ENSICAEN - 1A Matériaux et Chimie - FISE

TD1 - Systèmes différentiels linéaires

CORRIGE

Exercice 2c

$$\begin{cases} x'(t) = -\frac{1}{2}x(t) + y(t) + \frac{3}{2}z(t) \\ y'(t) = -\frac{3}{2}x(t) + y(t) + \frac{1}{2}z(t) \\ z'(t) = \frac{1}{2}x(t) + y(t) + \frac{1}{2}z(t) \end{cases}$$

Avec $X(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix}$. $A = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & 1 & \frac{3}{2} \\ -\frac{3}{2} & 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 1 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$ on cherche à résoudre X'(t)=AX(t)

On forme le polynôme caractéristique $P_C(\lambda)$ = dét(A - λI_3)
$P_C(\lambda) = \left(-\frac{1}{2} - \lambda\right)\left[(1-\lambda)\left(\frac{1}{2} - \lambda\right) - \frac{1}{2}\right] - \left[\left(-\frac{3}{2}\right)\left(\frac{1}{2} - \lambda\right) - \frac{1}{4}\right] + \frac{3}{2}\left(-\frac{3}{2} - \frac{1}{2}(1-\lambda)\right)$ soit (après calculs) $P_C(\lambda) = -\lambda^3 + \lambda^2 - 2$ ou $P_C(\lambda) = -(\lambda+1)(\lambda^2 - 2\lambda + 2) - (\lambda+1)(\lambda - 1 - i)(\lambda - 1 + i)$ car (-1) est racine évidente. A n'est pas diagonalisable dans R mais est diagonalisable dans C.

On cherche le sev propre associé à $\lambda = -1$: E_{-1}

Les vecteurs propres de ce sev vérifient les équations suivantes : $\begin{cases} -\frac{1}{2}x + y + \frac{3}{2}z = -x \\ -\frac{3}{2}x + y + \frac{1}{2}z = -y \\ \frac{1}{2}x + y + \frac{1}{2}z = -z \end{cases}$ soit $\begin{cases} \frac{1}{2}x + y + \frac{3}{2}z = 0 \\ -\frac{3}{2}x + 2y + \frac{1}{2}z = 0 \end{cases}$ soit $\begin{cases} x + 2y + 3z = 0 \\ -3x + 4y + z = 0 \end{cases}$ soit $\begin{cases} x = -z \\ y = -z \end{cases}$, ils appartiennent à une droite vectorielle dont un générateur est $V_{-1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$: E_{-1}=vect(V_{-1})

On cherche le sev propre associé à $\lambda = 1 + i$: E_{1+i}

Les vecteurs propres de ce sev vérifient les équations suivantes : $\begin{cases} -\frac{1}{2}x + y + \frac{3}{2}z = (1+i)x \\ -\frac{3}{2}x + y + \frac{1}{2}z = (1+i)y \\ \frac{1}{2}x + y + \frac{1}{2}z = (1+i)z \end{cases}$

$\begin{cases} -(\frac{3}{2} + i)x + y + \frac{3}{2}z = 0 \\ -\frac{3}{2}x - iy + \frac{1}{2}z = 0 \\ \frac{1}{2}x + y + (-\frac{1}{2} - i)z = 0 \end{cases}$ soit $\begin{cases} -(\frac{3}{2} + i)x + (\frac{-iz+3ix}{2}) + \frac{3}{2}z = 0 \\ y = (-iz + 3ix)/2 \\ \frac{1}{2}x + (\frac{-iz+3ix}{2}) + (-\frac{1}{2} - i)z = 0 \end{cases}$ soit $\begin{cases} \left(-\frac{3}{2} + \frac{i}{2}\right)x + (\frac{3}{2} - \frac{i}{2})z = 0 \\ y = \frac{-iz+3ix}{2} \\ \frac{1}{2}x + \frac{3i}{2}x + (-\frac{1}{2} - \frac{3}{2}i)z = 0 \end{cases}$

soit $\begin{cases} x = z \\ y = ix \end{cases}$ appartiennent à une droite vectorielle dont un générateur est $V_{1+i} = \begin{pmatrix} 1 \\ i \\ 1 \end{pmatrix}$: E_{1+i}=vect(V_{1+i})

Comme les valeurs propres sont complexes conjuguées, un vecteur propre associé à (1-i) peut être choisi en prenant le complexe conjugué de V_{1+i} et E_{1-i}=vect(V_{1-i}) avec $V_{1-i} = \overline{V_{1+\imath}} = \begin{pmatrix} 1 \\ -i \\ 1 \end{pmatrix}$

La solution de l'équation homogène est donnée (avec des coefficients complexes) par

$$\begin{pmatrix} x_h(t) \\ y_h(t) \\ z_h(t) \end{pmatrix} = k_1 \exp(-t) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + k_2 \exp((1+i)t) \begin{pmatrix} 1 \\ i \\ 1 \end{pmatrix} + \ k_3 \exp((1-i)t) \begin{pmatrix} 1 \\ -i \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Une base de l'ensemble des solutions est ($e^{-t} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, e^{(1+i)t} \begin{pmatrix} 1 \\ i \\ 1 \end{pmatrix}, \ e^{(1-i)t} \begin{pmatrix} 1 \\ -i \\ 1 \end{pmatrix}$) (le 3ème élément est le conjugué du 2ème) ou on peut choisir une base constituée uniquement de fonctions réelles soit ($e^{-t} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \mathrm{Re}(e^{(1+i)t} \begin{pmatrix} 1 \\ i \\ 1 \end{pmatrix}), \ \mathrm{Im}(e^{(1+i)t} \begin{pmatrix} 1 \\ +i \\ 1 \end{pmatrix})$) car si $X_1(t)$ et $\overline{X_1}(t)$ sont des solutions linéairement indépendantes alors Re(X_1(t)) et Im(X_1(t)) le sont aussi (ici, on a $X_1(t) = e^{(1+i)t} \begin{pmatrix} 1 \\ i \\ 1 \end{pmatrix}$) et ($e^{-t} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, e^t \begin{pmatrix} \cos(t) \\ -\sin(t) \\ \cos(t) \end{pmatrix}, e^t \begin{pmatrix} \sin(t) \\ \cos(t) \\ \sin(t) \end{pmatrix}$) est une base possible de l'ensemble des solutions (réelles), ce qui conduit à une solution générale de l'équation homogène :

$$\begin{pmatrix} x_h(t) \\ y_h(t) \\ z_h(t) \end{pmatrix} = k_1 \, e^{-t} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + k'_2 \, e^t \begin{pmatrix} \cos(t) \\ -\sin(t) \\ \cos(t) \end{pmatrix} + \ k'_3 \, e^t \begin{pmatrix} \sin(t) \\ \cos(t) \\ \sin(t) \end{pmatrix}$$