

EXAMEN DE MATHÉMATIQUES
Semestre 5 – jeudi 11 janvier 2024

Durée : 1h 30min

Documents, calculatrices et téléphones interdits.
Les réponses non justifiées ne vaudront pas de point.

Les exercices sont indépendants et le barème n'est donné qu'à titre indicatif.

Exercice 1. (3 points)

Soit le domaine $\mathcal{D} = [0, 1] \times [0, 1]$.

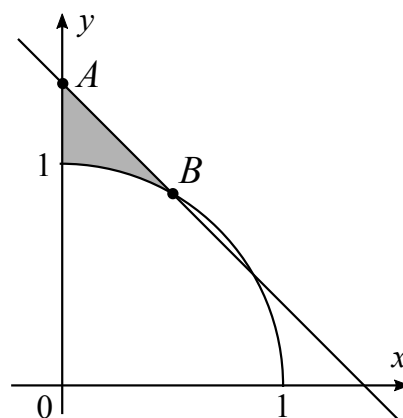
- a) Calculer $I = \iint_{\mathcal{D}} \frac{y}{1+x} dx dy$.
- b) Calculer $J = \iint_{\mathcal{D}} \frac{1}{\sqrt{1+x+y}} dx dy$.

Exercice 2. (5 points)

Soit le domaine $\mathcal{D}$ représenté par la partie grisée sur la figure. Il est délimité par l'axe des ordonnées, la droite (AB) , et le cercle de rayon 1 centré en l'origine. Les coordonnées cartésiennes du point A sont $(0, \alpha)$ avec $\alpha = \frac{1+\sqrt{3}}{2}$, et celles de B sont $(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2})$.

- a) Déterminer l'équation cartésienne de la droite (AB) .
- b) Calculer l'intégrale $I = \iint_{\mathcal{D}} y dx dy$.
- c) Montrer que les coordonnées polaires r et θ d'un point M sur la droite (AB) vérifient la relation

$$r = \rho(\theta) = \frac{\alpha}{\sin \theta + \cos \theta}.$$
- d) Avec une intégration en coordonnées polaires, montrer que l'aire du domaine $\mathcal{D}$ est $S = \frac{\alpha}{4} - \frac{\pi}{12}$.



Exercice 3. (5 points)

Soit le domaine $\mathcal{D} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid -1 \leq x \leq 0, -x \leq y \leq 6 - x\}$. L'application Φ définie par la relation $\Phi(u, v) = (-u, u + 3v)$ est un $\mathcal{C}^1$ -difféomorphisme de $\mathbb{R}^2$ sur lui-même.

- a) Dessiner $\mathcal{D}$.
- b) Calculer le jacobien de Φ en (u, v) .
- c) A partir de la définition de $\mathcal{D}$, déterminer l'ensemble Δ des couples (u, v) qui vérifient $\Phi(u, v) \in \mathcal{D}$.
- d) Calculer $I = \iint_{\mathcal{D}} (x^2 + xy) e^{x+y} dx dy$ en utilisant le changement de variables Φ .

Exercice 4. (8 points)

Soient les fonctions définies sur $\mathbb{R}^2$ par $f(x, y) = xy$ et $g(x, y) = x^2 + y^2 - 1$. On souhaite trouver les extrema de f sous la contrainte $g(x, y) = 0$ avec la méthode des multiplicateurs de Lagrange. Dans la suite, on se bornera aux solutions avec $x \geq 0$.

- a) Démontrer que les seuls points critiques du lagrangien L , avec x positif, sont $(x_1, y_1, \lambda_1) = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{2}\right)$ et $(x_2, y_2, \lambda_2) = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{2}\right)$.
- b) Pour $i \in \{1, 2\}$, calculer la matrice hessienne H_{L_i} de la fonction $L_i : (x, y) \mapsto L(x, y, \lambda_i)$, ainsi que ses valeurs propres.
- c) Déterminer pour chaque point critique, s'il est associé à un maximum ou un minimum sous contrainte à l'aide de la caractérisation faible (et forte, si nécessaire).