Année universitaire 2023–2024

$1^{\text{ère}}$ année
Matériaux et Chimie

Corrigé de l'examen de Mathématiques

Semestre 5 – jeudi 11 janvier 2024

Solution 1.

a) $I = \int_0^1 \frac{dx}{1+x} \times \int_0^1 y\,dy = \Big[\ln(1+x)\Big]_0^1 \times \Big[\frac{1}{2}y^2\Big]_0^1 = (\ln 2 - \ln 1) \times \frac{1}{2} = \frac{\ln 2}{2}.$

b) $J = \int_0^1 \left(\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1+x+y}}\right) dy = \int_0^1 \Big[2\sqrt{1+x+y}\Big]_{x=0}^{x=1} dy = 2\int_0^1 \left(\sqrt{2+y} - \sqrt{1+y}\right) dy$

$= 2\Big[\frac{2}{3}(2+y)^{\frac{3}{2}} - \frac{2}{3}(1+y)^{\frac{3}{2}}\Big]_0^1 = \frac{4}{3}\left(\left(3^{\frac{3}{2}} - 2^{\frac{3}{2}}\right) - \left(2^{\frac{3}{2}} - 1^{\frac{3}{2}}\right)\right) = \frac{4}{3}\left(3\sqrt{3} - 4\sqrt{2} + 1\right)\,.$

Solution 2.

a) L'équation cartésienne de la droite (AB) est de la forme $y = bx + c$.
$A \in (AB)$ donc $\alpha = b \times 0 + c$, et donc $c = \alpha$.
$B \in (AB)$ donc $\frac{\sqrt{3}}{2} = b \times \frac{1}{2} + c$, et donc $b = \sqrt{3} - 2c = \sqrt{3} - 2\alpha = -1$.
Finalement, l'équation de (AB) est $y = -x + \alpha$.

b) Les coordonnées d'un point sur le cercle unité vérifient l'équation $x^2 + y^2 = 1$, et $y = \sqrt{1-x^2}$ sur le demi-cercle supérieur. Le domaine $\mathscr{D}$ est donc délimité par les courbes des fonctions $y_{\min}(x) = \sqrt{1-x^2}$ et $y_{\max}(x) = \alpha - x$ avec $x \in [0, \frac{1}{2}]$. Par conséquent,

$$\begin{aligned}
I &= \iint_{\mathscr{D}} y\,dx\,dy = \int_0^{1/2} \left(\int_{y_{\min}(x)}^{y_{\max}(x)} y\,dy\right) dx = \int_0^{1/2} \left[\frac{y^2}{2}\right]_{y_{\min}(x)}^{y_{\max}(x)} dx \\
&= \frac{1}{2}\int_0^{1/2} \left((\alpha - x)^2 - \left(1 - x^2\right)\right) dx = \frac{1}{2}\int_0^{1/2} \left(\alpha^2 - 1 - 2\alpha x + 2x^2\right) dx \\
&= \frac{1}{2}\left[(\alpha^2 - 1)x - \alpha x^2 + \frac{2}{3}x^3\right]_0^{1/2} = \frac{1}{2}\left(\frac{\alpha^2 - 1}{2} - \frac{\alpha}{4} + \frac{1}{12}\right) = \frac{6\alpha^2 - 3\alpha - 5}{24} \\
&= \frac{6 + 3\sqrt{3} - \frac{3(1+\sqrt{3})}{2} - 5}{24} = \frac{\frac{3\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}}{24} = \frac{3\sqrt{3} - 1}{48}.
\end{aligned}$$

c) L'équation cartésienne $y = \alpha - x$ de la droite (AB) devient $r\sin\theta = \alpha - r\cos\theta$ avec $x = r\cos\theta$ et $y = r\sin\theta$. Donc $r(\sin\theta + \cos\theta) = \alpha$, ou encore

$$r = \frac{\alpha}{\sin\theta + \cos\theta}.$$

d) Les coordonnées cartésiennes du point B sont $\left(\cos\frac{\pi}{3}, \sin\frac{\pi}{3}\right)$ donc son angle polaire est $\frac{\pi}{3}$. L'intersection de la demi-droite d'angle polaire θ avec le domaine $\mathscr{D}$ commence sur le cercle

au rayon $r = 1$ et se termine sur la droite (AB) au rayon $r = \rho(\theta)$.
L'aire du domaine $\mathscr{D}$ est donc

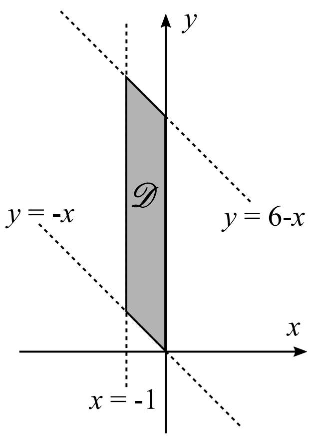
$$\begin{aligned}
S = \iint_{\mathscr{D}} r\,dr\,d\theta &= \int_{\pi/3}^{\pi/2} \left(\int_1^{\rho(\theta)} r\,dr \right) d\theta = \int_{\pi/3}^{\pi/2} \left[\frac{r^2}{2} \right]_1^{\rho(\theta)} d\theta \\
&= \frac{1}{2} \int_{\pi/3}^{\pi/2} \left(\frac{\alpha^2}{(\sin\theta + \cos\theta)^2} - 1 \right) d\theta = \frac{1}{2} \int_{\pi/3}^{\pi/2} \left(\frac{\alpha^2}{\sin^2\theta \left(1 + \frac{\cos\theta}{\sin\theta}\right)^2} - 1 \right) d\theta \\
&= \frac{1}{2} \int_{\pi/3}^{\pi/2} \left(-\frac{\alpha^2 \mathrm{cotan}'\theta}{(1 + \mathrm{cotan}\,\theta)^2} - 1 \right) d\theta
\end{aligned}$$

avec $\mathrm{cotan}\,\theta = \dfrac{\cos\theta}{\sin\theta}$ et $\mathrm{cotan}'\theta = -\dfrac{1}{\sin^2\theta}$. Et donc

$$S = \frac{1}{2} \left[\frac{\alpha^2}{1 + \mathrm{cotan}\,\theta} - \theta \right]_{\pi/3}^{\pi/2} = \frac{1}{2} \left(\alpha^2 - \frac{\pi}{2} - \frac{\alpha^2}{1 + 1/\sqrt{3}} + \frac{\pi}{3} \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{\alpha^2}{1 + \sqrt{3}} - \frac{\pi}{6} \right) = \frac{\alpha}{4} - \frac{\pi}{12}.$$

Solution 3.

a) Le domaine $\mathscr{D}$ est délimité par les droites verticales d'équation respective $x = -1$ et $x = 0$, et les droites obliques d'équation respective $y = -x$ et $y = 6 - x$:



b)

$$\det J_\Phi(u, v) = \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial u}(-u) & \frac{\partial}{\partial v}(-u) \\ \frac{\partial}{\partial u}(u + 3v) & \frac{\partial}{\partial v}(u + 3v) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = -3.$$

c)

$$\begin{aligned}
\Phi(u, v) \in \mathscr{D} \quad &\Leftrightarrow \quad (-u, u + 3v) \in \mathscr{D} \\
&\Leftrightarrow \quad -1 \le -u \le 0 \quad \text{et} \quad -(-u) \le u + 3v \le 6 - (-u) \\
&\Leftrightarrow \quad 0 \le u \le 1 \quad \text{et} \quad 0 \le 3v \le 6 \\
&\Leftrightarrow \quad 0 \le u \le 1 \quad \text{et} \quad 0 \le v \le 2 \\
&\Leftrightarrow \quad (u, v) \in \Delta = [0, 1] \times [0, 2]
\end{aligned}$$

d) D'après la formule de changement de variables,

$$I = \iint_{\mathscr{D}=\Phi(\Delta)} f(x,y)\,dx\,dy = \iint_{\Delta} f(\Phi(u,v))|\det J_\Phi(u,v)|\,du\,dv$$

avec $f(x,y) = (x^2+xy)\mathrm{e}^{x+y} = x(x+y)\mathrm{e}^{x+y}$.
Or $f(\Phi(u,v)) = (-u)(-u+(u+3v))\mathrm{e}^{-u+(u+3v)} = -3uv\mathrm{e}^{3v}$ et $|\det J_\Phi(u,v)| = 3$, donc

$$I = -9\iint_{\Delta} uv\mathrm{e}^{3v}\,du\,dv = -9\int_0^1 u\,du \times \int_0^2 v\mathrm{e}^{3v}\,dv.$$

Pour la première intégrale, $\displaystyle\int_0^1 u\,du = \left[\frac{u^2}{2}\right]_0^1 = \frac{1}{2}$.
La deuxième intégrale s'évalue avec une intégration par parties,

$$\int_0^2 v\mathrm{e}^{3v}\,dv = \left[v\frac{\mathrm{e}^{3v}}{3}\right]_0^2 - \int_0^2 \frac{\mathrm{e}^{3v}}{3}\,dv = \frac{2\mathrm{e}^6}{3} - \left[\frac{\mathrm{e}^{3v}}{9}\right]_0^2 = \frac{2\mathrm{e}^6}{3} - \frac{\mathrm{e}^6-1}{9} = \frac{5\mathrm{e}^6+1}{9}$$

Et donc $I = -\dfrac{5\mathrm{e}^6+1}{2}$.

Solution 4.

a) Le lagrangien du problème d'optimisation sous contrainte est défini par

$$L(x,y,\lambda) = f(x,y) - \lambda g(x,y) = xy - \lambda\left(x^2+y^2-1\right).$$

Ses points critiques vérifient les équations

$$\left\{\begin{array}{l} \frac{\partial L}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial y} = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial \lambda} = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} y - 2\lambda x = 0 \\ x - 2\lambda y = 0 \\ x^2+y^2-1 = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} y = 2\lambda x \\ x(1-4\lambda^2) = 0 \\ x^2(1+4\lambda^2) = 1. \end{array}\right.$$

Les solutions de la deuxième équation sont $x = 0$ ou $\lambda^2 = \frac{1}{4}$. Or $x = 0$ ne peut pas être solution de la troisième équation, donc

$$\left\{\begin{array}{l} y = 2\lambda x \\ \lambda^2 = \frac{1}{4} \\ 2x^2 = 1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} \lambda = \pm\frac{1}{2} \\ x = \pm\frac{1}{\sqrt{2}} \\ y = 2\lambda x. \end{array}\right.$$

Par conséquent, $(x_1,y_1,\lambda_1) = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{2}\right)$ et $(x_2,y_2,\lambda_2) = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{2}\right)$ sont les seules solutions avec $x \geq 0$.

b) Pour $i \in \{1,2\}$, la matrice hessienne de L_i en (x_i,y_i) est

$$H_{L_i} = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 L_i}{\partial x^2}(x_i,y_i) & \frac{\partial^2 L_i}{\partial x \partial y}(x_i,y_i) \\ \frac{\partial^2 L_i}{\partial y \partial x}(x_i,y_i) & \frac{\partial^2 L_i}{\partial y^2}(x_i,y_i) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2\lambda_i & 1 \\ 1 & -2\lambda_i \end{pmatrix},$$

soit $H_{L_1} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ et $H_{L_2} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.
Le polynôme caractéristique est

$$P_i(X) = \det(H_{L_i} - X\mathrm{I}_2) = \begin{vmatrix} -2\lambda_i - X & 1 \\ 1 & -2\lambda_i - X \end{vmatrix} = (2\lambda_i + X)^2 - 1.$$

Alors

$$P_i(X) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (2\lambda_i + X)^2 = 1 \quad \Leftrightarrow \quad 2\lambda_i + X = \pm 1 \quad \Leftrightarrow \quad X = \pm 1 - 2\lambda_i.$$

Et donc les valeurs propres sont :

— pour H_{L_1} (avec $\lambda_1 = \frac{1}{2}$), $X = \pm 1 - 1$ c'est à dire 0 et -2,

— pour H_{L_2} (avec $\lambda_2 = -\frac{1}{2}$), $X = \pm 1 + 1$ c'est à dire 2 et 0.

c) Pour chacun des points, il y a une valeur propre nulle donc la caractérisation faible n'est pas concluante. Par conséquent, il faut essayer la caractérisation forte.
Le gradient de g est $\vec{\nabla} g(x,y) = \begin{pmatrix} \frac{\partial g}{\partial x}(x,y) \\ \frac{\partial g}{\partial y}(x,y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x \\ 2y \end{pmatrix}$.

— En $(x_1, y_1) = (\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})$:
Le gradient est $\vec{\nabla} g(x_1, y_1) = \begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ \sqrt{2} \end{pmatrix}$. Un vecteur orthogonal au gradient est alors $\begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ -\sqrt{2} \end{pmatrix}$, et plus généralement, il est de la forme $\vec{v} = \begin{pmatrix} r \\ -r \end{pmatrix}$ avec $r \in \mathbb{R}$. Pour $r \neq 0$, la forme quadratique

$$Q(\vec{v}) = \vec{v} \cdot (H_{L_1} \vec{v}) = \begin{pmatrix} r & -r \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r \\ -r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r & -r \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2r \\ 2r \end{pmatrix} = -4r^2 < 0.$$

Donc il s'agit d'un maximum sous contrainte.

— En $(x_2, y_2) = (\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}})$:
Le gradient est $\vec{\nabla} g(x_2, y_2) = \begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ -\sqrt{2} \end{pmatrix}$, et ses vecteurs orthogonaux sont de la forme $\vec{v} = \begin{pmatrix} r \\ r \end{pmatrix}$ avec $r \in \mathbb{R}$. Pour $r \neq 0$, la forme quadratique

$$Q(\vec{v}) = \vec{v} \cdot (H_{L_2} \vec{v}) = \begin{pmatrix} r & r \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r \\ r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r & r \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2r \\ 2r \end{pmatrix} = 4r^2 > 0.$$

Et donc, il s'agit d'un minimum sous contrainte.