ENSICAEN
ÉCOLE PUBLIQUE D'INGÉNIEURS
CENTRE DE RECHERCHE

ENSICAEN – 1ère année Matériaux Chimie
Année 2025-2026 – Semestre 5

Mathématiques

3 novembre 2025 – 1h30 – Patricia Jouannot-Chesney
Aucun document autorisé
Calculatrice et objets connectés interdits

Le barème est donné à titre indicatif
La qualité de la rédaction et la justification des résultats
seront pris en compte dans la correction

Le sujet comporte 4 exercices.

EXERCICE 1 (4 points environ)

Donner les solutions **réelles** du système différentiel suivant : $\begin{cases} x_1'(t) = 2x_1(t) + x_2(t) \\ x_2'(t) = -5x_1(t) + 4x_2(t) \end{cases}$

EXERCICE 2 (8 points environ)

On cherche à résoudre le système différentiel homogène suivant : $\begin{cases} x_1'(t) = -3x_1(t) - x_2(t) \\ x_2'(t) = kx_1(t) - 5x_2(t) \end{cases}$, pour certaines valeurs de k (k désigne un réel).

1) a) Calculer le polynôme caractéristique de la matrice A associée au système et déterminer pour quelle valeur de k, le polynôme caractéristique a une racine double.

b) Pour la valeur de k définie au a), résoudre le système homogène.

2) a) Résoudre le système homogène pour une valeur de k=-8

b) Résoudre ensuite le système différentiel $\begin{cases} x_1'(t) = -3x_1(t) - x_2(t) - 4\exp(2t) \\ x_2'(t) = -8x_1(t) - 5x_2(t) - \exp(2t) \end{cases}$

EXERCICE 3 (4 points environ)

Soit la fonction $f(x,y)$ de classe C^2, définie sur R^2 : $f(x,y) = 2x^2 + y^3 - 4xy + 2x - y - 3$.

1) Calculer les dérivées partielles premières et secondes de f sur R^2.

2) Déterminer le (ou les) point(s) critique(s) de f sur R^2. Préciser la nature de ce (ou ces) point(s).

EXERCICE 4 (4 points environ)

Trouver les solutions réelles f(t) de l'équation différentielle linéaire d'ordre 3 :

$$f^{(3)}(t)+3f''(t)-6f'(t)-8f(t)=-8t^2-4t+4 \qquad (E)$$

1) En posant $X(t)=\begin{pmatrix} f(t) \\ f'(t) \\ f''(t) \end{pmatrix}$, écrire le système différentiel d'ordre 1 : $X'(t)=AX(t)+B(t)$ associé à l'équation différentielle (E). On fournira explicitement les éléments A et B(t).

2) Déterminer la solution générale de l'équation homogène $X_h(t)$.

3) Trouver une solution particulière $X_p(t)$ et la solution générale $X(t)$.

4) En déduire la solution générale $f(t)$ de (E).