ENSICAEN – 1ère année Matériaux Chimie
Année 2024-2025 – Semestre 5

Mathématiques

25 octobre 2024 – 1h30 – Patricia Jouannot-Chesney
Aucun document autorisé
Calculatrice interdite

Le barème (sur 22) est donné à titre indicatif

EXERCICE 1 (3 points environ)

Donner les solutions **réelles** du système différentiel suivant : $\begin{cases} x_1'(t) = 2x_1(t) - 3x_2(t) \\ x_2'(t) = 3x_1(t) + 2x_2(t) \end{cases}$

EXERCICE 2 (5 points environ)

Résoudre le système différentiel suivant : $\begin{cases} x_1'(t) = 2x_1(t) - 3x_2(t) - 5\exp(3t) \\ x_2'(t) = -4x_1(t) + x_2(t) + 10t + 13 \end{cases}$

EXERCICE 3 (4 points environ)

Soit la fonction $f(x,y)$ de classe C^2, définie sur R^2 : $f(x,y) = x^3 + y^3 - 3xy + 2$.

1) Calculer les dérivées partielles premières et secondes de f sur R^2.

2) Déterminer le (ou les) point(s) critique(s) de f sur R^2. Préciser la nature de ce (ou ces) point(s).

EXERCICE 4 (5 points environ)

Soient f et g deux fonctions à valeurs réelles, de classe C^2 sur R^2. Les variables de f sont (x,y) et celles de g s'appellent (u,v). La relation entre f et g est $f(x,y) = g(u,v)$, où $u = U(x,y) = x + ay$ et $v = V(x,y) = bx + y$, avec a et b des constantes réelles.

1) Quelle condition doit vérifier le couple (a, b) pour que l'application $\emptyset$ définie par $\emptyset(x,y) = (u,v)$ soit bijective de R^2 vers R^2, et donc inversible ?

2) Exprimer les dérivées partielles premières et secondes de f à l'aide de celles de g et des constantes a et b.

3) On cherche à résoudre l'équation $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + 3\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} - 4\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 0 \quad (E_1)$.

a) Quels choix de valeurs pour le couple (a,b) compatibles avec la condition du 1) permettent de se ramener à $\frac{\partial^2 g}{\partial u\, \partial v} = 0$. **On choisira l'un des couples pour la suite.**

b) Résoudre l'équation $\frac{\partial^2 g}{\partial u\, \partial v} = 0$.

c) En déduire la solution générale $f(x,y)$ de (E_1).

EXERCICE 5 (5 points environ)

Trouver les solutions réelles f(t) de l'équation différentielle linéaire d'ordre 3 :

$$f^{(3)}(t)+f''(t)-4f'(t)-4f(t)=4t+12\exp(2t) \qquad (E_2)$$

1) En posant $X(t)=\begin{pmatrix} f(t) \\ f'(t) \\ f''(t) \end{pmatrix}$, écrire le système différentiel d'ordre 1 $X'(t)=AX(t)+B(t)$ associé à l'équation différentielle (E_2). On explicitera les éléments A et B(t).

2) Déterminer la solution générale de l'équation homogène $X_h(t)$.

3) Trouver une solution particulière $X_p(t)$.

4) En déduire la solution générale f(t) de (E_2).