ENSICAEN – 1A **2026-2027**
Matériaux et Chimie - FISE

COMPLEMENT SUR LES STRUCTURES ET APPLICATIONS LINEAIRES

DEFINITIONS DES GROUPES, ANNEAUX, CORPS, KEV, SEV, APPLICATIONS LINEAIRES

Structure de groupe : (G, T) (G un ensemble et T une loi interne) est un groupe ssi

a) T associative : x T (y T z) = (x T y) T z

b) T possède un élément neutre e : e T x = x T e = x

c) Tout élément de G admet un symétrique pour T : x T x' = x' T x = e

Si T est en plus commutatif (a T b = b T a), on dit que (G, T) est un groupe abélien.

Structure d'anneau : (A, +, *) (A un ensemble et + et * deux lois internes) est un anneau ssi

a) (A, +) est un groupe abélien

b) la loi * est associative et possède un élément neutre 1

c) la loi * est distributive par rapport à la loi + : α * (x + y) = α * x + α * y

Structure de corps : (A, +, *) est un corps si (A, +, *) est un anneau non nul tel que tout élément non nul est inversible (vis à vis de la loi *)

Structure de Kev : (E, +, $\perp$) est un Kev (K étant un corps commutatif, en général : IR ou C) ssi :

(E,+) groupe abélien

$\perp$ loi externe sur E telle que $\forall\alpha\in K \ \forall(x,y) \in E^2 \ \alpha \perp (x + y) = (\alpha \perp x) + (\alpha \perp y)$

$\forall (\alpha, \beta) \in K^2 \ \forall x \in E \ (\alpha + \beta) \perp x = (\alpha \perp x) + (\beta \perp x)$

$\forall (\alpha, \beta) \in K^2 \ \forall x \in E \ \alpha \perp (\beta \perp x) = (\alpha*\beta) \perp x$

$\forall (\alpha, \beta) \in K^2 \ \forall x \in E \ 1 \perp x = x$ (1 élément neutre)

Rem : $\perp$ loi externe sur E (application de K x E $\rightarrow$ E qui au couple (α, x) ($\alpha\in$ K et x $\in$ E) associe $\alpha \perp$ x (élément de E)). Les éléments de K sont appelés scalaires.

On appelle **sev** d'un Kev (E, +, .) (E', +, .) où E' est une partie non vide de E stable pour les lois + et . induites.

Caractérisation : E' $\neq \varnothing$ et $\forall (\alpha, \beta) \in K^2 \ \forall (x, y) \in E'^2 \ \alpha.x + \beta.y \in E'$.

Autre caractérisation : E' sev de E ssi $0 \in E'$ et $\forall (\alpha, \beta) \in K^2 \ \forall (x, y) \in E'^2 \ \alpha.x + \beta.y \in E'$

Application linéaire : E et F deux Kev , on appelle application linéaire de E toute application f de E vers F telle que : $\forall (x, y) \in E^2 \ f(x + y) = f(x) + f(y)$

$\forall \alpha \in K \ \forall x \in E \ f(\alpha.x) = \alpha f(x)$

Autre caractérisation : on appelle application linéaire de E toute application f de E vers F telle que $\forall (x, y) \in E^2 \ \forall (\alpha, \beta) \in K^2 \ f(\alpha x + \beta y) = \alpha f(x) + \beta f(y)$

Si E = F, on parle d'**endomorphisme**.

ENSICAEN – 1A **2026-2027**
Matériaux et Chimie - FISE

COMPLEMENT SUR LES ESPACES VECTORIELS

I. Famille finie de vecteurs : a) famille génératrice

Soit E un Kev. On considère une famille finie de n vecteurs de E : $\{x_i\}(i\in[1,n])$.
On appelle combinaison linéaire des n vecteurs tout vecteur x de E tel que $x = \sum_i \alpha_i x_i$
avec $\alpha_i \in K$, i=1,..n. L'ensemble F des combinaisons linéaires des vecteurs $\{x_i\}$ est le sev engendré par $\{x_1, x_2, ,x_n\}$. C'est le plus petit sev contenant $\{x_1, x_2, ,x_n\}$: $F = \mathrm{VECT}(x_1, x_2, .., x_n)$. On dit aussi que $\{x_1, x_2, ,x_n\}$ est une famille génératrice de F.

b) famille libre ou liée

déf : une famille $\{x_1, x_2, ,x_n\}$ de n vecteurs de E est dite libre ssi $\forall(\alpha_1,...,\alpha_n) \in K^n \quad \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + ... + \alpha_n x_n = 0 \Rightarrow \alpha_1 = \alpha_2 = ... = \alpha_n = 0$. Les n vecteurs sont dits linéairement indépendants.
déf : la famille $\{x_1, x_2,...; x_n\}$ est liée ssi elle n'est pas libre i.e. $\exists(\alpha_1,...,\alpha_n) \in K^n$ tel que $\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + ... + \alpha_n x_n = 0$ avec $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_n) \neq (0, 0, .., 0)$
Propriété : toute famille contenant le vecteur nul est liée.
toute famille contenant une sous-famille liée est liée
toute sous-famille d'une famille libre est libre.
Propriété : F sev de E engendré par $\{x_1, x_2, ,x_n\}$: $F = \mathrm{VECT}(x_1, x_2, .., x_n)$. Toute famille contenant au moins (n+1) vecteurs (de F) est liée.
Si $\{x_1, x_2, ,x_n\}$ famille liée, il existe $j\in[1,n]$ tel que x_j soit combinaison linéaire des (n-1) autres vecteurs ou x_j est élement du sev engendré par $\{x_1, x_2, x_i,...x_n\}$ avec $i \neq j$
$\{x_1, x_2, ,x_n\}$ est libre ssi :
$\forall x \in F = \mathrm{VECT}(x_1, x_2,...,x_n)\ \exists!(\alpha_1, \alpha_2,..,\alpha_n) \in K^n$ tel que $x = \sum_i \alpha_i x_i$

II. Espace vectoriel de dimension finie. Bases.

E est de dimension finie s'il admet une famille finie de générateurs.
déf : $\{x_1, x_2, ,x_n\}$ base de E ssi $\{x_1, x_2, ,x_n\}$ est libre et génératrice de E
$\{x_1, x_2, ,x_n\}$ est une base de E ssi E=VECT($x_1, x_2, ,x_n$)
$\{x_1, x_2, ,x_n\}$ famille libre
$\{x_1, x_2, ,x_n\}$ base de E ssi $\forall x \in E\ \exists!(\alpha_1, \alpha_2,..,\alpha_n) \in K^n$ tel que $x = \sum_i \alpha_i x_i$
$(\alpha_1, \alpha_2, , \alpha_n)$ n-uplet de composantes ou coordonnées dans la base $\{x_1, x_2, ,x_n\}$.

Théorème de la base incomplète : dans tout Kev non réduit à $\{\varnothing\}$, il existe des bases finies. L famille libre de E, G famille génératrice de E, il existe une base B de E tel que $L \subset B \subset G$. Si on admet que la base B est de cardinal n $\mathrm{card}(B) = n$, on a $\mathrm{card}(L) \leq n$.
En dimension finie, toutes les bases ont même cardinal. Ce nombre est appelé dimension de E.
B base de E ssi $\mathrm{card}(B) = n$ et B libre
ou B base de E ssi $\mathrm{card}(B) = n$ et B génératrice.
On appelle rang des $\{x_i\}$ la dimension du sev engendré par les $\{x_i\}$.

COMPLEMENT SUR LES MATRICES

Application linéaire et représentation matricielle :

E et F deux Kev de dimension finie respective n et p, on considère l'application linéaire f de E (rattaché à une base $B=(e_1,e_2,...,e_n)$) vers F (rattaché à une base $C=(u_1,u_2,...,u_p)$).

$\forall x \in E \quad \exists!(x_1,x_2,...,x_n) \in IR^n \qquad x=\sum_{i=1}^{n} x_i e_i$ et $\forall y \in F \quad \exists!(y_1,y_2,...,y_p) \in IR^p \qquad y=\sum_{j=1}^{p} y_j u_j$.

$y=f(x)$ s'écrit $y=f(\sum_{i=1}^{n} x_i e_i)=\sum_{i=1}^{n} x_i f(e_i)=\sum_{i=1}^{n} x_i \sum_{j=1}^{p} a_{ji} u_j=\sum_{j=1}^{p}\sum_{i=1}^{n} x_i a_{ji} u_j=\sum_{j=1}^{p} y_j u_j$ avec

$y_j=\sum_{i=1}^{n} x_i a_{ji}$.

On appelle matrice de f par rapport aux bases B et C le tableau p lignes et n colonnes de terme générique (a_{ji}) soit $M(f)_{(B,C)}=A=\begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & \dots & a_{2n} \\ . & & \\ . & & \\ a_{p1} & \dots & a_{pn} \end{bmatrix}$.

Les $f(e_i)$ écrits dans la base des (u_j) sont les vecteurs colonne du tableau.

On appelle matrice p lignes, n colonnes tout tableau du type précédent : $\forall A \in M_{(p,n)}(K) \quad \exists! f \in L_K(E,F) \quad M(f)=A$.

Ecriture matricielle des applications linéaires f de E vers F : Y = A X où Y est la matrice p lignes et 1 colonne (= vecteur colonne) de composantes y_j et X est le vecteur colonne de composantes x_i.

Matrices p lignes et n colonnes ($M_{(p,n)}(K)$):

1) opérations : * addition : C = A + B correspond à la matrice de l'application linéaire f+g et a pour terme générique $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$.

* multiplication par un scalaire α: αA de terme générique αa_{ij} représente l'application linéaire αf

* produit de deux matrices : $A=M(f)_{(B,C)}$ (f de E vers F) et $B=M(g)_{(C,D)}$ (g de F vers G de dimension q). Le produit de B par A noté B*A ou B.A est la représentation matricielle de l'application gof : $B.A=M(gof)_{(B,D)}$, c'est une matrice q lignes et p colonnes de terme générique $c_{ki}=\sum_{j=1}^{p} b_{kj} a_{ji}$. Il est en général différent du produit $A*B$ ou A.B

2) transposition : ${}^tA$ est obtenue en échangeant les lignes et les colonnes de A. Si $A \in M_{(p,n)}(K)$, ${}^tA \in M_{(p,n)}(K)$.

On a les résultats suivants : ${}^t(A+B)={}^tA+{}^tB$, ${}^t(\alpha A)=\alpha\,{}^tA$ et ${}^t(A.B)={}^tB.{}^tA$

3) changements de base :

B et B' deux bases de E : $B=(e_1,e_2,...,e_n)$ et $B'=(e'_1,e'_2,...,e'_n)$, il existe une unique application linéaire f telle que $e'_i=f(e_i)$ de représentation matricielle la matrice P (appelée matrice de passage de B à B') composée des colonnes des vecteurs e'_i exprimés dans la base des e_i.

Propriété : La matrice P est inversible c'est-à-dire que dét(P) ≠ 0. Pour exprimer un même vecteur x de E de composantes x_i dans la base B (X) et de composantes x'_i dans la base B'(X'), les deux représentations X et X' sont liées par la relation : $X=P.X'$ ou $X'=P^{-1}.X$.

Conséquence pour un changement de base pour une application linéaire : B et B' deux bases de E et C et C' deux bases de F. La matrice de passage de B à B' est désignée par P et celle de C à C' est désignée par Q. On a $A'=Q^{-1}AP$ (A et A' sont dites équivalentes).

Matrices carrées et endomorphismes ($M_{(n,n)}(K)$):

f est un endomorphisme de E (f est une application linéaire de E dans E). On travaille avec une seule base de dimension n. La représentation matricielle de f est une matrice carrée n lignes, n colonnes.

<u>Matrices carrées particulières :</u>

* matrices scalaires (associées aux homothéties vectorielles $h(e_i)=\lambda e_i$) :

$$M=\begin{bmatrix}\lambda & 0... & 0\\ 0 & \lambda & ... & 0\\ 0.... & ...0 & \lambda\end{bmatrix}=\lambda\begin{bmatrix}1 & 0... & 0\\ 0 & 1 & ... & 0\\ 0... & ...0 & 1\end{bmatrix}=\lambda I_n$$

* matrices diagonales : $\Delta=\begin{bmatrix}a_1 & 0... & 0\\ 0 & a_2 & ... & 0\\ 0... & ...0 & a_n\end{bmatrix}$

* matrices triangulaires supérieures $\Delta=\begin{bmatrix}a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n}\\ 0 & a_{22} & ... & a_{2n}\\ 0.... & ...0 & a_{nn}\end{bmatrix}$ ou inférieures : $\Delta=\begin{bmatrix}a_{11} & 0... & 0\\ a_{21} & a_{22} & ... & 0\\ a_{n1}.... & ... & a_{nn}\end{bmatrix}$

* matrices symétriques : ${}^tM=M$ et antisymétriques : ${}^tM=-M$.

<u>Changement de base :</u> deux bases B et B' de E. La matrice de passage de B à B' est désignée par P. On a $A'=P^{-1}AP$ (A et A' sont dites semblables).

<u>Matrices carrées inversibles :</u> M est inversible s'il existe une matrice M' appartenant à $M_{(n,n)}(K)$ vérifiant $M.M'=M'.M=I_n$. M' s'appelle l'inverse de M et est notée M^{-1}. M est inversible ssi f est bijective et $(M(f))^{-1}_{(B)}=M(f^{-1})_{(B)}$.

Calcul de l'inverse : $M^{-1}=\frac{1}{dét(M)}\left({}^tN\right)$ où N désigne la comatrice de M et ${}^tN$ désigne la matrice complémentaire de M. Le terme générique de la comatrice N est $n_{ij}=(-1)^{i+j}.dét(M_{ij})$ où M_{ij} désigne la matrice obtenue en barrant la ligne i et la colonne j (M_{ij} matrice de dimension n-1).

ENSICAEN – 1A **2026-2027**
Matériaux et Chimie - FISE

COMPLEMENT SUR LES DETERMINANTS

Application multilinéaire et déterminant d'ordre p:

E et F deux Kev de dimension finie n et p, on considère l'application linéaire f de E^p (E x E x E..x E) vers F. A un p-uplet $(x_1, x_2, ..., x_p)$, on associe $f(x_1, x_2, ..., x_p)$. L'application f est p-linéaire ssi $\forall i \in [1,p]$ à $(x_1, x_2, x_{i-1}, x_{i+1}, ..., x_p)$ fixés, $x_i \mapsto f(x_1, x_2, x_{i-1}, x_i, x_{i+1}, ..., x_p)$ est linéaire.

(exemple avec p = 2 : f est bilinéaire ssi $f(\alpha x, y) = \alpha f(x,y)$, $f(x, \alpha y) = \alpha f(x,y)$,
$f(x_1 + x_2, y) = f(x_1, y) + f(x_2, y)$ et $f(x, y_1 + y_2) = f(x, y_1) + f(x, y_2)$).

Si F = K, l'application s'appelle forme linéaire.

L'application f est alternée si $\forall i \in [1,p]$ $\forall j \in [1,p]$ (avec i ≠ j) $x_i = x_j$ => $f(x_1, .., x_i, ..., x_j, ..., x_p) = 0$

Si f est alternée $f(x_1, .., x_i, ..., x_j, ..., x_p) = -f(x_1, .., x_j, ..., x_i, ..., x_p)$.

Théorème : E un Kev de dimension p ramené à une base $B = (e_1, e_2, ..., e_p)$. Quelle que soit la base B, il existe une unique forme p-linéaire alternée de E dans K telle que $f(e_1, .., e_i, ..., e_j, ..., e_p) = 1$, cette forme s'appelle le déterminant d'ordre p.

Règles: (une rangée désigne une ligne ou une colonne)

1) Par échanges de 2 rangées (rangée = ligne ou colonne), le déterminant change de signe.
2) Si on a 2 rangées identiques ou si une rangée est combinaison linéaire des autres, le déterminant est nul.
3) Si on multiplie une rangée par k, le déterminant est multiplié par k.
4) On peut ajouter à une rangée une combinaison linéaire des autres sans changer la valeur du déterminant

Calcul d'un déterminant: g est un endomorphisme de E (Kev de dimension p) rattaché à une base $B = (e_1, e_2, ..., e_p)$. Le déterminant de g peut se calculer à partir des coefficients de la matrice A représentant l'endomorphisme dans la base B :

$$dét(g)_B = dét(M(g))_B = dét(A) = \sum_{j=1}^{p} a_{ji} \Delta_{ji}$$ (développement par rapport à la i-ème colonne)

où Δ_{ji}, appelé cofacteur de a_{ji}, s'obtient par la formule suivante $\Delta_{ji} = (-1)^{i+j} dét(A_{ji})$.

$dét(A_{ji})$ s'appelle mineur, c'est le déterminant de la matrice A_{ji} obtenue en barrant la ligne i et la colonne j de la matrice A.

Propriétés:

1) $dét({}^t A) = dét(A)$

2) $dét(A.B) = dét(A).dét(B)$

3) A inversible ssi $dét(A) \neq 0$. $dét(A^{-1}) = (dét(A))^{-1} = \frac{1}{dét(A)}$.

4) Le déterminant ne dépend pas de la base.

En dimension 2 : $dét(A) = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} = x_1 y_2 - x_2 y_1$

En dimension 3 (règle de Sarrus) : $dét(A) = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix} = x_1 y_2 z_3 + y_1 z_2 x_3 + z_1 x_2 y_3 - x_3 y_2 z_1 - y_3 z_2 x_1 - z_3 x_2 y_1$