`: Génère le conjugué d'un nombre complexe

A.6 Transformées

`fourier`: Évalue la transformée de Fourier

`ifourier`: Évalue la transformée inverse de Fourier

`fft`: Évalue la transformée discrète de Fourier

`ifft`: Évalue la transformée discrète inverse de Fourier

`laplace`: Évalue la transformée de Laplace

`ilaplace`: Évalue la transformée inverse de Laplace

`ztrans`: Évalue la transformée en z

`iztrans`: Évalue la transformée inverse en z

`fftshift`: Inverse les deux moitiés de courbes obtenues suite au calcul de la fft

A.7 Convolution et corrélation :

`conv`: Réalise la convolution de deux signaux

`conv2`: Réalise la convolution en deux dimensions de deux signaux

`xcorr`: Réalise l'inter-corrélation de deux signaux, ou l'auto-corrélation d'un seul signal

`xcorr2`: Réalise la corrélation en deux dimensions de deux signaux

A.8 Filtres

`filter`: Filtre les données qui lui sont fournies selon le type de filtre qui a été décrit

`freqz`: Retourne la réponse en fréquence complexe d'un filtre numérique

`freqs`: Retourne la réponse en fréquence complexe d'un filtre analogique

`invfreqs`: Retourne les coefficients du numérateur et du dénominateur de la fonction de transfert du filtre analogique ayant la réponse en fréquence voulue

`invfreqz`: Retourne les coefficients du numérateur et du dénominateur de la fonction de transfert du filtre numérique ayant la réponse en fréquence voulue

A.9 Statistiques

`std`: Évalue l'écart-type

`var`: Évalue la variance

`mean`: Évalue la valeur moyenne

`median`: Identifie la valeur médiane

`max`: Identifie le plus grand élément

`min`: Identifie le plus petit élément

A.10 Polynômes

`roots`: Trouve les racines d'un polynôme

`poly`: Retourne les coefficients du polynôme associé aux racines spécifiées

A.11 Nouveaux outils dans Matlab 2017b

- Afin d'accéder à tous les services de Matlab, il faut créer un compte sur le site MathWorks.
- Matlab Live Editor (.mlx) : affichage des résultats dans la même fenêtre que le script du programme Matlab
- On peut lire un fichier .m avec Live Editor : Click droit sur un fichier.m, ensuite ≪ Open as Live script ≫
- Formation : Matlab Academy - Matlab Onramp
- Cody Coursework : Evaluation des étudiants en ligne
- Physical Modeling : Simscape

— Simulink 3D

— Matlab Online

— Matlab Mobile

Examens de TNS
2017/2018
1A Info - 1A Elec

Spécialité

Informatique - 1A

2017-2018

Formulaire personnel manuscrit d'une feuille A4 est autorisé

Aucun autre document n'est autorisé - Calculatrice non programmable est autorisée

Remarque: La réponse aux questions doit être précise, claire et logique. Il est inutile et fortement déconseillé d'encombrer la solution par des remarques générales hors sujet.

Durée : 1H30 - Avril 2018

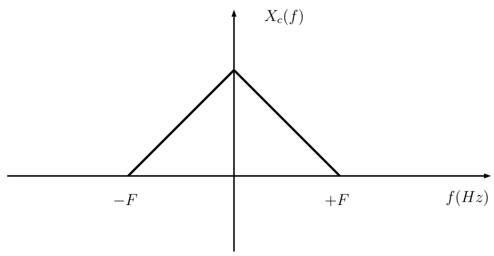
Responsable : M. Frikel

Examen - 1ère Session

Traitement Numérique du Signal

A.12 Exercice : Echantillonnage et Transformée de Fourier Discrète

Soit un signal analogique à temps continu $x_c(t)$ dont la Transformée de Fourier (TF) $X_c(f)$ est à support borné dans l'intervalle $[-F, +F]$. On échantillonne $x_c(t)$ à la fréquence $F_e = 5\ F$.
Cet échantillonnage, supposé idéal, s'écrit à l'aide d'un peigne de Dirac : $x_e(t) = x_c(t).\mathrm{Pgn}_{T_e}(t)$. Avec $\mathrm{Pgn}_{T_e}(t)$ est un peigne de Dirac de période T_e. On considère l'allure suivante pour la TF de $x_c(t)$.



1. Représenter graphiquement $X_e(f)$ pour $f \in [-10F, +10F]$
2. On échantillonne maintenant un signal à temps continu de la forme : $x_c(t) = A\ cos(2\pi f_0 t) + B$. On obtient ainsi le signal échantillonné $x(nT_e) = x_c(nT_e)$.
   (a) Déterminer l'expression de $x(nT_e)$.
   (b) Calculer et représenter la Transformée de Fourier de $x(nT_e)$.
   Application numérique : $A = 1$, $B = 1$, $f_0 = 1$ kHz, $F_e = 5$ kHz

A.13 Exercice : Filtre Numérique

On considère la relation de récurrence suivante :

$$y(n) = x(n) + a.x(n-4) \quad \text{avec} \quad 0 < a \leq 1 \tag{A.1}$$

1. Déterminer la fonction de transfert $H(z)$ du filtre defini par la relation précédente.
2. Quelles sont les propriétés de ce filtre : type de filtre, sa réponse impulsionnelle, ses pôles et zéros ?
3. Exprimer et tracer $\left|H\left(e^{-j\omega T_s}\right)\right|$.
4. Soit le signal $x(t)$ échantillonné à une fréquence d'échantillonnage $F_e = 1$ Hz :

   $$x(nT_e) = a_0.sin\left(\frac{\pi}{4}.nT_e\right) + a_1.sin\left(\frac{\pi}{2}.nT_e\right)$$

   Quelles sont les fréquences contenues dans ce signal ?
5. La fréquence d'échantillonnage est-elle suffisante ?
6. Que se passe-t-il quand on filtre le signal $x(nT_e)$ par le filtre $H(z)$ défini dans l'équation (A.1) en prenant $a = 1$?

A.14 Exercice : Echantillonnage - théorème de Shannon

On étudie le signal $x(t) = cos\left(\frac{2\pi t}{T}\right)$

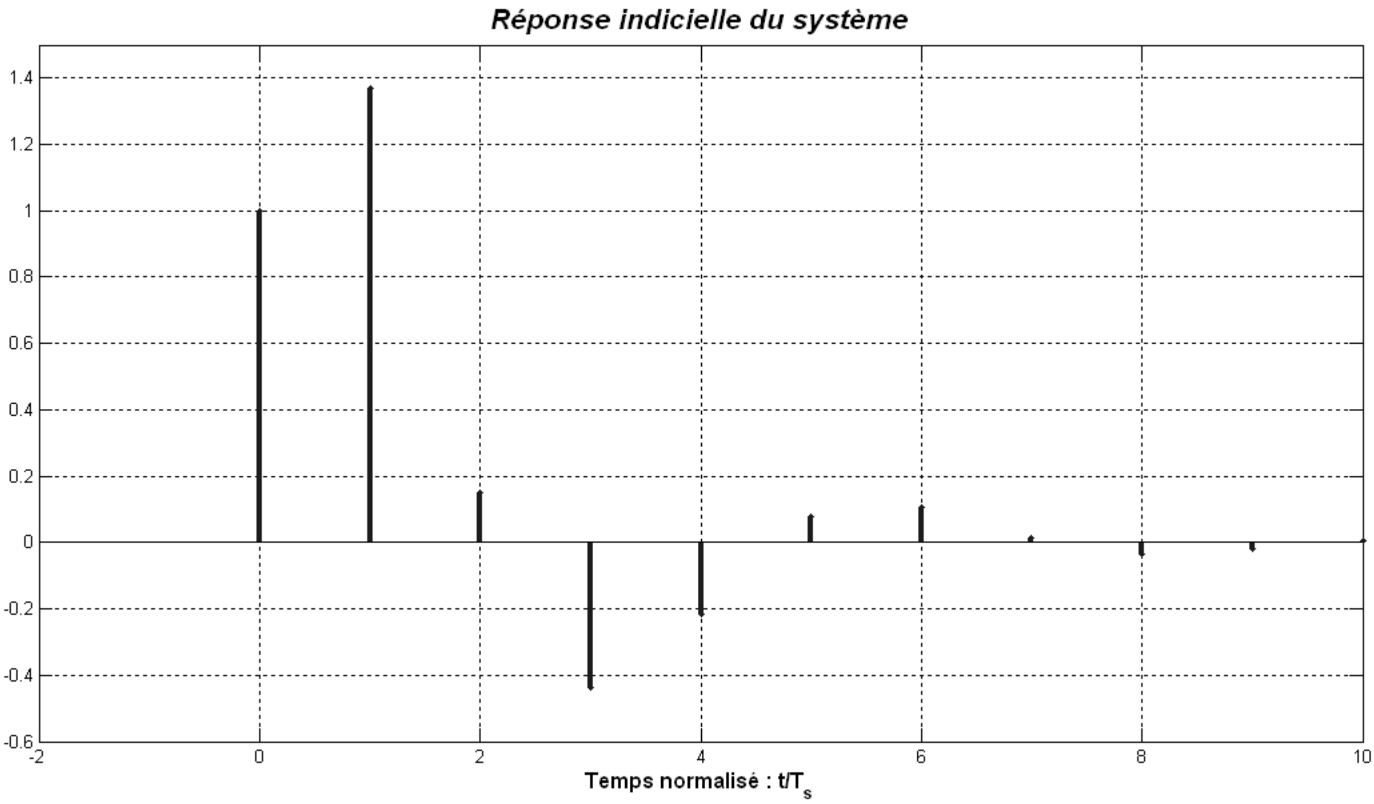
1. questions préliminaires :
   (a) Rappeler l'allure du spectre d'un signal sinusoïdal de période T.
   (b) Ce signal est tronqué à un temps d'observation $T_0 > T$ à l'aide d'une fenêtre rectangulaire centrée en $\frac{T_0}{2}$. Représenter le spectre de Fourier de ce signal tronqué.
   (c) On échantillonne le signal tronqué à la cadence d'échantillonnage T_s. A quelle condition doit satisfaire cette période d'échantillonnage ?
   Est-ce rigoureusement réalisable ?
2. On veut estimer le spectre du signal sinusoïdal grâce à la transformée de Fourier discrète (TFD) calculée sur N points répartis sur M périodes du signal. Le choix de la période d'échantillonnage est supposé correct.
   (a) Rappeler la définition de la transformée de Fourier discrète.
   (b) Représenter la TFD obtenue pour $N = 20$ et $M = 5$.
   (c) Représenter la TFD obtenue pour $N = 20$ et $M = K + \epsilon = 4.5$ (K=4, $\epsilon = 0.5$).
   (d) Quel est l'effet de M et de ϵ sur la qualité de l'estimation du spectre.
   En déduire la précaution à prendre pour que cette estimation soit excellente.

A.15 Exercice : Etudes temporelle et fréquentielle d'un filtre discret

Dans cet exercice on utilisera des temps et des fréquences normalisés par respectivement la période d'échantillonnage et la fréquence d'échantillonnage.
Un filtre discret a comme fonction de transfert :

$$G(z) = \frac{(z^2 - 1)}{z^2 - 0.371z + 0.36} \tag{A.2}$$

1. On mesure expérimentalement le gain pour les fréquences normalisées : 0.1, 0.2, 0.3 et on trouve respectivement environ : 1.43, 3.12, 1.9.
   (a) Calculer les pôles et les zéros de la fonction de transfert (Il est plus simple de les calculer sous la forme module/argument c'est à dire : $re^{j\varphi}$). Représenter leur position dans le plan z.
   (b) A partir de la position des pôles et des zéros et des mesures expérimentales, tracer l'allure du module de la réponse en fréquence du filtre. (Il est demandé d'argumenter clairement les étapes de ce tracé).
2. La réponse indicielle du système est relevée expérimentalement et donne le résultat indiqué sur le graphique ci-dessous :



   (a) Justifier les valeurs initiales et finales.
   (b) En notant $x(t)$ le signal d'entrée et $y(t)$ le signal de sortie, écrire l'équation récurrente permettant de calculer l'échantillon y_k. Avec celle-ci, calculer les 6 premiers échantillons.

Spécialité
EPA - 1A
2017-2018

`Formulaire personnel manuscrit d'une feuille A4 est autorisé`

`Aucun autre document n'est autorisé - Calculatrice non programmable est autorisée`

`Remarque: La réponse aux questions doit être précise, claire et logique. Il est inutil et fortement déconseillé d'encombrer la solution par des remarques générales hors sujet.`

Durée : 1H30 - Avril 2018
Responsable : M. Frikel

Examen - 1ère Session
Traitement Numérique du Signal

A.16 Questions de compréhension du cours

1. Un homme effectue un signal visuel lent dont la plus petite période est de 1 seconde.
   (a) Quelle est la période d'échantillonnage qu'il faut prendre pour le discrétiser correctement (en respectant le théorème de Shannon) ?
   (b) Combien contient-il d'échantillons après cette discrétisation.
   (c) On souhaite faire une analyse spectrale de ce signal avec la TFD, mais préalablement on réalise une pondération des données par une fenêtre. Pourquoi ?
   (d) Afin de s'assurer d'une bonne résolution spectrale, Quelle technique peut on utiliser ?
2. On considère le filtre IIR d'équation récurrente : $y[n] = x[n] + x[n-1] - y[n-2]$, calculer les 5 premiers échantillons de sa réponse impulsionnelle. On considère une fréquence d'échantillonnage de 1 Hz.
3. On souhaite numériser un signal téléphonique $x(t)$ dont la bande spectrale est de 300 Hz à 3400 Hz.
   (a) À quelle fréquence faut t-il l'échantillonner pour ne pas perdre d'information ? Si on l'échantillonne à la fréquence $F_s = 8000$ Hz pendant 0.1 secondes, de combien d'échantillons est constitué le signal discret ?
   (b) On effectue la TFD de ce signal et on obtient un ensemble discret $\{X[k]\}$ $k = 0...N-1$. A quelle fréquence correspond l'indice $k = 50$. Et $k = 200$? Quelle est le pas fréquentiel ?
4. Soit un signal $x(t)$ composé d'une combinaison linéaire de signal cosinusoïdal de fréquence 300 Hz, 400 Hz, 1.3 kHz, 3.6 KHz. Ce signal est échantillonné à une fréquence F_s puis, passé à travers un filtre passe-bas idéal de fréquence de coupure F_c ; générant ainsi un signal $y(t)$. Quelle sont les composantes présentes dans $y(t)$ si :

(a) $F_s = 2\text{kHz}$ et $F_c = 900\text{Hz}$
(b) $F_s = 2\text{kHz}$ et $F_c = 1500\text{Hz}$
(c) $F_s = 4\text{kHz}$ et $F_c = 500\text{Hz}$

A.17 Exercice : Filtrage numérique

1. Soit un filtre $h_1(n)$ transformant $x(n)$ en $y(n)$ par la relation :

$$y(n) = \frac{1}{2}\left(x(n) + x(n-2)\right) \tag{A.3}$$

   (a) Le filtre est-il récursif, à réponse impulsionnelle finie, causal et stable ? Justifiez vos réponses.
   (b) Calculer sa fonction de transfert $H_1(z)$.
   (c) En l'absence de conditions initiales, calculer les réponses impulsionnelle et indicielle de ce filtre.
   (d) Grâce au placement des Pôles/Zéros de $H_1(z)$ dans le plan z, en déduire le comportement fréquentiel de ce filtre.

2. Soit un filtre $h_2(n)$ transformant $x(n)$ en $y(n)$ par la relation :

$$y(n) = \frac{1}{2}\left(x(n) + y(n-1)\right) \tag{A.4}$$

   (a) Calculer la fonction de transfert $H_2(z)$.
   (b) Le filtre est-il récursif, à réponse impulsionnelle finie, causal et stable ? Justifiez vos réponses.
   (c) En l'absence de conditions initiales, calculer la réponse impulsionnelle et la réponse indicielle de ce filtre.
   (d) Grâce au placement des Pôles/Zéros de $H_2(z)$ dans le plan z, en déduire le comportement fréquentiel de ce filtre.

A.18 Exercice : Fenêtres de pondération

1. Etude du signal continu :
   La limitation dans un intervalle de temps θ d'un signal continu est représentée par l'action d'une fenêtre de pondération $p(t)$ de telle que $p(t) = 0$ pour t n'appartenant pas $[0, \theta]$. Le signal ainsi constitué sera : $y(t) = x(t).p(t)$.

2. (a) Donner l'expression de $p(t)$ lorsqu'on effectue une troncature simple c'est à dire une pondération unité quel que soit t dans l'intervalle de la fenêtre.
   (b) Avec $TF\left[x(t)\right] = X(f)$, $TF\left[p(t)\right] = P(f)$ et $TF\left[y(t)\right] = Y(f)$, exprimer $Y(f)$ en fonction de $X(f)$ et $P(f)$. Dans le cas du signal $x(t) = sin\left(\frac{2\pi t}{T_0}\right)$ exprimer $Y(f)$ en fonction de $P(f)$.
   Représenter l'allure de $|Y(f)|$ avec $\theta \approx 12T_0$ dans le cas de la fenêtre du 1.1.

3. Echantillonnage :
   Le signal non tronqué $x(t)$ est échantillonné à la période T_s . Avec $t = n.T_s$ et $T_0 = n_0.T_s$, on obtient les échantillons $x_n = sin\left(\frac{2\pi n}{n_0}\right)$.
   (a) Quel est l'effet de l'échantillonnage sur le spectre de Fourier du signal échantillonné $x_e(t) \equiv \{x_n\}$.
   (b) Rappeler la condition de Shannon. Dans notre cas $n_0 = 8$, peut-on la considérer comme satisfaite ?
   (c) Est-ce la même chose pour l'échantillonnage du signal $y(t)$ soit $y_e(t) \equiv \{y_n\}$ si on suppose $T_0 = 8T_s$ et $\theta \approx 100T_s$?
4. Transformée de Fourier Discrète (TFD) :
   Pour estimer la transformée de Fourier de $x(t)$ on utilise une TFD de N points soit : $TFD[x(t)] = \{X_k\}$.
   (a) Rappeler la définition de la transformée de Fourier discrète.
   (b) Quelle est la relation entre X_k et $Y(f)$?
   (c) A l'aide des courbes $|sinc|$ fournies, interpréter la figure 1 pour laquelle $n_0 = 8$ et $N = 96$. De même, interpréter la figure 2 pour laquelle $n_0 = 8$ et $N = 100$.
5. Fenêtre de Hanning :
   La troncature du signal est effectuée par une fenêtre de Hanning :
   $h(t) = 0.5\left[1 - cos\left(\frac{2\pi t}{\theta}\right)\right]$
   Le signal ainsi tronqué peut se mettre sous la forme,
   $z(t) = x(t).p(t).h(t) = y(t).h(t)$.
   (a) Quelle est la transformée de Fourier $H(f) = TF\left[h(t)\right]$ de la fonction de fenêtre ?
   (b) Montrer que l'application de la fenêtre se ramène à une convolution fréquentielle et à une équation récurrente simple faisant intervenir 3 termes.
   (c) Interpréter la figure 3 pour laquelle $n_0 = 8$ et $N = 96$.
   (d) Interpréter la figure 4 pour laquelle $n_0 = 8$ et $N = 100$.
   (e) Quels sont les avantages et inconvénients de cette troncature ?

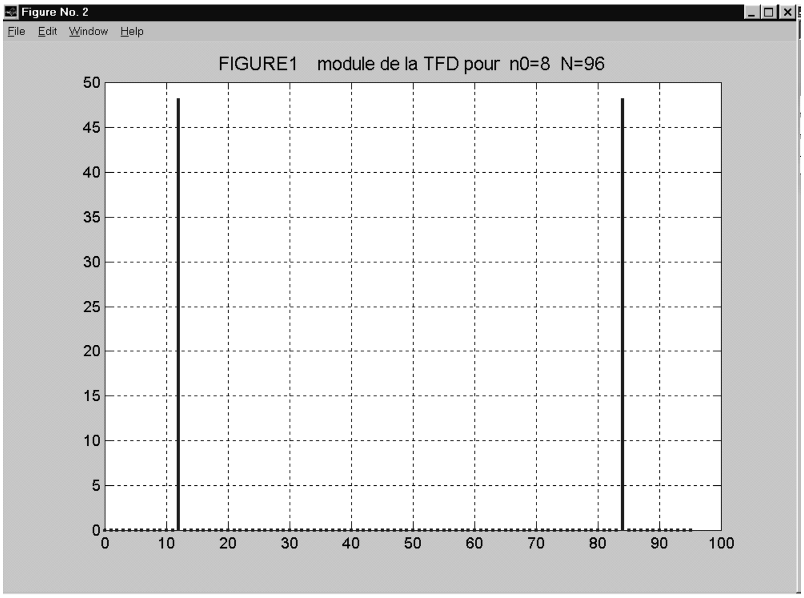


Figure No. 2
File Edit Window Help
FIGURE1 module de la TFD pour n0=8 N=96
0
5
10
15
20
25
30
35
40
45
50
0 10 20 30 40 50 60 70 80 90 100

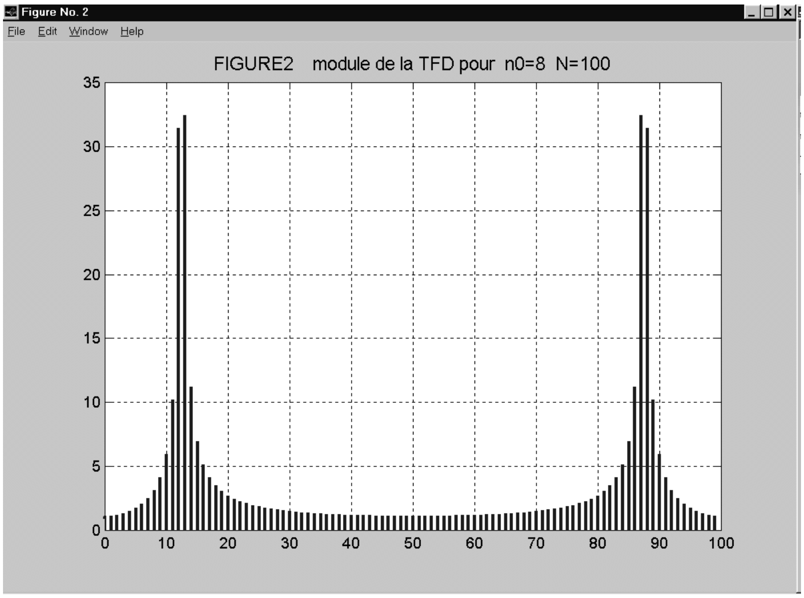


Figure No. 2
File Edit Window Help
FIGURE2 module de la TFD pour n0=8 N=100
0
5
10
15
20
25
30
35
0 10 20 30 40 50 60 70 80 90 100

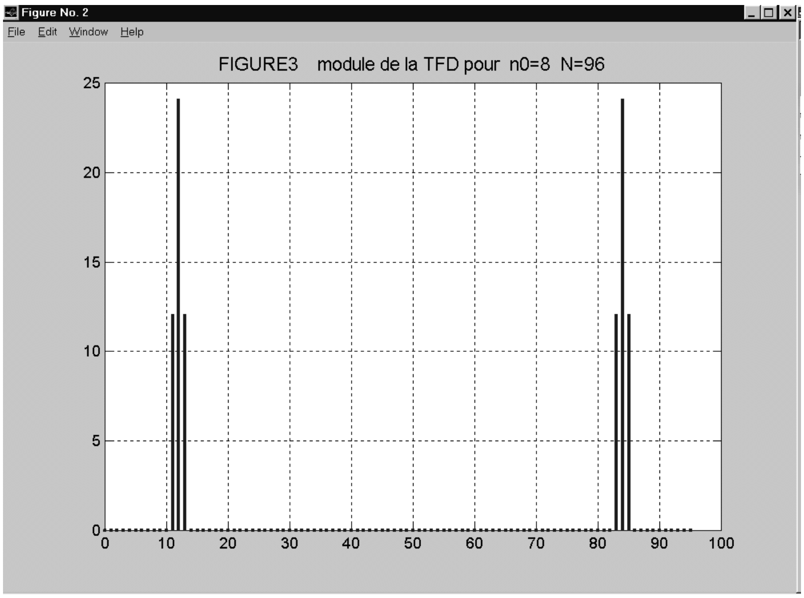


Figure No. 2
File Edit Window Help
FIGURE3 module de la TFD pour n0=8 N=96
0
5
10
15
20
25
0 10 20 30 40 50 60 70 80 90 100

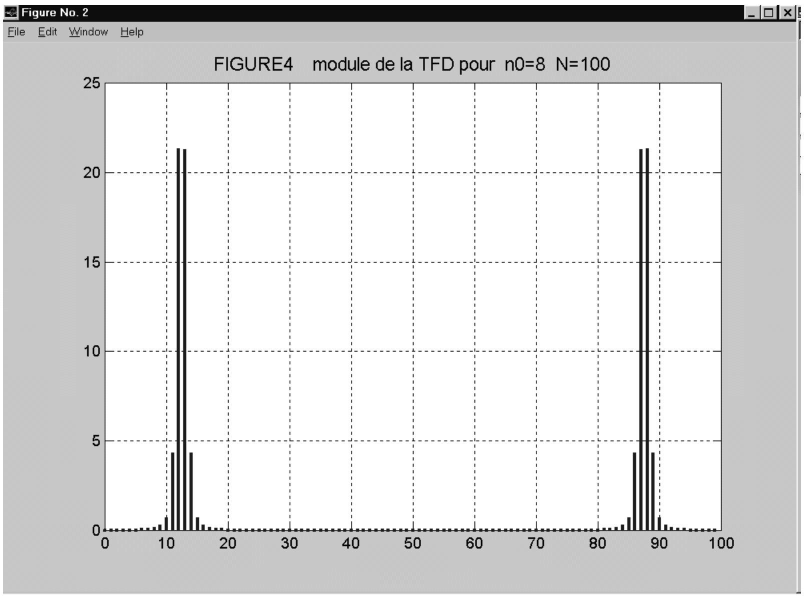


Figure No. 2
File Edit Window Help
FIGURE4 module de la TFD pour n0=8 N=100
25
20
15
10
5
0
0 10 20 30 40 50 60 70 80 90 100

TRANSFORMEES DE LAPLACE ET TRANSFORMEES EN Z USUELLES

Ce sont des tables de transformées monolatérales (prise en compte de $t \geq 0$)

Pour les signaux échantillonnés, T est la période d'échantillonnage.

* attention: $\delta(t)$ n'a pas la même signification physique en continu et en discret. Le $\delta(t)$ "discret" n'est pas obtenu par échantillonnage du $\delta(t)$ "continu". Le même problème est rencontré pour e(t) l'échelon d'Heaviside.

G(p)	g(t)	G(z)
1	$\delta(t)$ *	1
e^{-pkT}	$\delta(t-kT)$ *	z^{-k}
$\frac{1}{p}$	e(t) *	$\frac{z}{z-1}$
$\frac{1}{p^2}$	t	$\frac{zT}{(z-1)^2}$
$\frac{1}{p-\frac{1}{T}\mathrm{Ln}(a)}$ Pour a>0 uniquement	$a^{t/T}$	$\frac{z}{z-a}$ $\forall a \in C$
$\frac{1}{p+a}$	e^{-at}	$\frac{z}{z-e^{-aT}}$
$\frac{1}{(p+a)^2}$	$t\,e^{-at}$	$\frac{zTe^{-aT}}{\left(z-e^{-aT}\right)^2}$
$\frac{\omega}{p^2+\omega^2}$	$\sin(\omega t)$	$\frac{z\sin(\omega T)}{z^2-2z\cos(\omega T)+1}$
$\frac{p}{p^2+\omega^2}$	$\cos(\omega t)$	$\frac{z^2-z\cos(\omega T)}{z^2-2z\cos(\omega T)+1}$
$\frac{\omega}{(p+a)^2+\omega^2}$	$e^{-at}\sin(\omega t)$	$\frac{ze^{-aT}\sin(\omega T)}{z^2-2ze^{-aT}\cos(\omega T)+e^{-2aT}}$
$\frac{p+a}{(p+a)^2+\omega^2}$	$e^{-at}\cos(\omega t)$	$\frac{z^2-ze^{-aT}\cos(\omega T)}{z^2-2ze^{-aT}\cos(\omega T)+e^{-2aT}}$