

Systemes asservis

GPSE - 1A

2023-2024

Tomas Ménard
tomas.menard@ensicaen.fr

ENSICAEN

1. Problématique
2. Modélisation
3. Les outils
4. Synthèse des PID

1. Problématique

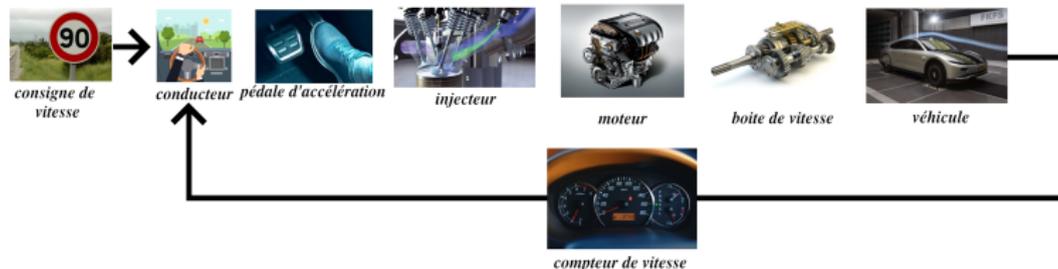
1.1 Vocabulaire

1.2 La démarche

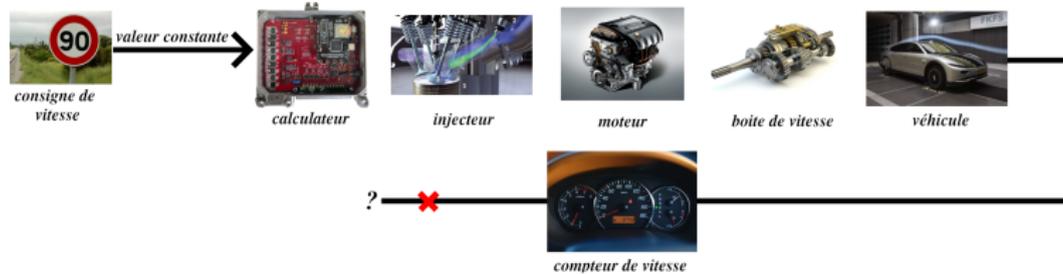
On désire qu'une voiture roule à une vitesse constante donnée.

Il est nécessaire d'adapter la commande envoyée à la pédale d'accélération car la vitesse change au cours du trajet en fonction de la pente, du vent ou de la qualité de la route.

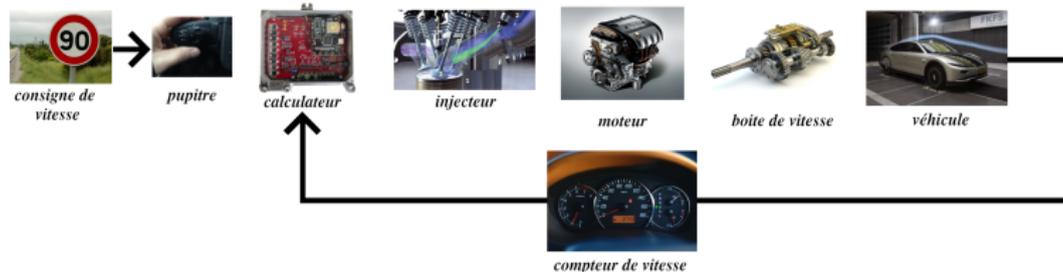
Sur la plupart des voitures, c'est le conducteur qui s'en charge :



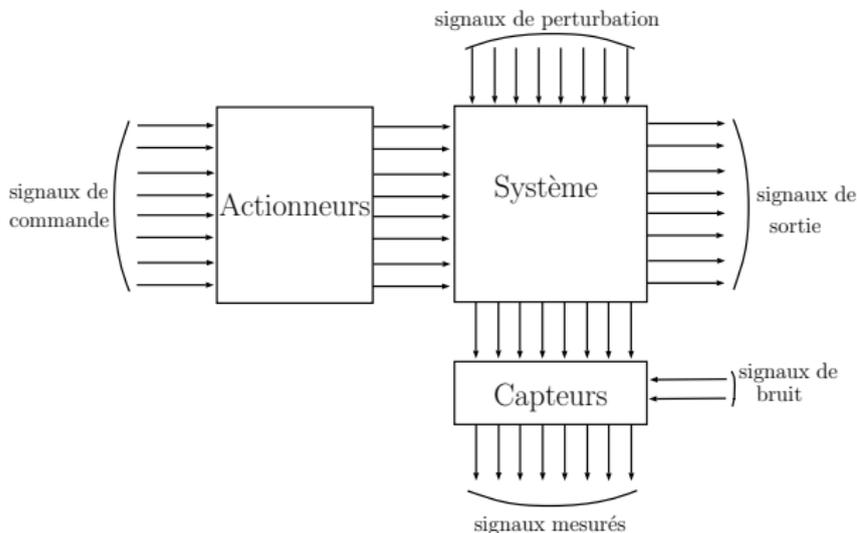
Commande en boucle ouverte :



Commande en boucle fermée :

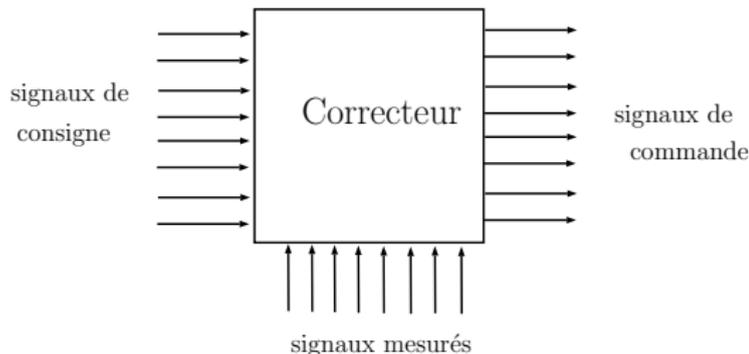


► Le système à commander



- Les signaux de sortie doivent être proches des signaux désirés (**référence** ou **consigne**) malgré la présence de signaux de perturbations exogènes et souvent non mesurables.
- Les signaux de commande associés doivent avoir des valeurs acceptables par les actionneurs.

- ▶ Le système de commande



- ▶ Le correcteur génère les signaux de commande permettant de répondre aux performances demandées. Il utilise les signaux de consigne et les signaux mesurés (sortie + bruits de mesure).
- ▶ L'algorithme qui permet d'obtenir ces signaux de commande est appelé **loi de commande**.



drone



Convertisseur dc-dc



Bras robotisé



Bateau autonome



Bioréacteur

1. Problématique

1.1 Vocabulaire

1.2 La démarche

La connaissance du système à commander :

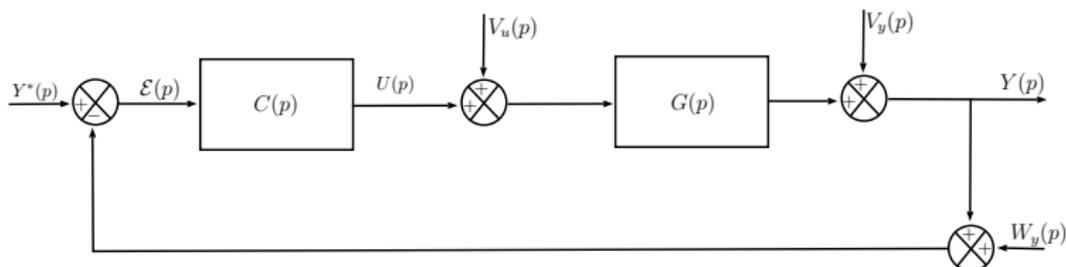
- ▶ Relations entre les différents signaux. Lois physiques régissant le comportement du système.
- ▶ Connaissance des limitations physiques du système à commander (actionneurs, capteurs).
- ▶ Origine et effet des perturbations.



Modèle Mathématique

principal outil de modélisation :
équations différentielles et fonctions de transfert

- Pour les systèmes SISO (Single Input, Single Output), nous pouvons représenter l'asservissement avec un retour unitaire et les différents signaux de perturbations l'affectant.



- $Y^*(p)$: consigne
- $U(p)$: commande
- $Y(p)$: sortie
- $\mathcal{E}(p)$: erreur de suivi
- $V_u(p)$: perturbation d'entrée (basses pulsations)
- $V_y(p)$: perturbation de sortie (basses pulsations)
- $W_y(p)$: bruit de capteur (hautes pulsations)

Dans l'idéal, l'objectif d'un asservissement serait d'avoir la sortie égale à la consigne

$$y(t) = y^*(t), \quad \forall t$$

Cependant cet objectif est impossible à atteindre en pratique, aussi, cet objectif devient :

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} |y(t) - y^*(t)| = 0$$

Ce qu'on peut réécrire de la façon suivante.

Asservissement

L'objectif de l'asservissement est la poursuite par la sortie d'une consigne variable dans le temps.

Exemple

Reproduction des gestes d'un chirurgien par un robot distant.

En pratique il y a généralement des perturbations qui agissent sur le système.

Régulation

Dans le cas d'une consigne constante, le problème de régulation consiste à rejeter les perturbations.

Exemple

Maintenir la vitesse d'une véhicule quelles que soient les perturbations (profil de la route, vent, etc.)

On considère ici deux types de perturbation :

- ▶ Perturbation de sortie :
 - ▶ une vague de forte amplitude qui frappe un bateau et le décale d'un coup.
 - ▶ rafale de vent qui frappe une antenne et décale la position angulaire du radar.
- ▶ Perturbation de commande :
 - ▶ friction pour un moteur qui induit un couple résistant
 - ▶ pente pour la vitesse d'une voiture.

En plus de suivre la consigne et de rejeter les perturbations agissant sur notre système, on ajoutera souvent une contrainte sur la commande générée par notre régulateur.

Ces contraintes peuvent viser plusieurs objectifs, par exemple :

- ▶ réduire la dépense énergétique (sensibilité aux bruits de mesure)
- ▶ limiter les efforts des actionneurs (gradient de la commande)

Bien sur cette contrainte supplémentaire ne doit pas empêcher l'objectif premier d'un asservissement.

Écriture du cahier des charges

- ▶ Dynamique souhaitée (dépassement, temps de réponse,...)
- ▶ Erreur tolérable (précision statique souhaitée,...)
- ▶ Signaux de commande admissible (amplitude, gradient,...)
- ▶ Garantie de bon fonctionnement (stabilité, performances)

Synthèse de la loi de commande

- 1) Algorithme,
- 2) Choix des paramètres à partir du modèle du procédé (**modèle de commande**),
- 3) Vérification des performances sur le modèle (**modèle de simulation**),
- 4) Validation sur le système à commander.



Procédure Itérative

2. Modélisation

2. Modélisation

2.1 Le modèle de commande et le modèle de simulation

2.2 Modèle du premier ordre

2.3 Modèle du second ordre

2.4 Perturbations

- ▶ Le modèle de connaissance est obtenu à partir des équations physiques (il peut être difficile à obtenir dans certains cas, pour des systèmes complexes ou suivant des lois physiques complexes).
- ▶ **Modèle de simulation :**
 - ▶ Le plus complet possible.
 - ▶ Parfois non linéaire.
- ▶ **Modèle de commande :**
 - ▶ Modèle adapté à l'algorithme de synthèse de loi de commande (par exemple modèle linéaire obtenu par linéarisation autour d'un point de fonctionnement).
 - ▶ Élimination des dynamiques hors bande passante.

Le système considéré est un moteur à aimants permanents. Le circuit d'induit est assimilable à une résistance en série avec une self inductance.

Notation :

- ▶ $u(t)$: tension appliquée à l'induit,
- ▶ $C_r(t)$: couple résistant agissant sur l'arbre moteur,
- ▶ $i(t)$: courant dans l'induit,
- ▶ J : moment d'inertie du rotor,
- ▶ f : coefficient de frottement visqueux du rotor,
- ▶ $\theta(t)$: angle du moteur,
- ▶ $\omega(t)$: vitesse du moteur.

Valeurs numériques :

Symbole	Quantité	Valeur	Unité
L	Inductance	5	mH
R	Résistance	5.8	Ohm
J	Moments d'inertie	$15 \cdot 10^{-7}$	SI
f	Frottement visqueux	$0.5 \cdot 10^{-6}$	SI
$K_c = K_e$	Gain	$24 \cdot 10^{-3}$	SI

Les équations régissant le mouvement du moteur sont donnés par

$$L \frac{di(t)}{dt} + Ri(t) + K_e \omega(t) = u(t)$$
$$J \frac{d^2\theta(t)}{dt^2} = J \frac{d\omega(t)}{dt} = C_m i(t) - C_r(t) - C_f(t) = K_c i(t) - f\omega(t) - C_r(t)$$

En considérant que le couple résistant est nul, établir la fonction de transfert reliant la tension d'induit à la position de l'arbre.

Passage par Laplace avec Conditions Initiales nulles :

$$L \frac{di(t)}{dt} + Ri(t) + K_e \omega(t) = u(t) \quad \Leftrightarrow$$
$$J \frac{d\omega(t)}{dt} = K_c i(t) - f\omega(t)$$

Constante de temps électrique :

$$\tau_e =$$

Constante de temps mécanique :

$$\tau_m =$$

$$\Omega(p) =$$

$$\Omega(p) =$$

Application Numérique :

$$\Omega(p) = \frac{0.024}{7.5 \cdot 10^{-9} p^2 + 8.705 \cdot 10^{-6} p + 5.5818 \cdot 10^{-4}}$$

Ce modèle du second ordre est notre modèle complet.

Si on regarde les pôles :

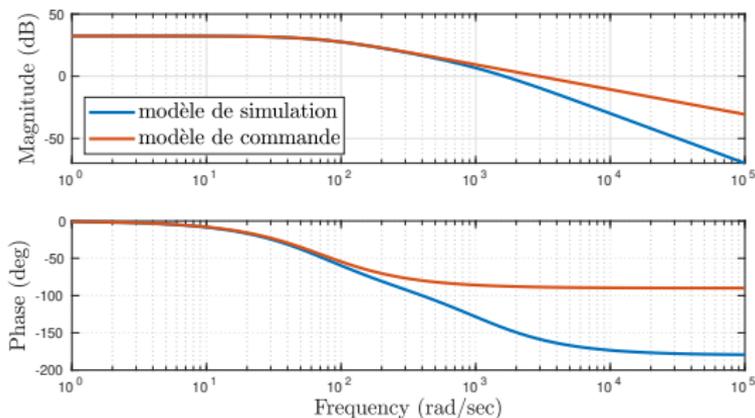
$$p_1 = -1.0895 \cdot 10^3 \quad p_2 = -0.0712 \cdot 10^3$$

on voit que les constantes de temps correspondantes ont des ordres de grandeur différents, en effet $\tau_1 = 0.917 \cdot 10^{-3} \text{ s}$ peut être négligé devant $\tau_2 = 14.044 \cdot 10^{-3} \text{ s}$.

Le modèle complet du second ordre sera notre **modèle de simulation** et le **modèle de commande** sera un premier ordre :

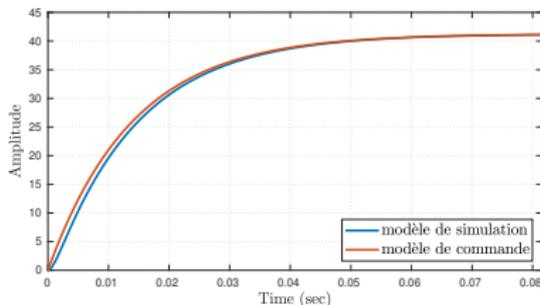
$$\Omega(p) = \frac{0.024/5.818 \cdot 10^{-4}}{\tau_2 p + 1} U(p)$$

Comparaison des réponses fréquentielles :

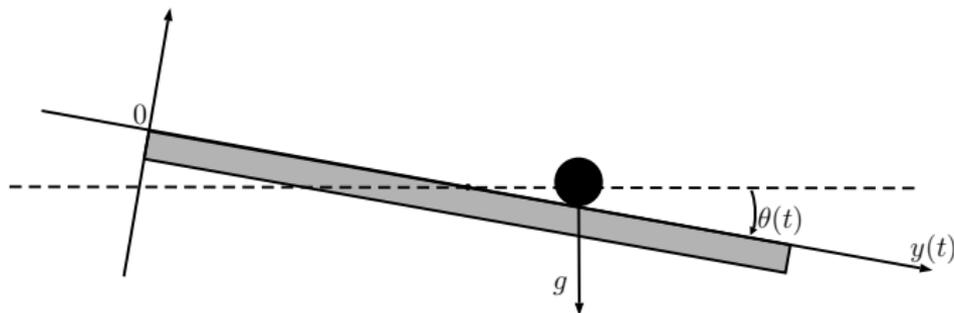


On conserve les propriétés basses pulsations !

Comparaison des réponses temporelles :



- Déplacement d'une bille sur un rail de longueur L sans frottement ni glissement.



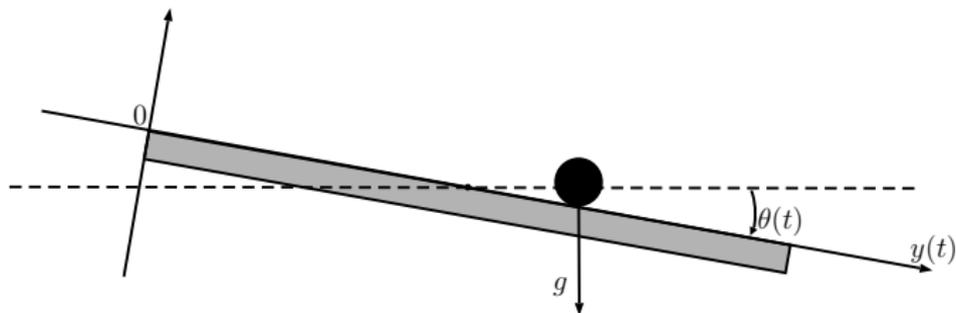
L'équation régissant le mouvement est donnée par :

$$m \frac{d^2 y(t)}{dt^2} =$$

$$\frac{d^2 y(t)}{dt^2} =$$

Point d'équilibre en $\theta_0 = 0$ et $y_0 = \frac{L}{2}$ (rail horizontale, bille au centre du rail).

Linéarisation autour du point d'équilibre : $y(t) = y_0 + \Delta y(t)$, $\theta(t) = \theta_0 + \Delta\theta(t)$.



- **Étape 1** D.L. à l'ordre 1 de la fonction nonlinéaire $f(\theta) = g \sin(\theta)$ au point θ_0 .

$$f(\theta) \approx$$

$$\approx$$

$$\approx$$

- **Étape 2** : On remplace dans l'équation différentielle non linéaire :

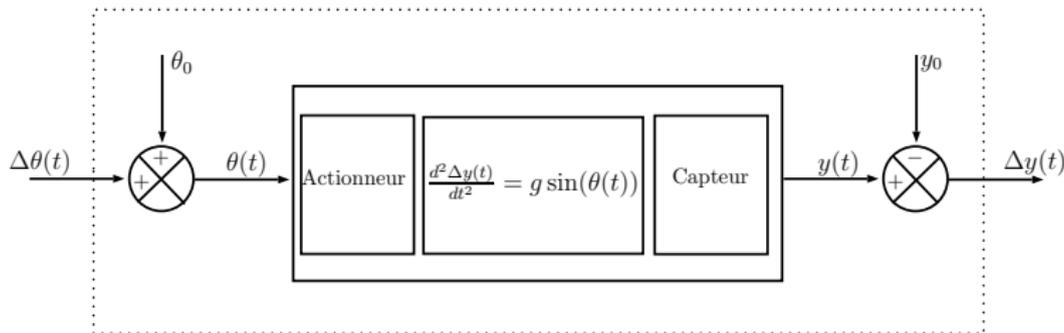
$$\frac{d^2(y_0 + \Delta y(t))}{dt^2} =$$

- **Étape 3** : Simplification :

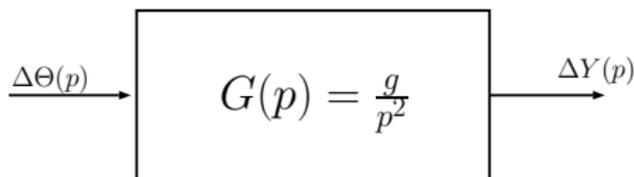
$$\frac{d^2 \Delta y(t)}{dt^2} =$$

- **Étape 4** : Calcul de la fonction de transfert :

$$\frac{\Delta Y(p)}{\Delta \Theta(p)} =$$



La fonction de transfert modélise le système uniquement autour de (θ_0, y_0) :



Attention : en générale on écrit $G(p) = \frac{Y(p)}{\Theta(p)}$ par simplicité, au lieu de $G(p) = \frac{\Delta Y(p)}{\Delta \Theta(p)}$.

2. Modélisation

2.1 Le modèle de commande et le modèle de simulation

2.2 Modèle du premier ordre

2.3 Modèle du second ordre

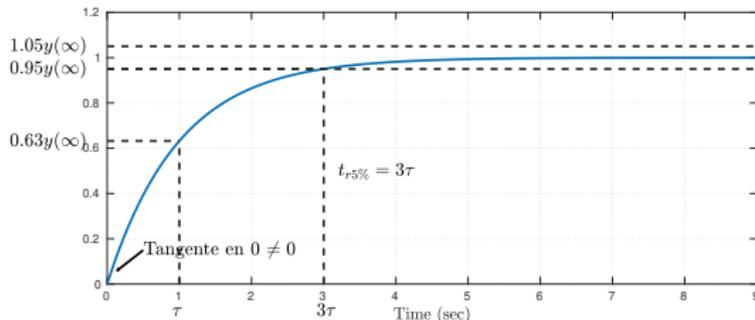
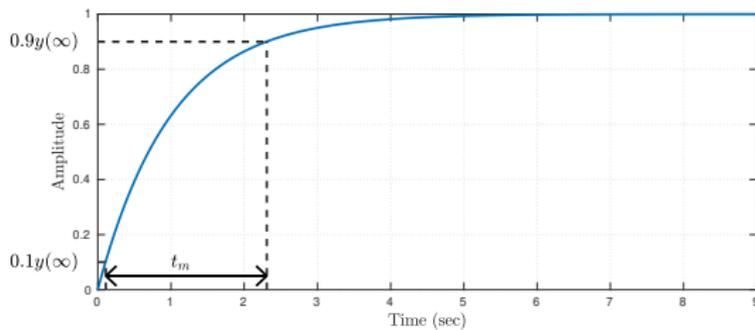
2.4 Perturbations

Modèle : $G(p) = \frac{k}{\tau p + 1}$

► k : gain statique

► τ : constante de temps

Réponse indicielle :



Seul système correctement identifiable avec une réponse indicielle !

2. Modélisation

2.1 Le modèle de commande et le modèle de simulation

2.2 Modèle du premier ordre

2.3 Modèle du second ordre

2.4 Perturbations

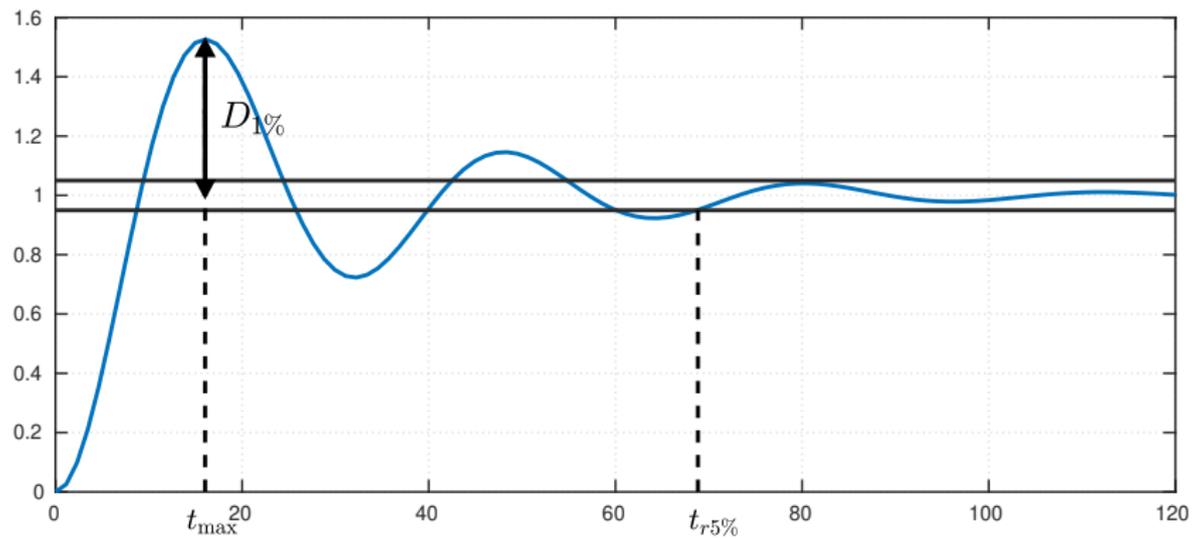
$$\text{Modèle : } G(p) = \frac{k\omega_0^2}{p^2 + 2\zeta\omega_0 p + \omega_0^2}$$

- ▶ k : gains statique
- ▶ ω_0 : pulsation propre
- ▶ ζ : facteur d'amortissement

En fonction de ζ , deux types de réponses :

ζ	Nature des pôles	Nature des modes	Dépassement
> 1	réels	exponentiels amortis	non
$= 1$	réels doubles	exponentiels amortis	non
< 1	complexes conjugués	sinusoïdales amortis	oui

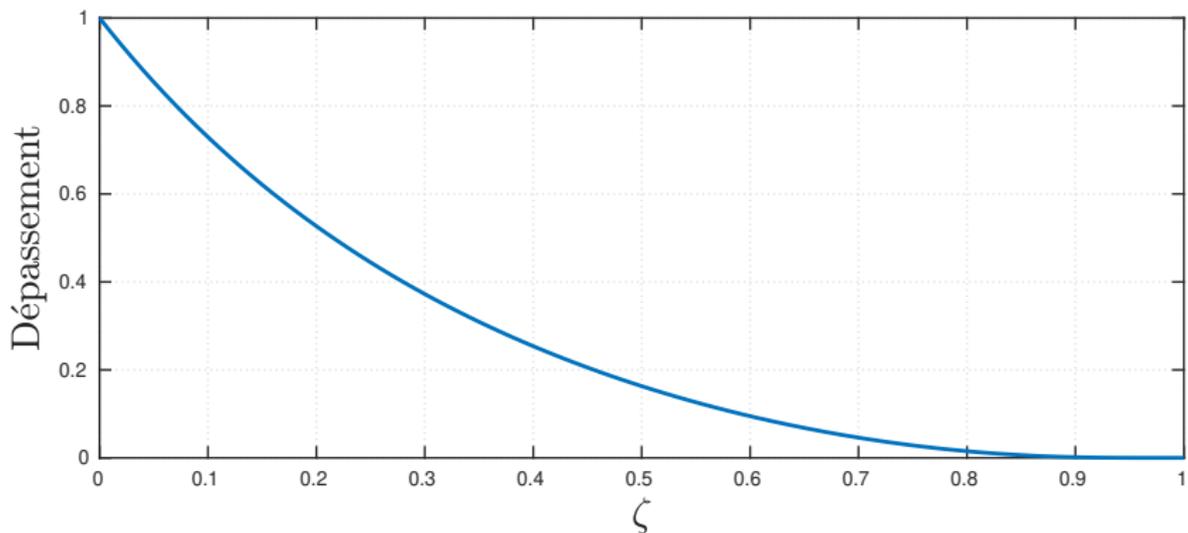
Les deux premières lignes donnent le même type de réponse : réponse de deux premier ordres en série. Seul le troisième cas est intéressant par les possibilités qu'il offre (régime pseudo périodique).



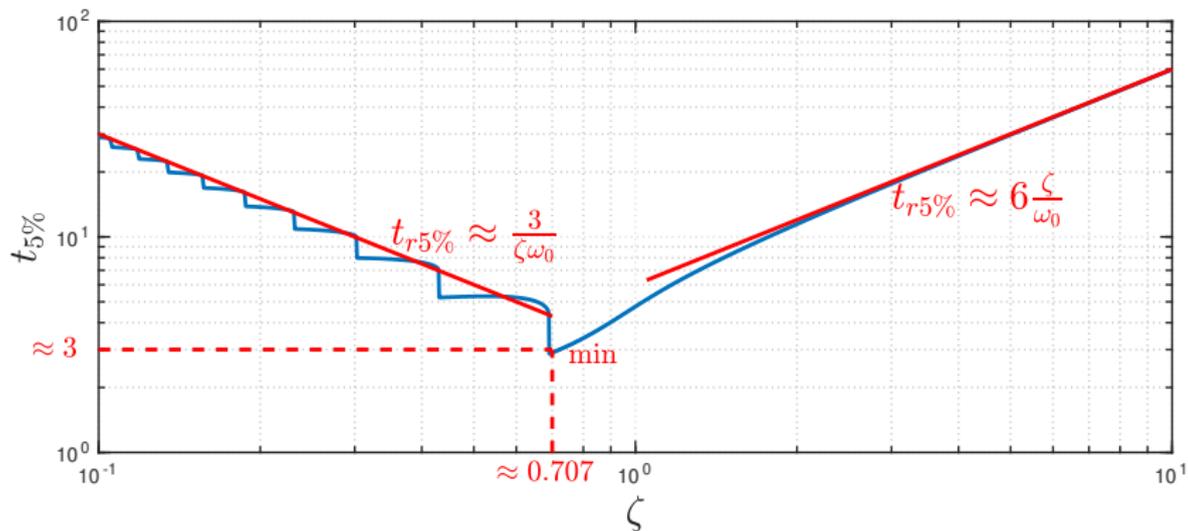
Modèle du second ordre pseudo périodique :

- ▶ Pôles : $p_i = -\zeta\omega_0 \pm \omega_0\sqrt{1-\zeta^2}$
- ▶ Réponse impulsionnelle : $E_0k \left(\frac{1}{\sqrt{1-\zeta^2}} e^{-\zeta\omega_0 t} \sin \left(\omega_0 \sqrt{1-\zeta^2} t \right) \right)$
- ▶ Réponse indicielle : $E_0k \left(1 - \frac{1}{\sqrt{1-\zeta^2}} e^{-\zeta\omega_0 t} \sin \left(\omega_0 \sqrt{1-\zeta^2} t + \varphi \right) \right)$ avec
 $\varphi = \arcsin \left(\sqrt{1-\zeta^2} \right)$
- ▶ Dépassement maximal : $D_1 = E_0k e^{-\frac{\pi\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}}$
- ▶ Gain à la résonance : $Q = \frac{1}{2\zeta\sqrt{1-\zeta^2}}$.

Relation Dépassement/Amortissement :



Temps de réponse à 5% avec approximations :



2. Modélisation

2.1 Le modèle de commande et le modèle de simulation

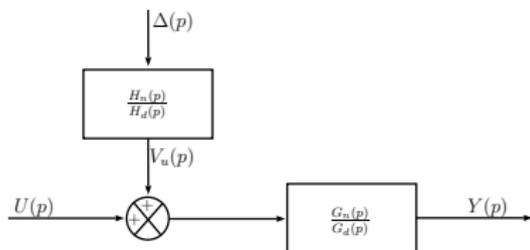
2.2 Modèle du premier ordre

2.3 Modèle du second ordre

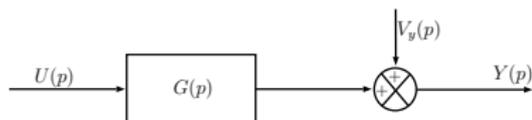
2.4 Perturbations



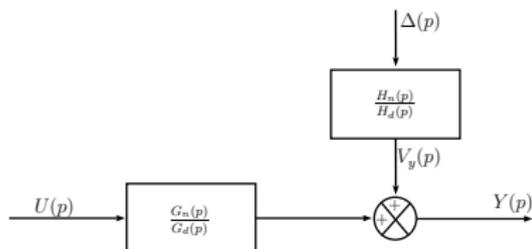
$$Y(p) = G(p)(U(p) + V_u(p))$$



$V_u(p)$ est vu comme un signal généré par un filtre formeur attaqué par une impulsion $\Delta(p)$. La dynamique de cette impulsion est donnée par $H_d(p)$ et on prendra $H_n(p) = v_0$ qui correspondra à l'amplitude de cette perturbation.



$$Y(p) = G(p)U(p) + V_y(p)$$



$V_y(p)$ est vu comme un signal généré par un filtre formeur attaqué par une impulsion $\Delta(p)$. La dynamique de cette impulsion est donnée par $H_d(p)$ et on prendra $H_n(p) = v_0$ qui correspondra à l'amplitude de cette perturbation.

Voici quelques modèles de perturbation possibles :

► échelon : $H_d(p) = p$,

► rampe : $H_d(p) = p^2$,

► sinusoïde de pulsation ω_0 : $H_d(p) = (p^2 + \omega_0^2)$.

3. Les outils

3. Les outils

3.1 Représentations fréquentielles et temporelles

3.2 Les fonctions de sensibilité

3.3 Stabilité

3.4 Marge de Stabilité

Diagramme de Bode

Le plus complet car il représente le module et l'argument de la fonction de transfert étudiée en fonction de la pulsation. Il est par contre difficile de relier le comportement de la BO et de la BF avec ce diagramme.

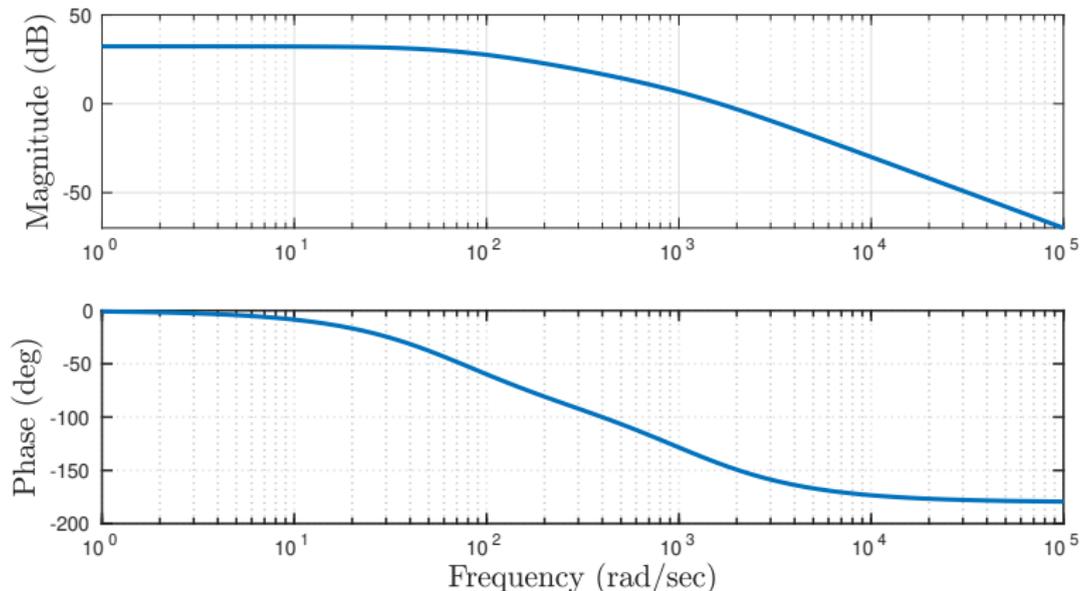


Diagramme de Nyquist

C'est une courbe paramétrée en pulsation qui représente dans le plan complexe le lieu d'une fonction de transfert. En abscisse la partie réelle de la fonction de transfert et en ordonnée sa partie imaginaire. Ce diagramme est le seul qui permet de déterminer la stabilité de la boucle fermée dans tous les cas de figure.

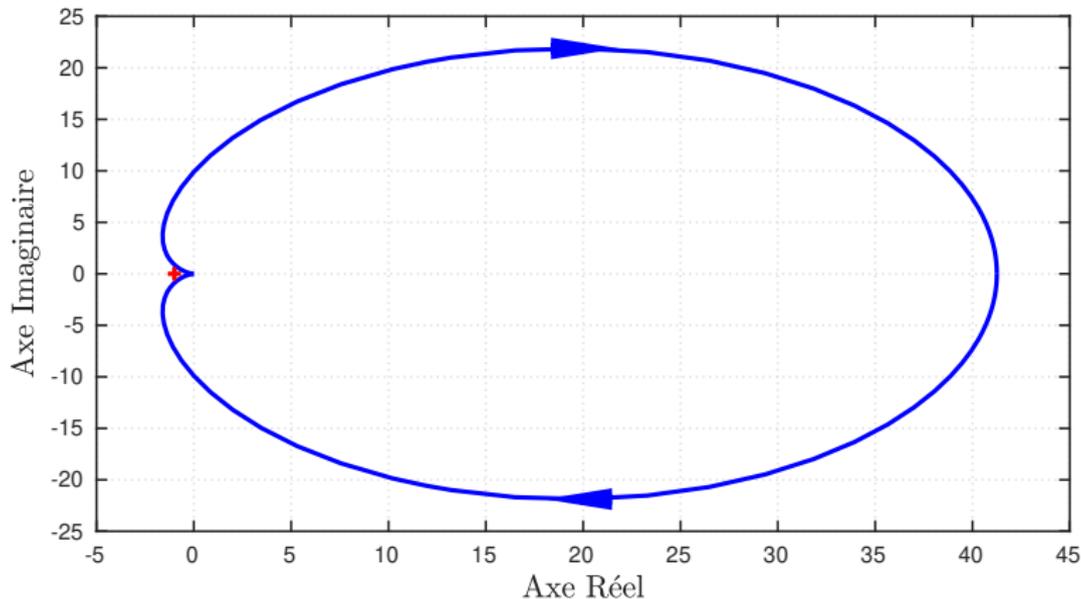
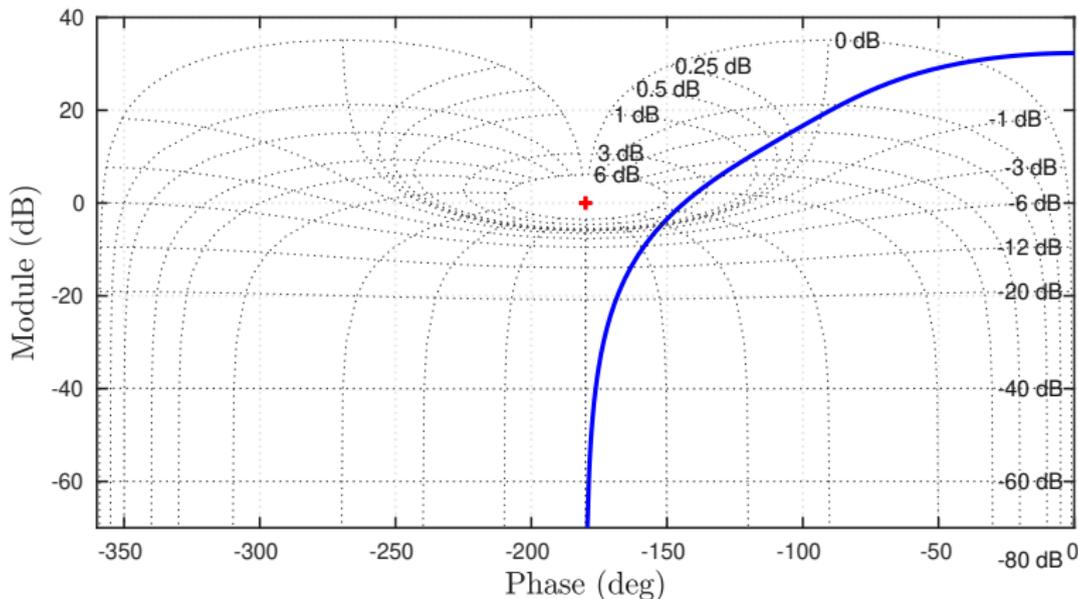


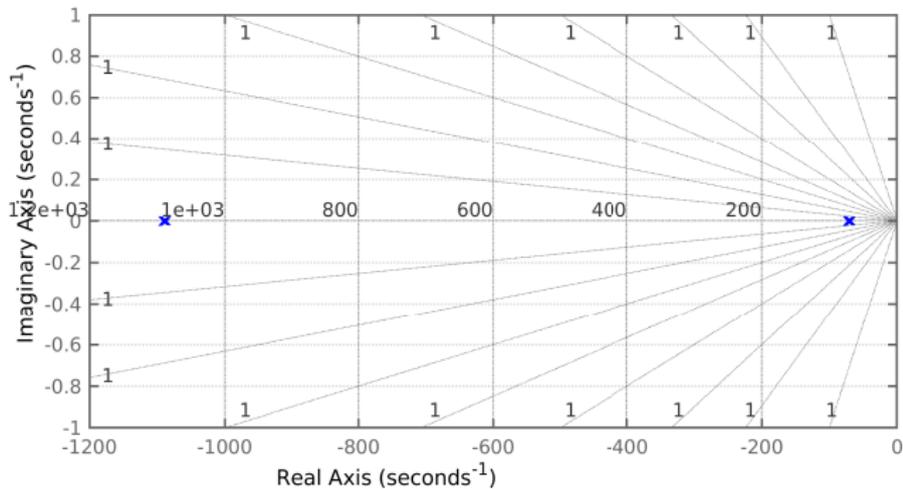


Diagramme de Nichols

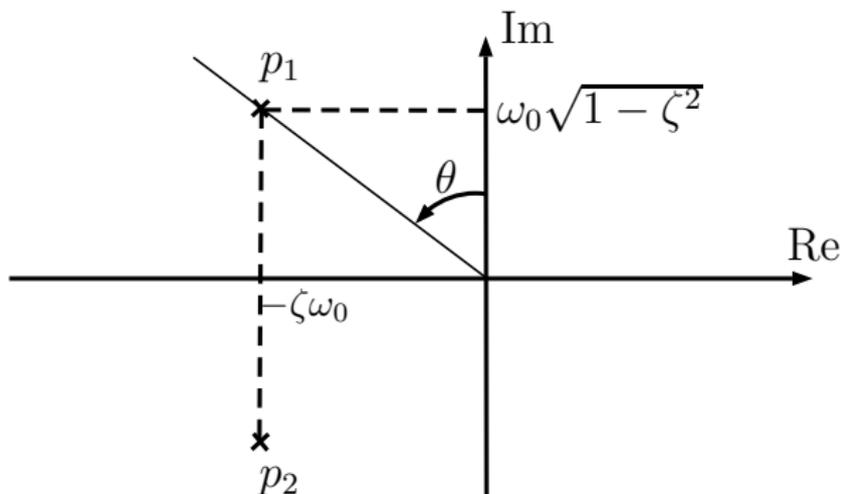
C'est une courbe paramétrée en pulsation donnant le lieu d'une fonction de transfert paramétrée en coordonnées polaires. En abscisse la phase et en deg ordonnée le module en dB.



Cartographie des pôles et des zéros. Un outil dérivé de cette représentation est le lieu d'Evans ou lieu des racines. Cet outil est très pratique pour connaître l'évolution de la dynamique d'un système à commander en fonction du gain proportionnel du correcteur.



Lieux des pôles et amortissement

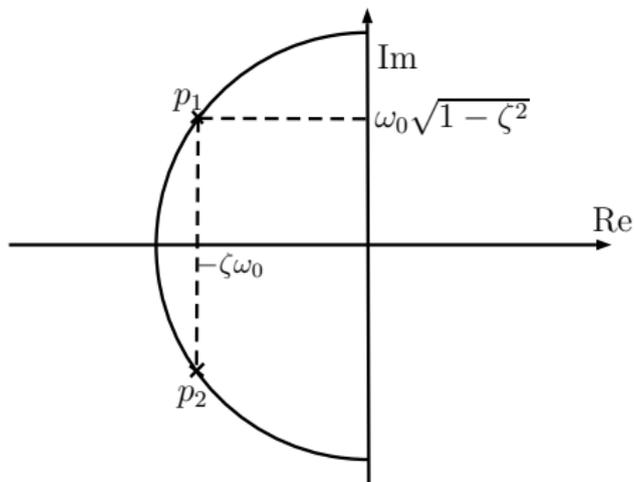


On a $\begin{cases} \sin(\theta) = \\ |p_1| = \end{cases}$

donc $\sin(\theta) =$

- Tous les systèmes présentant le même coefficient d'amortissement ont leur pôles situés sur une même droite dans le plan p.

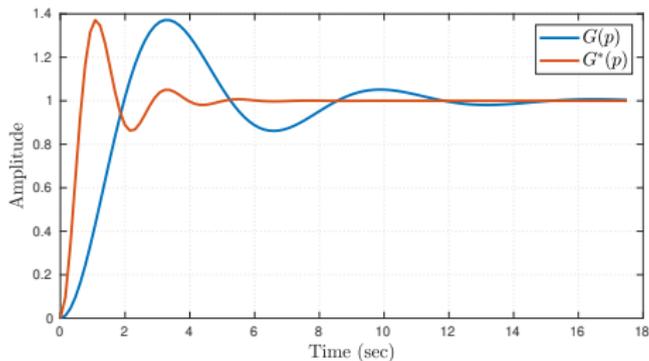
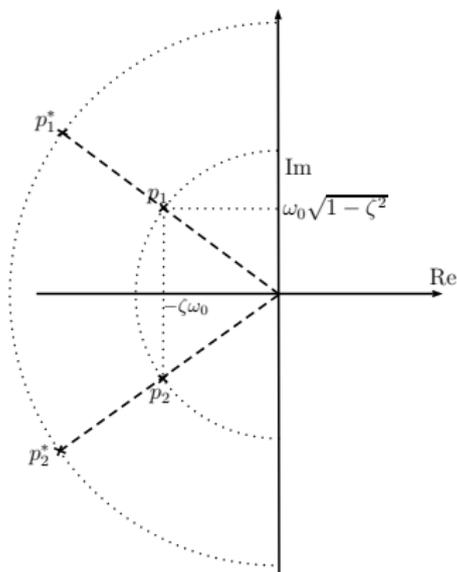
Lieux des pôles et pulsation naturelle



On a

$$|p_1| =$$

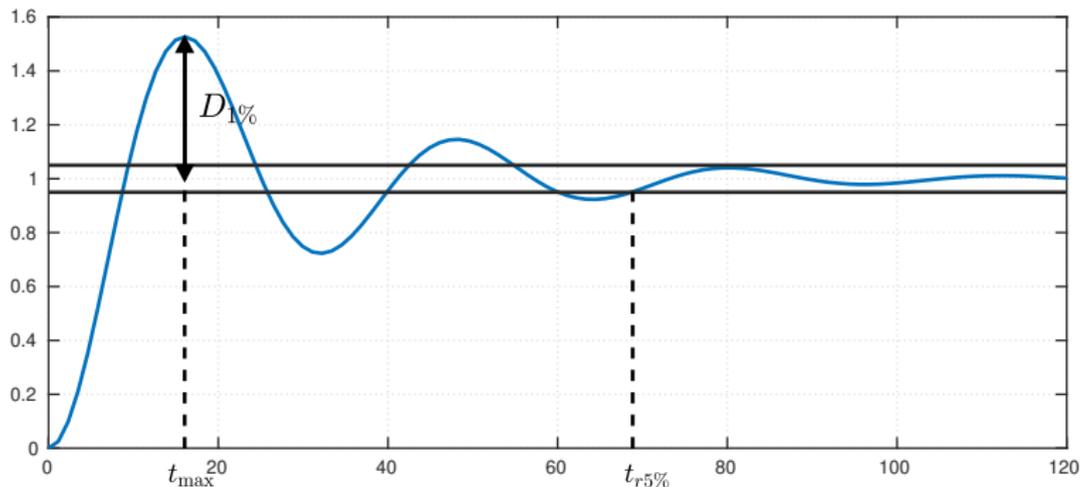
- Tous les systèmes présentant la même pulsation naturelle ont leur pôles sur un cercle de rayon ω_0 .



$$G(p) = \frac{kp_1p_2}{(p - p_1)(p - p_2)} = \frac{k\omega_0^2}{p^2 + 2\zeta\omega_0p + \omega_0^2}$$

$$G^*(p) = \frac{kp_1^*p_2^*}{(p - p_1^*)(p - p_2^*)} = \frac{k(\omega_0^*)^2}{p^2 + 2\zeta\omega_0^*p + (\omega_0^*)^2}$$

- La plus usitée est la réponse indicielle. Elle est souvent utilisée pour spécifier les performances temporelles d'un asservissement. Dans ce cas, on envisage généralement un modèle de comportement du second ordre.



3. Les outils

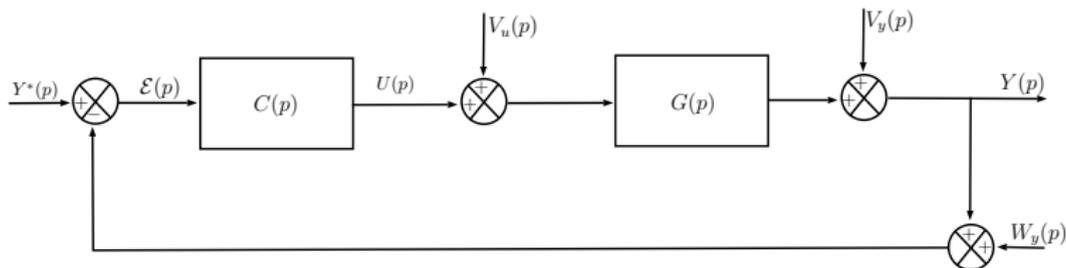
3.1 Représentations fréquentielles et temporelles

3.2 Les fonctions de sensibilité

3.3 Stabilité

3.4 Marge de Stabilité

- Pour les systèmes SISO (Single Input, Single Output), nous pouvons représenter l'asservissement avec un retour unitaire et les différents signaux de perturbations l'affectant.



- $Y^*(p)$: consigne
 - $U(p)$: commande
 - $Y(p)$: sortie
 - $\mathcal{E}(p)$: erreur de suivi
 - $V_u(p)$: perturbation d'entrée (basses pulsations)
 - $V_y(p)$: perturbation de sortie (basses pulsations)
 - $W_y(p)$: bruit de capteur (hautes pulsations)
- On note la fonction de transfert représentant la boucle ouverte par :

$$L(p) = C(p)G(p)$$

- On souhaite maintenant écrire les différentes fonctions de transfert entre la sortie, l'erreur et la commande et les entrées consigne, perturbations d'entrée (ou de commande), de sortie et bruit de mesure.

Entrées \ Sorties	$Y^*(p)$	$V_y(p)$	$V_u(p)$	$W_y(p)$
$Y(p)$	$T(p) = \frac{L(p)}{1+L(p)}$	$S(p)$	$G(p)S(p)$	$-T(p)$
$\mathcal{E}(p)$	$S(p) = \frac{1}{1+L(p)}$	$-S(p)$	$-G(p)S(p)$	$-S(p)$
$U(p)$	$C(p)S(p)$	$-C(p)S(p)$	$-T(p)$	$-C(p)S(p)$

Fonction de sensibilité

$$S(p) = \frac{1}{1+L(p)}$$

$$C(p)S(p)$$

Fonction de sensibilité complémentaire

$$T(p) = \frac{L(p)}{1+L(p)}$$

$$G(p)S(p)$$

L'étude de ces 4 fonctions de transfert permet de caractériser fréquentiellement toutes les relations entrées/sorties de l'asservissement.

- ▶ Avec un retour unitaire, les entrées « perturbations de sortie » et « consigne » donnent les mêmes fonctions de transfert sur l'erreur de suivi et la sortie, donc il n'est pas nécessaire de les traiter séparément.
- ▶ Ces 4 fonctions de transfert sont souvent appelées fonctions de sensibilité de l'asservissement. Elles sont écrites sous la forme précédente ou sous une forme qui permet de faire le lien entre l'entrée et la sortie concernée :

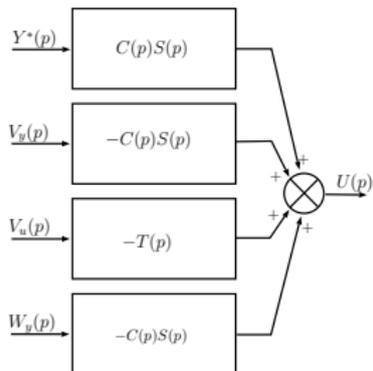
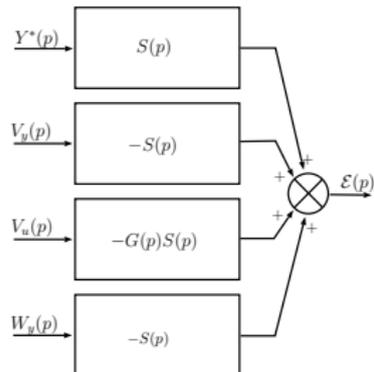
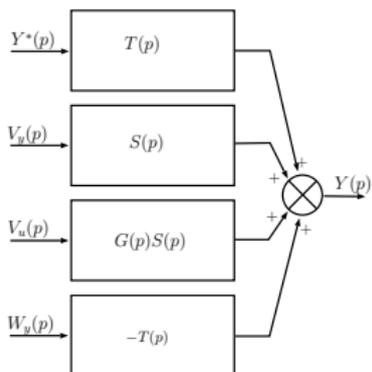
$$T_{v_y \rightarrow y}(p) = S(p)$$

$$T_{w_y \rightarrow u}(p) = -C(p)S(p)$$

$$T_{v_u \rightarrow y}(p) = G(p)S(p)$$

$$T_{y^* \rightarrow y}(p) = T(p)$$

Remarque : pour retrouver leur expression, le plus simple est de partir de la représentation du système sous la forme de schémabloc.



Effet matelas d'eau de $S(p)$

D'après le théorème de Bode (1945), valable pour les systèmes stables ayant un degré relatif strictement inférieur à -1 , on a :

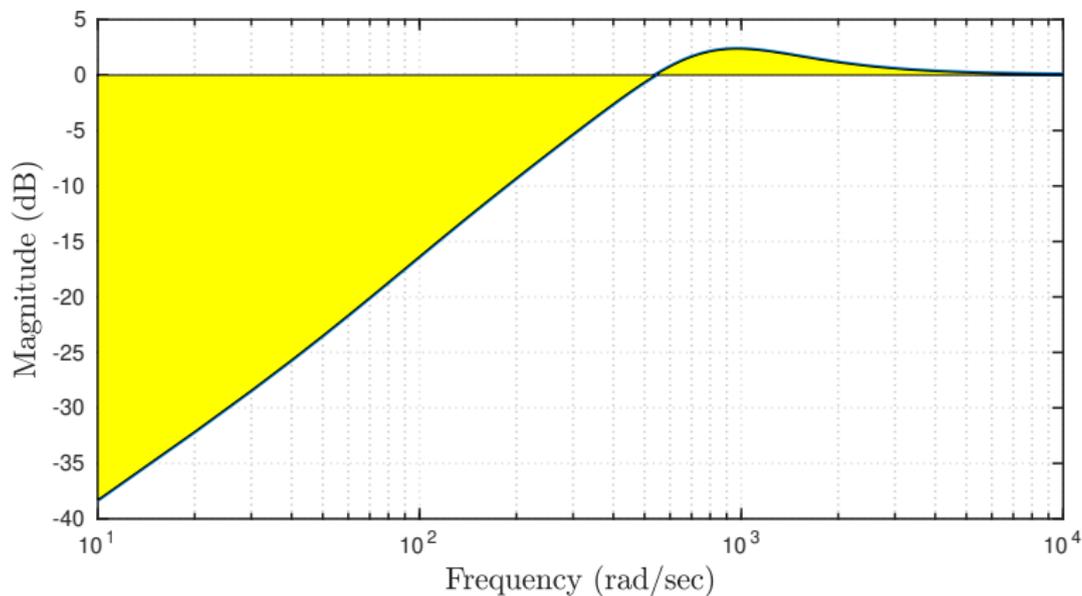
$$\int_0^{+\infty} \log(|S(j\omega)|)d\omega = 0 \Leftrightarrow \int_0^{+\infty} |S(j\omega)|_{dB}d\omega = 0$$

- ▶ Ce Théorème impose donc que le module de $S(j\omega)$ en dB possède une partie en dessous et au dessus de l'axe 0dB.
- ▶ Toute action de correction dans une bande de fréquence aura donc une conséquence inverse dans une autre bande de fréquence.
- ▶ Ce Théorème a été étendu pour les systèmes stables de degré relatif supérieur ou égal à -1 (Kwakernaak & Sivan 1972).
- ▶ Pour les systèmes instables, une extension a été établie par Freudenberg et Looze en 1985 :

$$\int_0^{+\infty} \log(|S(j\omega)|)d\omega = \pi \sum_{i=0}^k Re(p_i)$$

où les p_i , $i = 0, \dots, p$, sont les pôles instables de la boucle ouverte.

Effet matelas d'eau de $S(p)$



- Si on atténue à un endroit, on amplifie à un autre!!!

La boucle ouverte dépend linéairement de $C(p)$ alors que la boucle fermée a une dépendance non linéaire vis-à-vis de $C(p)$. En faisant deux remarques sur la réponse fréquentielle de la BO, il est possible de traduire les contraintes imposées par le cahier des charges sur les fonctions de sensibilité.

L'objectif d'un asservissement est d'obtenir :

$$\blacktriangleright y(t) \rightarrow y^*(t) \Leftrightarrow T(j\omega) \rightarrow \Leftrightarrow L(j\omega) = C(j\omega)G(j\omega) \rightarrow$$

$$V_y(p) \quad S(j\omega) \rightarrow$$

$$\blacktriangleright y(t) \text{ insensible aux perturbations} \Leftrightarrow V_u(p) \quad GS(j\omega) \rightarrow$$

$$W_y(p) \quad T(j\omega) \rightarrow$$

▶ En basses pulsations il faut que

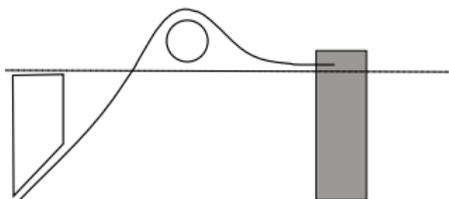
▶ En hautes pulsations il faut que

Remarque : Hautes et basses pulsations sont définies par rapport à la pulsation de coupure du système à commander.

	Hypothèse sur la boucle ouverte	Boucle fermée
En Basses Pulsations	$C(j\omega)G(j\omega) \gg 1$	$\Rightarrow S(j\omega)$
En Hautes Pulsations	$C(j\omega)G(j\omega) \ll 1$	$\Rightarrow S(j\omega)$

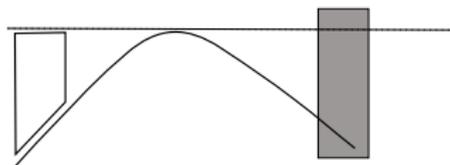
Fonction	Basses Pulsations	Hautes Pulsations
$ C(j\omega)G(j\omega) $	$\gg 1$	$\ll 1$
$ S(j\omega) = \frac{1}{ 1+C(j\omega)G(j\omega) }$		
$ T(j\omega) = \frac{ C(j\omega)G(j\omega) }{ 1+C(j\omega)G(j\omega) }$		
$ G(j\omega)S(j\omega) $		
$ C(j\omega)S(j\omega) $		

$$S = (1 + GC)^{-1}$$



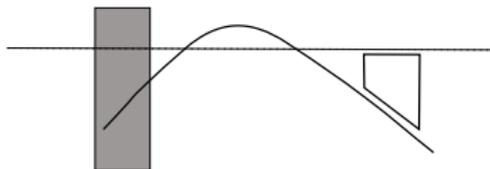
en BP: $S \approx (GC)^{-1}$
 en HP: $S \approx 1$

$$GS = G(1 + GC)^{-1}$$



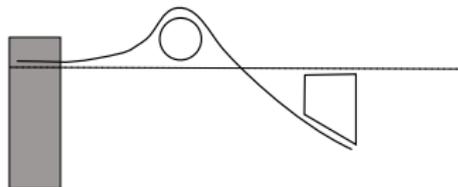
en BP: $GS \approx (C)^{-1}$
 en HP: $GS \approx G$

$$CS = C(1 + GC)^{-1}$$



en BP: $CS \approx (G)^{-1}$
 en HP: $CS \approx C$

$$T = GC(1 + GC)^{-1}$$



en BP: $T \approx 1$
 en HP: $T \approx GC$

- ▶ rectangle gris : ce qui est indépendant du correcteur
- ▶ rectangle blanc : ce que l'on peut modifier à l'aide du correcteur
- ▶ rond blanc : dépassement > 0 dB non contraignable

L'effet de la perturbation d'entrée sur la sortie s'écrit :

$$Y(p) = T_{v_u \rightarrow y} V_u(p) = G(p)S(p)V_u(p)$$

Une condition pour la réjection de cette perturbation est donnée par le théorème de la valeur finale :

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow +\infty} y(t) &= \lim_{p \rightarrow 0} pY(p) \\ &= \\ &= \\ &= \\ &= \\ &= \end{aligned}$$

Il faut donc qu'il y ait un zéro en zéro soit dans $G_n(p)$, soit dans $C_d(p)$.

Un zéro au dénominateur d'une fonction de transfert est appelé intégrateur.

Il faut donc qu'il y ait un intégrateur dans le correcteur !

L'effet de la perturbation de sortie sur la sortie s'écrit :

$$Y(p) = T_{v_y \rightarrow y} V_y(p) = S(p) V_u(p)$$

Une condition pour la réjection de cette perturbation est donnée par le théorème de la valeur finale :

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow +\infty} y(t) &= \lim_{p \rightarrow 0} pY(p) \\ &= \\ &= \\ &= \\ &= \\ &= \end{aligned}$$

Il faut donc qu'il y ait un zéro en zéro soit dans $G_d(p)$, soit dans $C_d(p)$.

Un zéro au dénominateur d'une fonction de transfert est appelé intégrateur.

Il faut donc qu'il y ait un intégrateur soit dans le système à réguler, soit dans le correcteur !

Afin d'avoir une commande raisonnable, il faut regarder les différents effets qui agissent sur la commande. On a :

$$U(p) = T_{y^* \rightarrow u}(p)Y^*(p) + T_{v_y \rightarrow u}(p)V_y(p) + T_{v_u \rightarrow u}(p)V_u(p) + T_{w_y \rightarrow u}(p)W_y(p)$$

Cas de la poursuite.

$$T_{y^* \rightarrow u}(j\omega) = C(j\omega)S(j\omega)$$

- ▶ En basses pulsations :

$$|T_{y^* \rightarrow u}(j\omega)| \approx \frac{1}{|G(j\omega)|}$$

Indépendant du correcteur !

- ▶ En hautes pulsations :

$$|T_{y^* \rightarrow u}(j\omega)| \approx |C(j\omega)| \Rightarrow |C(j\omega)| \approx 0$$

Compatible avec l'objectif de poursuite.

Cas de la sensibilité aux bruits de mesures.

Le bruit étant un signal aléatoire, on utilise la Densité Spectrale de Puissance (DSP) pour analyser son effet sur la commande.

La DSP du signal de commande est donnée par

$$\begin{aligned}\lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} u(t)^2 dt &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} S_u(j\omega) d\omega \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} |T_{w_y \rightarrow u}(j\omega)|^2 S_{w_y}(j\omega) d\omega\end{aligned}$$

Or la DSP du bruit de mesure $S_{w_y}(j\omega)$ est faible en basses pulsations et importante en hautes pulsations.

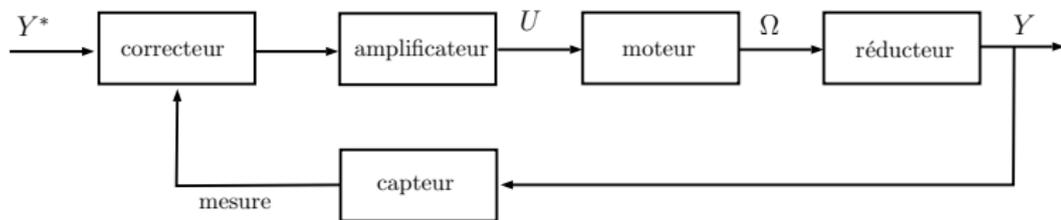
On peut donc se limiter à l'analyse fréquentielle de u en hautes pulsations dans ce cas.

On doit donc avoir en hautes pulsations :

$$|T_{w \rightarrow u}(j\omega)| \approx |C(j\omega)| \approx 0,$$

ce qui est compatible avec l'objectif de poursuite.

Considérons l'asservissement en position d'une poulie. Le système est constitué d'un amplificateur alimentant un moteur à courant continu qui, via un réducteur, entraîne la poulie.



Le système à commander est donné par :

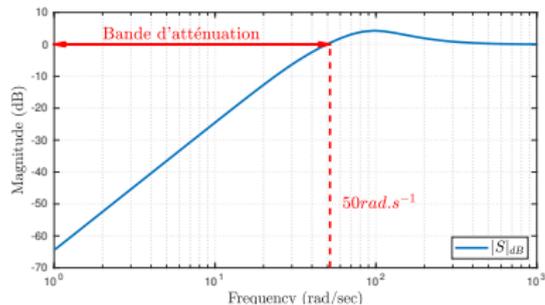
$$G(p) = \frac{235}{p(0.0149p + 1)}$$

Le correcteur synthétisé est donné par :

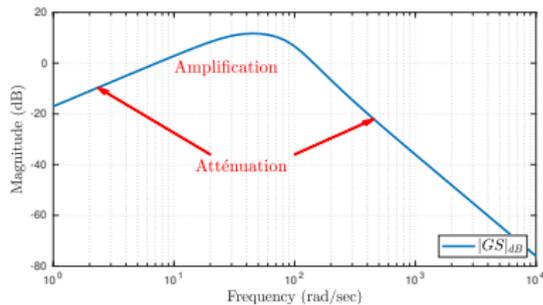
$$C(p) = 424.68 \left(\frac{p + 38.94}{p} \right) \left(\frac{p + 33.94}{p + 116.8} \right) \left(\frac{1}{p + 674.5} \right)$$

Fonctions de sensibilité de l'asservissement :

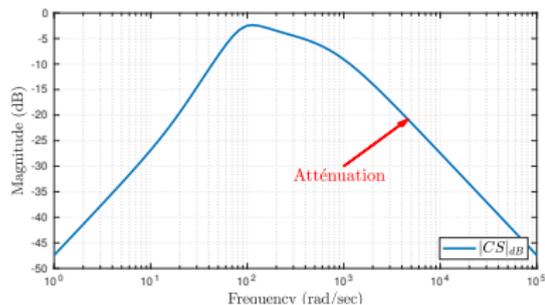
$$S(p) = T_{v_y \rightarrow y}$$



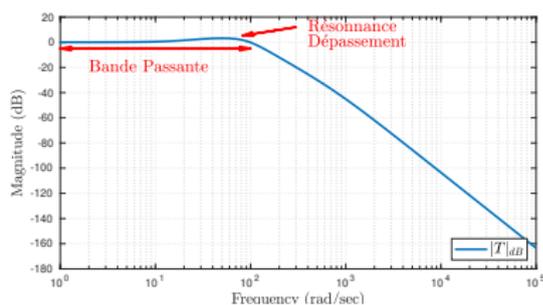
$$GS = T_{v_u \rightarrow y}$$



$$CS = T_{w_y \rightarrow u}$$



$$T = T_{y^* \rightarrow y}$$

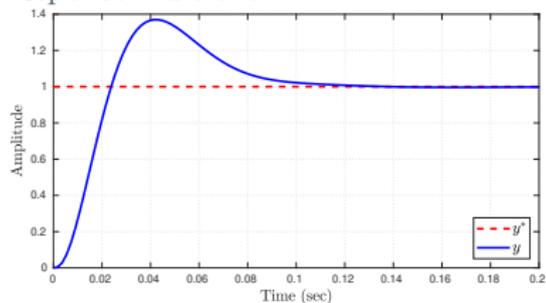


Analyse des fonctions de sensibilité :

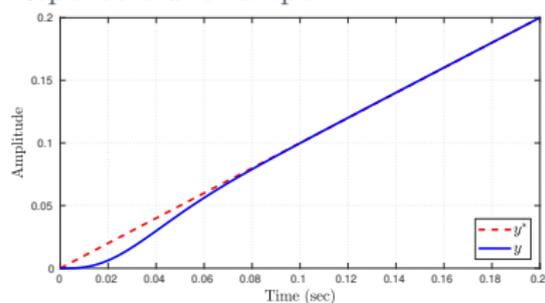
- ▶ S : En basses pulsations, S présente une pente de $+40\text{dB}/\text{dec}$ donc deux zéros à l'origine. Cela autorise le suivi de consigne échelon et rampe sans erreur et le rejet de perturbation de sortie constante ou rampe. La bande d'atténuation nous renseigne sur le temps de réjection de perturbation.
- ▶ GS : En basses pulsations, GS présente une pente de $+20\text{dB}/\text{dec}$ donc un zéro à l'origine (correcteur), cela autorise le rejet de perturbation d'entrée constante. Par contre autour de la pulsation de coupure, une amplification d'un facteur supérieur à 3 apparaît, cela va se retrouver sur le rejet de la perturbation d'entrée.
- ▶ CS : C'est une fonction de transfert passe-bas, ce qui assure une commande insensible aux bruits de mesure. La résonance donne une idée de la dynamique de la commande.
- ▶ T : C'est une fonction de transfert passe-bas, ce qui assure une sortie insensible aux bruits de mesure. La résonance donne une idée du dépassement pour une réponse indicielle (retour unitaire). Le gain statique renseigne sur l'erreur de position.

Performances temporelles de la sortie :

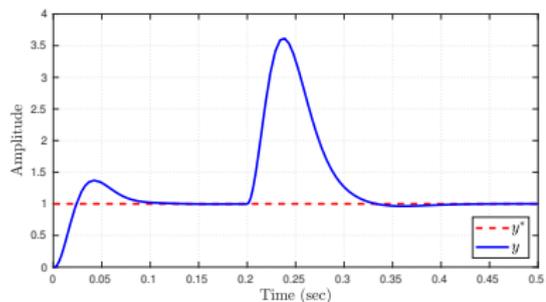
Réponse indicielle



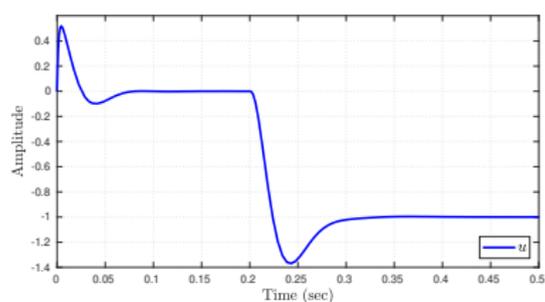
Réponse à une rampe

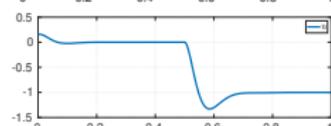
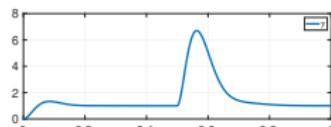
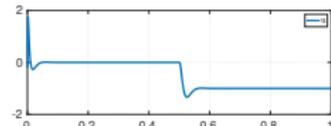
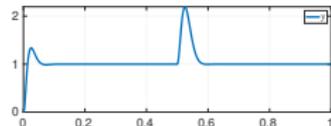
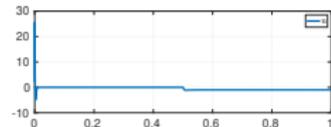
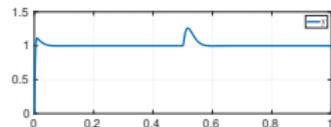
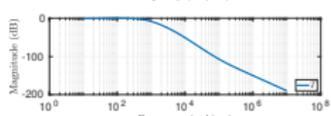
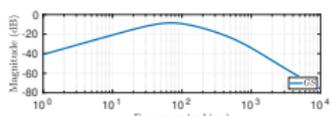
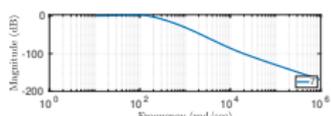
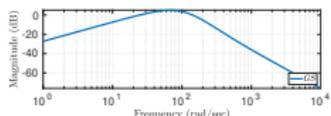
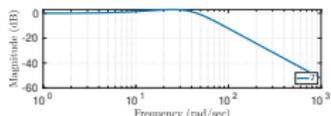
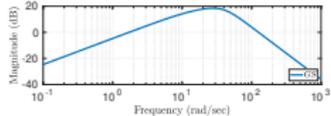
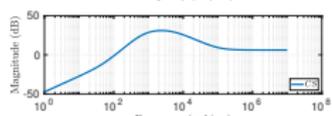
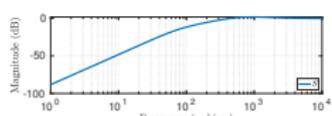
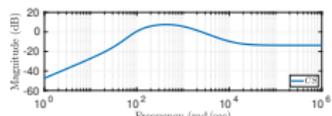
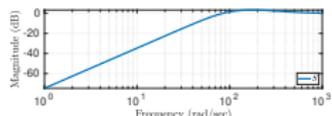
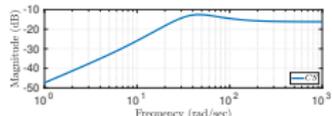
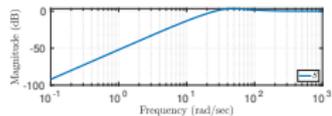


Réponse à un échelon de consigne puis perturbation d'entrée échelon unitaire

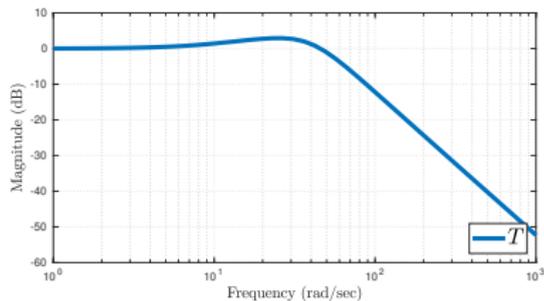
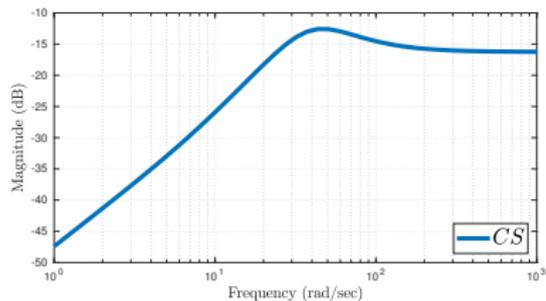
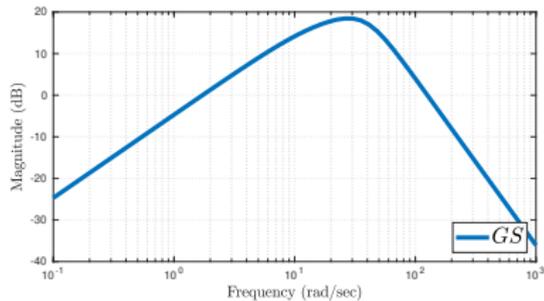
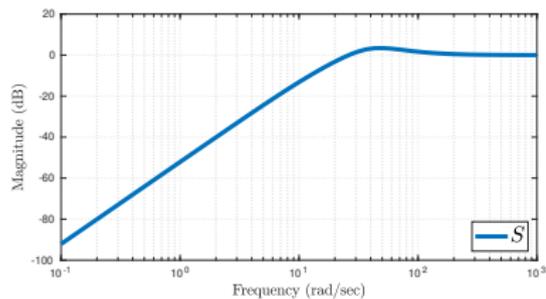


Commande associée

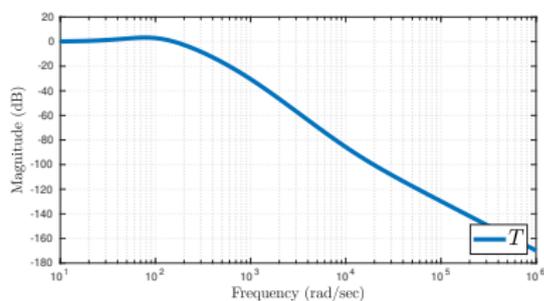
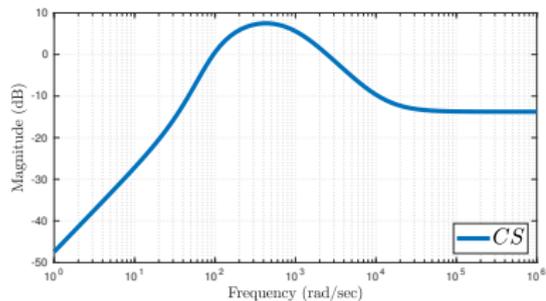
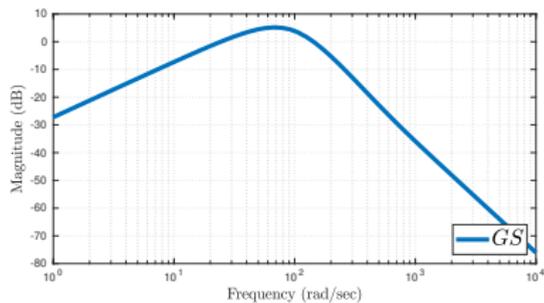
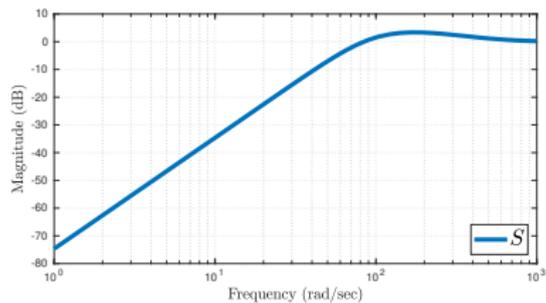




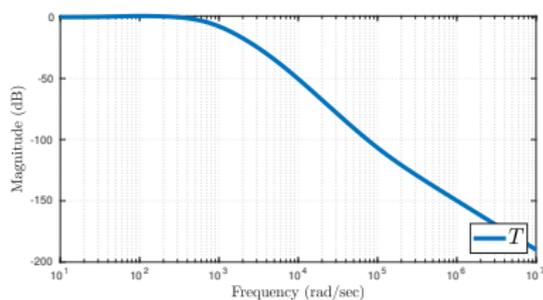
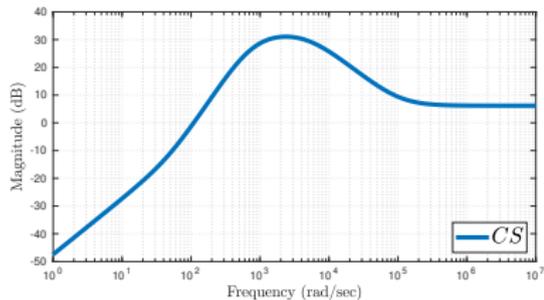
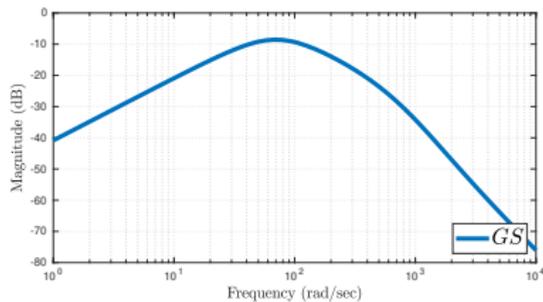
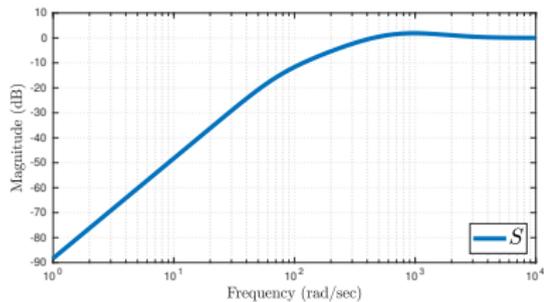
Réponse fréquentielle 1 :



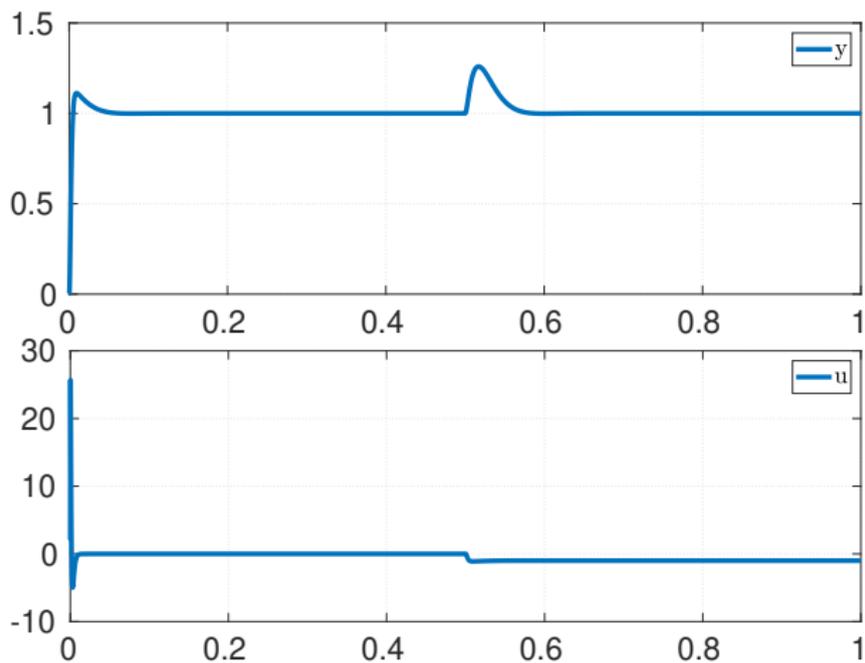
Réponse fréquentielle 2 :



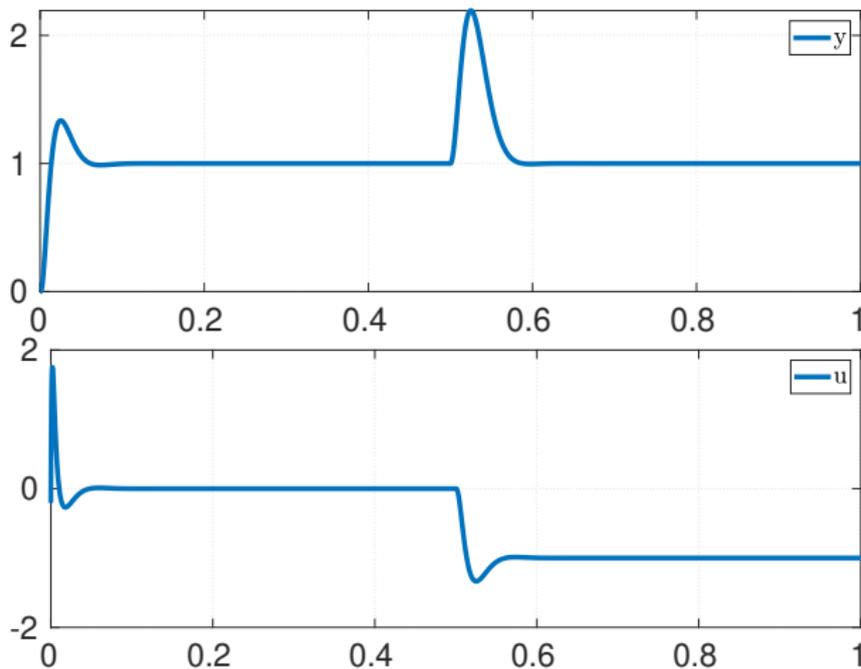
Réponse fréquentielle 3 :



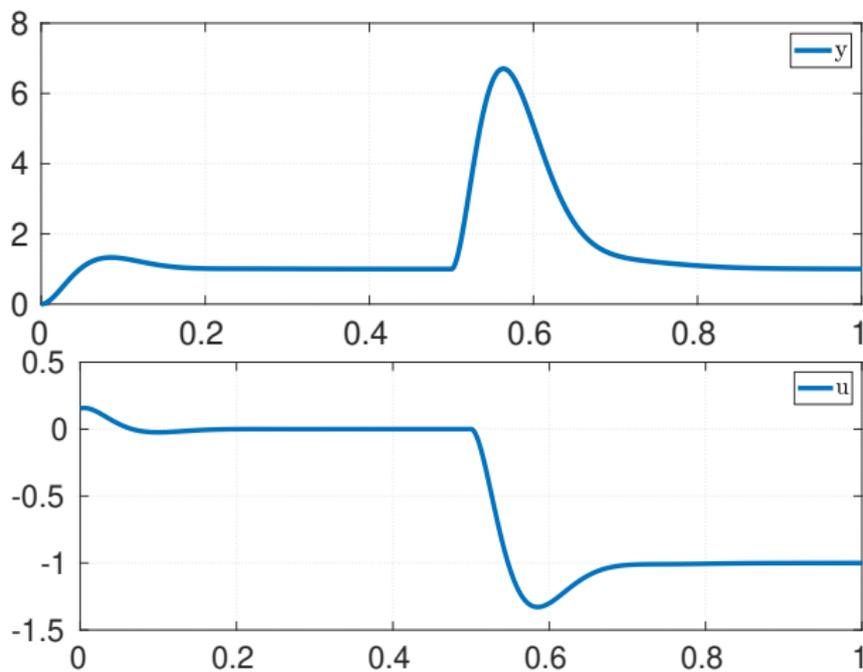
Réponse temporelle 1 :



Réponse temporelle 2 :



Réponse temporelle 3 :



3. Les outils

3.1 Représentations fréquentielles et temporelles

3.2 Les fonctions de sensibilité

3.3 Stabilité

3.4 Marge de Stabilité

Definition

Un système est dit stable si pour toute entrée bornée, la sortie correspondante est aussi bornée.

Proposition

Un système représenté par la fonction de transfert $G(p)$ est stable si et seulement si tous ses pôles sont à partie réelle négative.

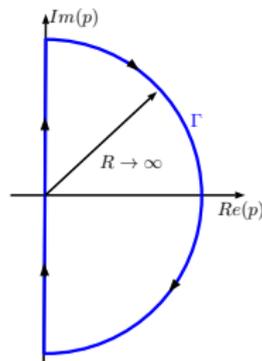
Le critère de Nyquist est le seul critère qui permet de déterminer la stabilité d'un système bouclé à partir de la fonction de transfert de la boucle ouverte.

On considère dans un premier temps le cas où la fonction de transfert $G(p)$ n'a pas de pôle à partie réelle nulle.

Contour de Nyquist

On définit d'abord le contour de Nyquist, qui contient le demi-plan positif (de droite). Il est composé :

- ▶ d'un segment recouvrant l'axe $j\omega$, de $0 - j\infty$ à $0 + j\infty$.
- ▶ d'un demi-cercle de rayon $R \rightarrow \infty$, partant de $0 + j\infty$ et orienté dans le sens des aiguilles d'une montre vers le point d'affixe $0 - j\infty$.

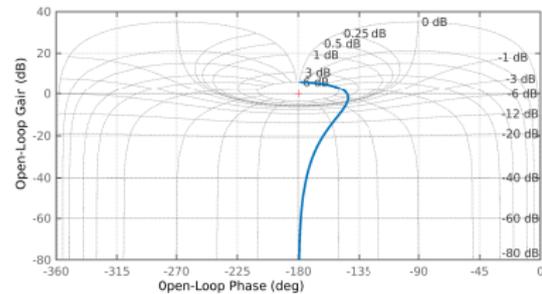
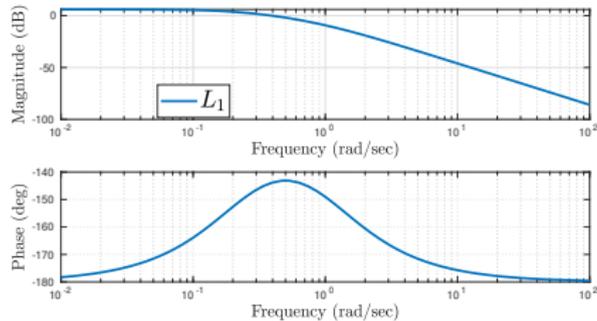


Critère de Nyquist

Étant donné un contour de Nyquist Γ , si Z est le nombre de pôles du système en boucle fermée dans le demi plan positif, et P le nombre de pôles de la fonction de transfert en boucle ouverte $G(p)$ situés dans le demi plan positif, le contour image $G(\Gamma)$ décrira $N = Z - P$ tours (dans le sens des aiguilles d'une montre) autour du point -1 .

$$L_1(p) = \frac{K_p}{(4p - 1)(p + 1)}$$

Pour $K_p = 2$:

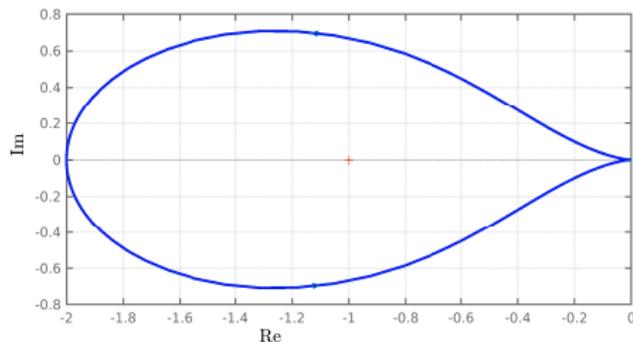
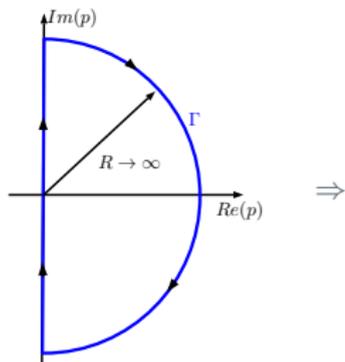


$$p = j\omega \Rightarrow$$

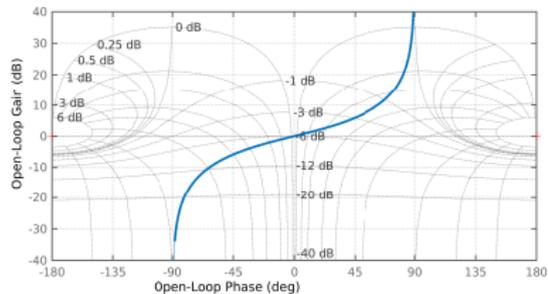
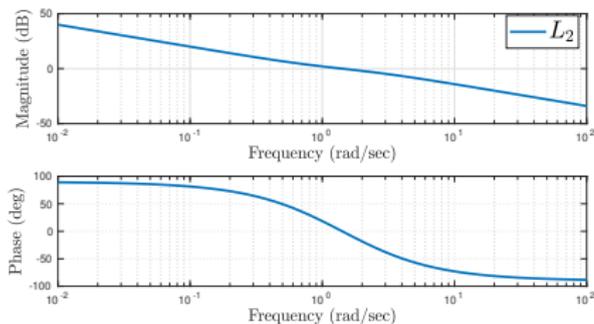
$$p = j0^+ \Rightarrow$$

$$p \rightarrow j\infty \Rightarrow$$

$$p = Re^{j\theta} \text{ avec } \theta : \frac{\pi}{2} \rightarrow -\frac{\pi}{2} \Rightarrow$$



$$L_2(p) = \frac{K_p(p-1)}{p(p+2)} \text{ avec } K_p \text{ positif}$$



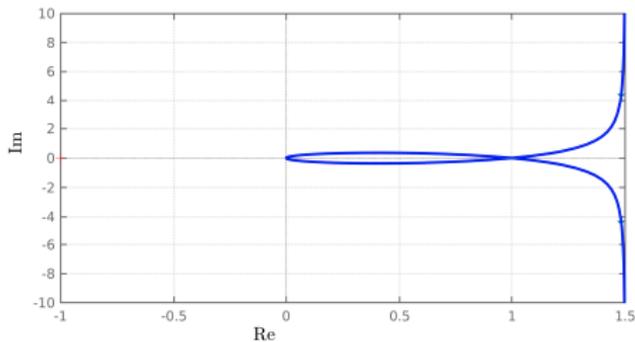
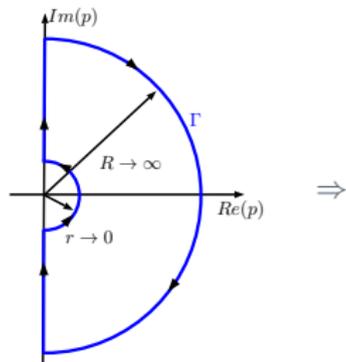
$$p = j\omega \Rightarrow$$

$$p = j0^+ \Rightarrow$$

$$p \rightarrow j\infty \Rightarrow$$

$$p = re^{j\theta} \Rightarrow$$

$$p = Re^{j\theta} \Rightarrow$$

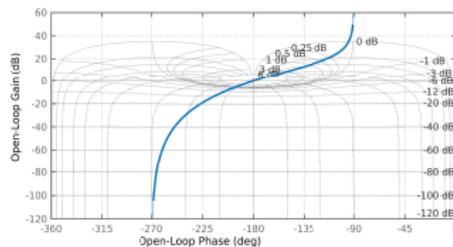
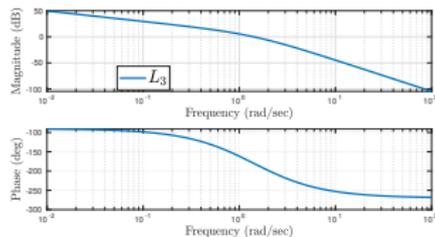
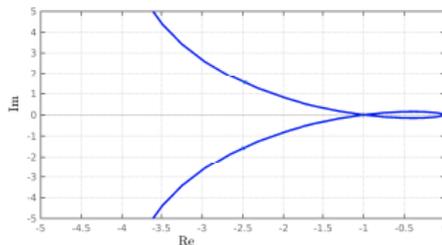


$$L_3(p) = \frac{K_p}{p(p+1)(p+2)} \text{ avec } K_p \text{ positif}$$

$$|L_3(j\omega)| = \frac{K_p}{\omega\sqrt{\omega^2+1}\sqrt{\omega^2+4}}$$

$$\text{Arg}(L_3(j\omega)) = -\frac{\pi}{2} - \text{atan}\left(\frac{\omega}{2}\right)$$

Stable si $K_p < 6$



3. Les outils

3.1 Représentations fréquentielles et temporelles

3.2 Les fonctions de sensibilité

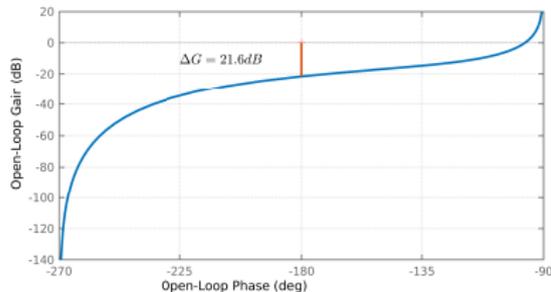
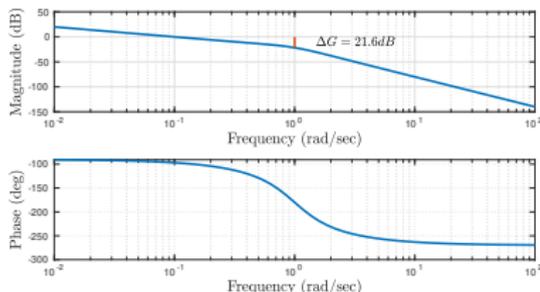
3.3 Stabilité

3.4 Marge de Stabilité

Les marges de stabilité sont des mesures permettant de quantifier les variations admissibles de certains paramètres du système à commander.

- La marge de gain : variation du gain statique admissible

$$\Delta G = \frac{1}{|L(j\omega\pi)|} \Rightarrow \Delta G |L(j\omega\pi)| = 1 \text{ avec } \text{Arg}(L(j\omega\pi)) = \pi$$



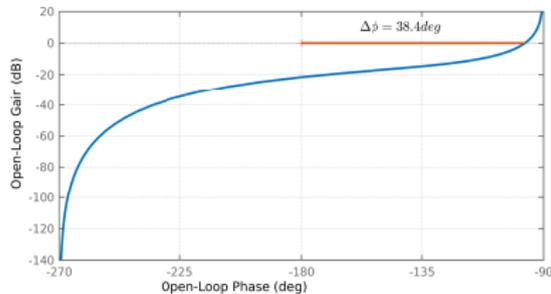
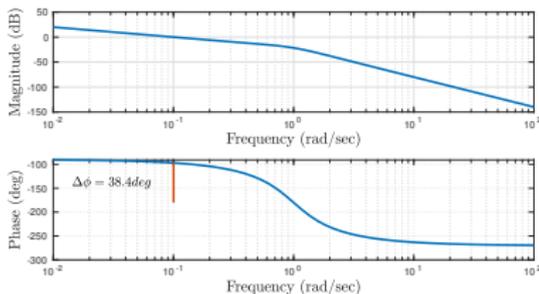
Une marge de gain est considérée comme satisfaisante si elle est supérieure à 6dB

- La marge de phase : variation admissible de la phase

$$\Delta\phi = \pi - \text{Arg}(L(j\omega_c)) \Rightarrow |L(j\omega_c)| = 1 \text{ ou } |L(j\omega_c)|_{dB} = 0_{dB}$$

- La marge de retard : retard additionnel qui amène à l'instabilité

$$\Delta R = \frac{\Delta\phi}{\omega_c}$$



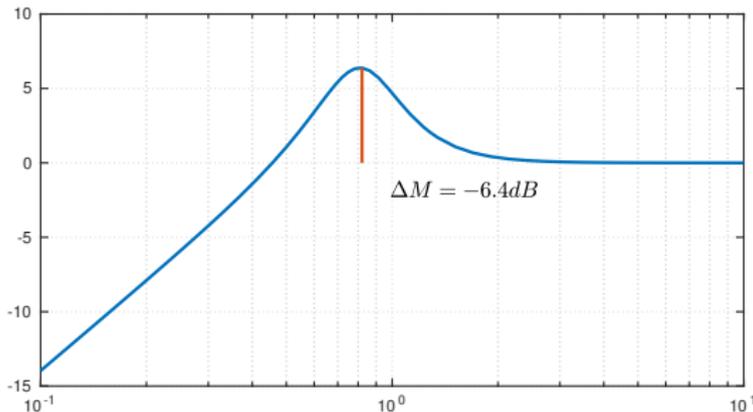
Une marge de phase est considérée comme satisfaisante si elle est supérieure à 45 degrés.

- La marge de module : plus générale que la marge de gain car elle prend en compte la variation du gain pour toutes les pulsations.

$$\Delta M = \min_{\omega} (|1 + L(j\omega)|)$$

$$S(j\omega) = \frac{1}{1 + L(j\omega)} \Rightarrow \Delta M = \frac{1}{\max_{\omega} (|S(j\omega)|)}$$

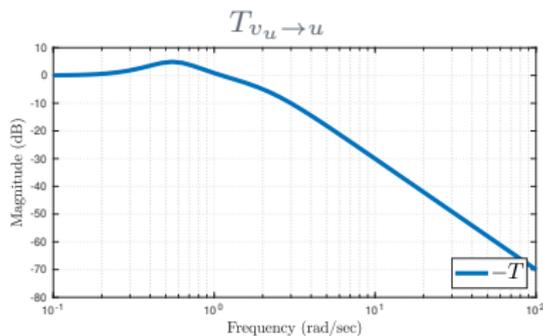
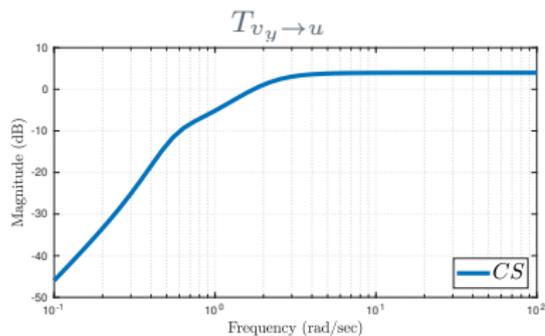
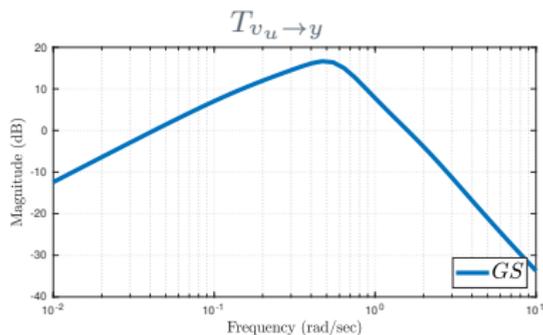
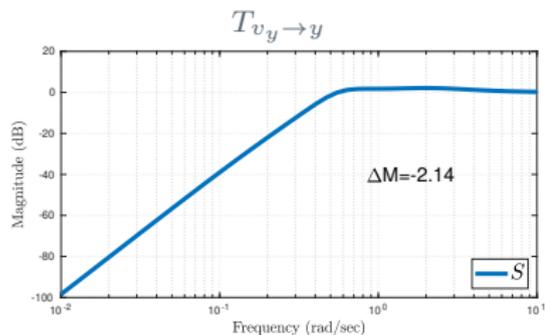
$$\Delta M_{dB} = -\max_{\omega} (|S(j\omega)|_{dB})$$



La mesure de la résonance de $|S(j\omega)|_{dB}$ est le meilleur moyen de mesurer la marge de module.

Une marge de module est considérée comme satisfaisante si elle est supérieure à -6dB

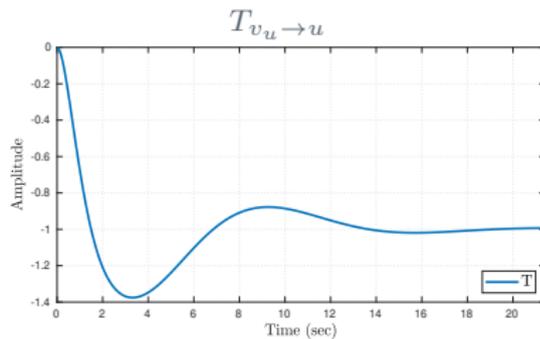
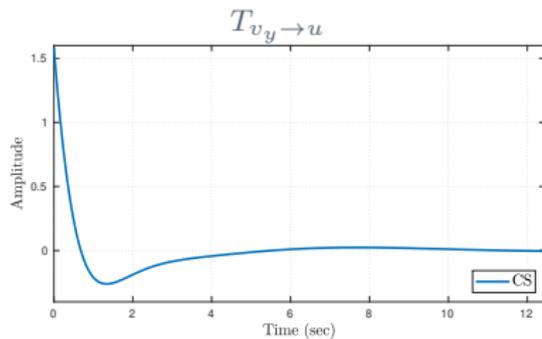
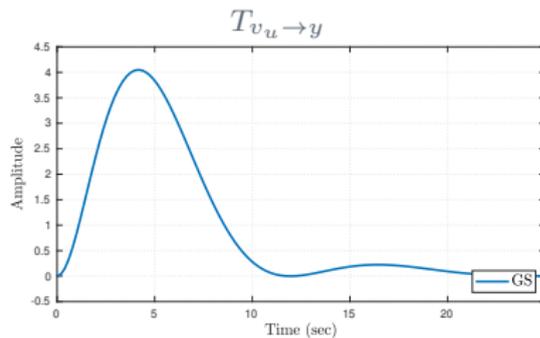
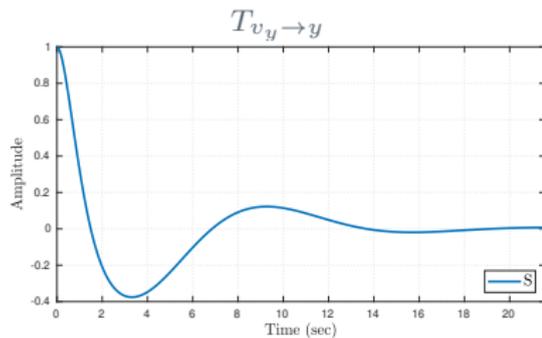
Voici le tracé des fonctions de sensibilité d'un asservissement :



Questions :

- ▶ Quel est le degré relatif du correcteur utilisé ?
- ▶ Donner le nombre d'intégrateur contenu dans la fonction de transfert de la boucle ouverte.
- ▶ Une perturbation d'entrée de type constante est-elle rejetée ?
- ▶ Une perturbation de sortie de type constante est-elle rejetée ?
- ▶ La marge de module de l'asservissement est-elle satisfaisante ?
- ▶ En utilisant la formule $\omega_c t_{\max} = 3$, donner une estimation du temps de premier dépassement.
- ▶ Est-ce que le bruit de mesure est atténué sur la sortie ?
- ▶ Est-ce que la commande est sensible aux bruits de mesure ?
- ▶ En considérant que le spectre du bruit de mesure est situé en hautes pulsations, donner une approximation de l'amplitude du bruit sur la commande.

Performances temporelles :



4. Synthèse des PID

D'après une étude récente, les PID représentent la majorité des correcteurs implantés.

Il est légitime de se poser la question du pourquoi de cette suprématie au vu des limitations de cette loi de commande.

Avantages :

- ▶ Il prend en compte les consignes et perturbations de type échelon.
- ▶ Il génère des commande souvent modérées en amplitude avec la bonne structure.
- ▶ Il est parfaitement adapté aux systèmes du premier ordre.
- ▶ Sa synthèse est simple et rapide (ne nécessite pas une formation avancée en automatique).

Inconvénients :

- ▶ Il n'est pas adapté aux systèmes d'ordre élevé (système instable, oscillant, non linéaire, avec du retard pur,...)
- ▶ Il ne peut rejeter QUE les perturbations de type échelon.
- ▶ Il génère une commande très sensible aux bruits hautes pulsations (gradient très fort).

4. Synthèse des PID

4.1 Les actions d'un PID

4.2 Relation BO/BF - cas du premier ordre avec intégrateur

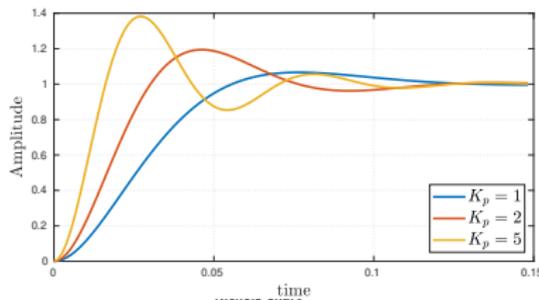
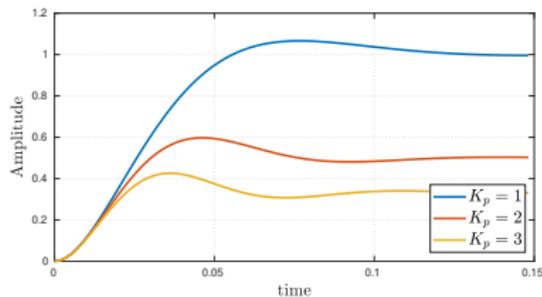
4.3 Synthèse d'un PI

4.4 Synthèse d'un PI avance de phase

4.5 Un peu plus loin que le PID

Fonction de transfert : $C(p) = K_p$.

L'augmentation du gain translate verticalement le lieu de la boucle ouverte, ce qui diminue la marge de phase et augmente le dépassement. Par contre t_{\max} est très sensible aux variations de K_p .

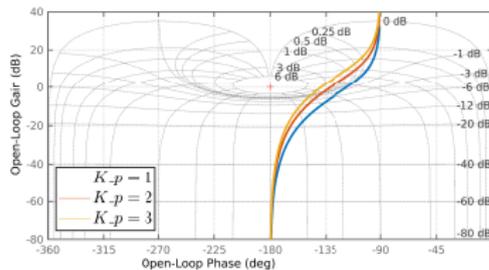


⇓

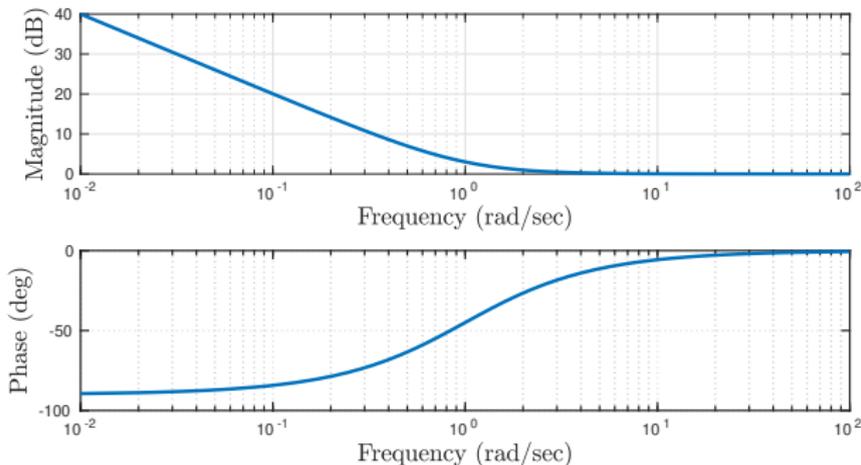
$$|T_{v_u \rightarrow \epsilon}(j\omega)| = |G(j\omega)S(j\omega)|$$

avec

$$|T_{v_u \rightarrow \epsilon}(BP)| \approx \frac{1}{|C(j\omega)|}$$

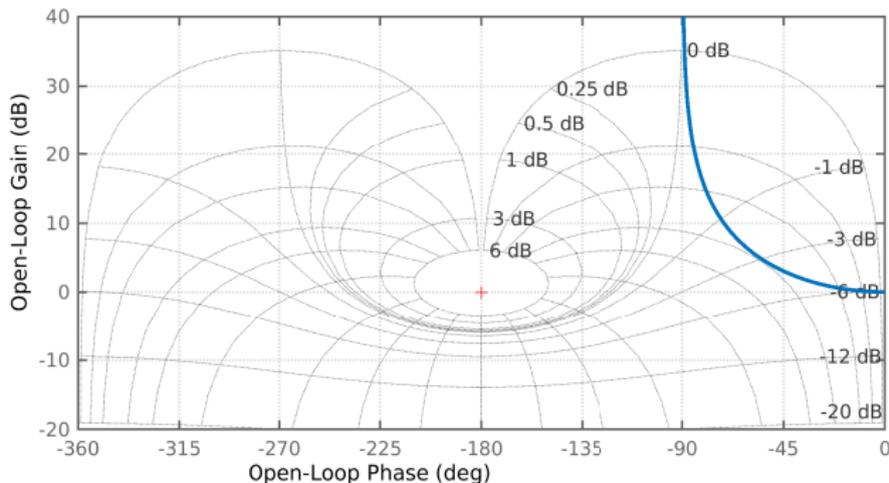


Fonction de transfert : $C(p) = \frac{K_p \left(p + \frac{1}{T_i} \right)}{p}$, pôle en zéro et zéro en $-1/T_i$.
 Correcteur le plus utilisé, il permet le rejet de la perturbation de type échelon (action en Basses Pulsations).

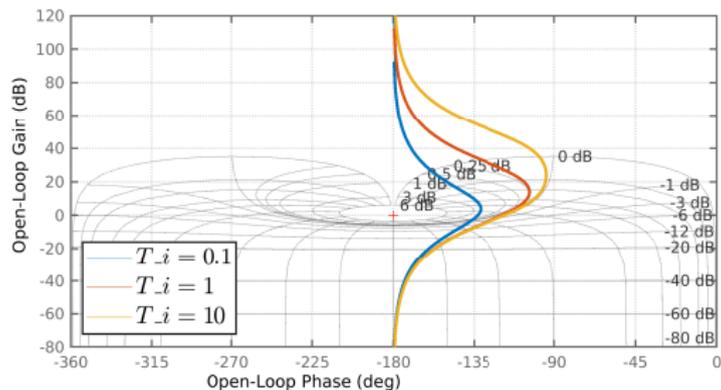
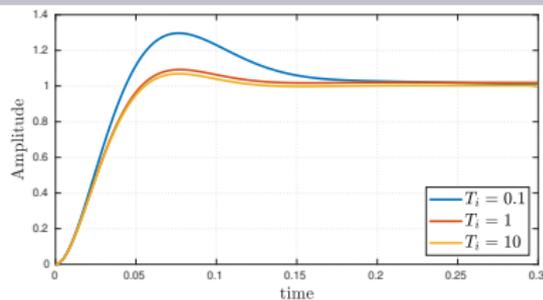
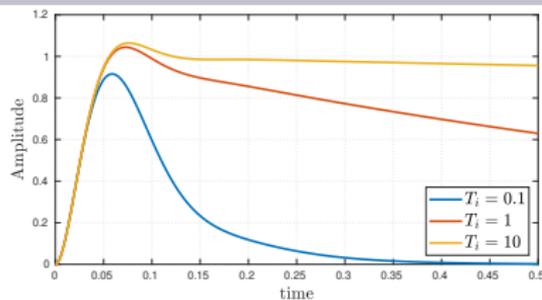


Rôle du zéro en $-1/T_i$: il annule l'effet du pôle intégrateur. Plus T_i est petit, plus le zéro agit en hautes pulsations, plus l'effet intégrateur se prolongera. Dans ce cas, la marge de phase va diminuer. La rapidité du rejet d'une perturbation échelon sera d'autant plus grand car :

$$|T_{v_u \rightarrow \varepsilon}(j\omega)| = |G(j\omega)S(j\omega)| \text{ avec } |T_{v_u \rightarrow \varepsilon}(BP)| \approx \frac{1}{|C(j\omega)|}$$



Rôle du gain K_p : aucun effet sur la phase, par contre sa variation entraîne une translation verticale sur le diagramme de Nichols. Il permet de définir la pulsation de coupure à $0dB$ donc de t_{max} . En général une augmentation du gain entraîne une diminution de la marge de phase.

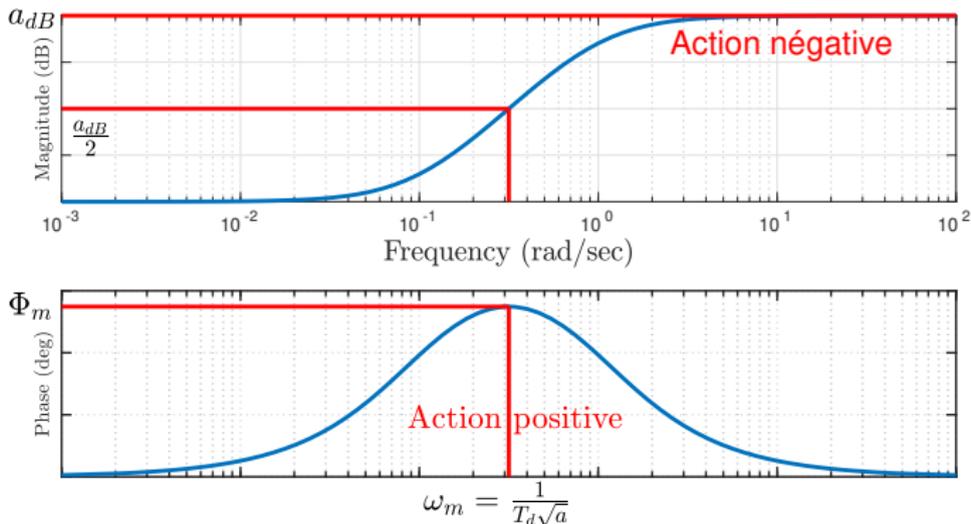


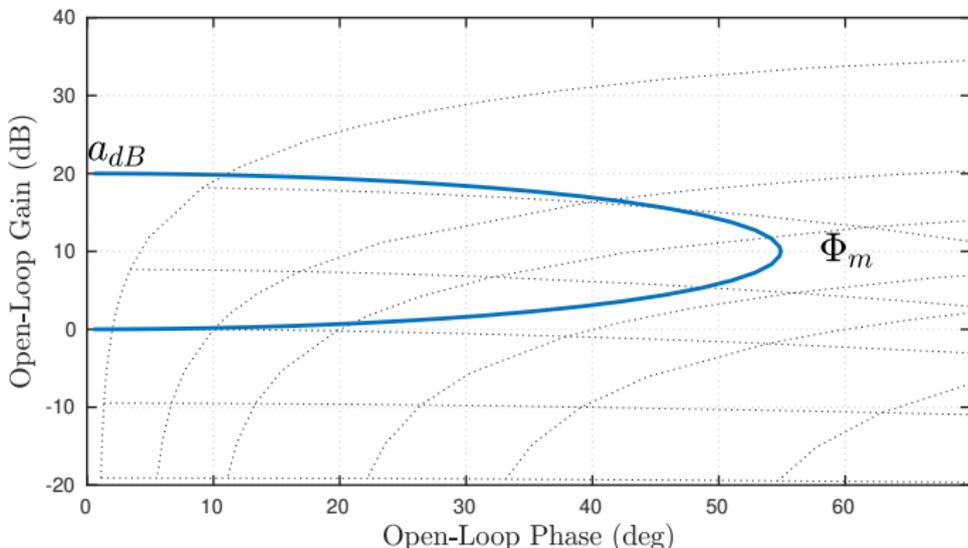
Plus T_i est petit, plus $\frac{1}{T_i}$ est en hautes pulsations, plus le dépassement est important. L'influence sur t_{\max} est faible. Le rejet de perturbation de commande est nettement influencé par la valeur de T_i comme annoncé.

Fonction de transfert :

$$A(p) = \frac{\tau_1 p + 1}{\tau_2 p + 1} = \frac{a T_d p + 1}{T_d p + 1} \text{ avec } a > 1$$

Ce type d'action est utilisé pour améliorer les performances temporelles d'un PI. Des trois actions, l'avance de phase est plus délicate à synthétiser ce qui amène très souvent à des coefficients limitant très fortement cette action (a proche de 1).





Effet avance de phase qui va écarter le lieu de la boucle ouverte de la zone à fort dépassement. Il permet de diminuer t_{\max} et d'augmenter la rapidité du rejet d'une perturbation de type échelon (associé à un PI).

Le gain en hautes pulsations va, par contre, agir sur le transfert $-C(p)S(p)$ donc va rendre la commande plus sensible aux bruits de mesure.

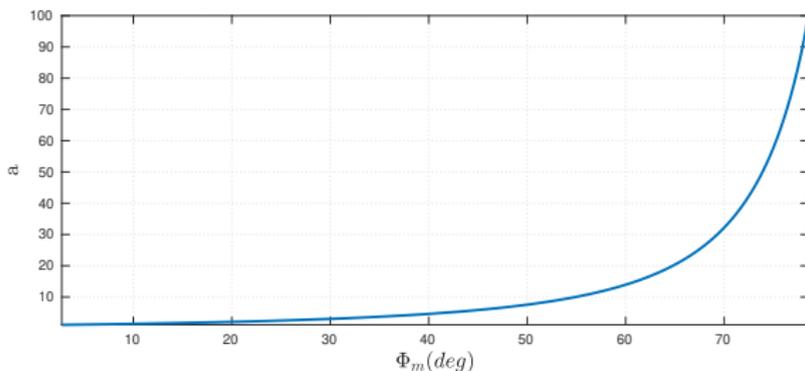
Fonction de transfert :

$$A(p) = \frac{\tau_1 p + 1}{\tau_2 p + 1} = \frac{a T_d p + 1}{T_d p + 1} \text{ avec } a > 1$$

Les formules :

$$\omega_m = \frac{1}{T_d \sqrt{a}} \quad \Phi_m = \arcsin\left(\frac{a-1}{a+1}\right) \quad \text{ou} \quad a = \frac{1 + \sin(\Phi_m)}{1 - \sin(\Phi_m)}$$

Limitation de l'avance de phase :



Si le déphasage à apporter est supérieur à 50° , il est préférable de mettre deux actions avance de phase en série afin d'éviter un gain en hautes pulsations trop important.

4. Synthèse des PID

4.1 Les actions d'un PID

4.2 Relation BO/BF - cas du premier ordre avec intégrateur

4.3 Synthèse d'un PI

4.4 Synthèse d'un PI avance de phase

4.5 Un peu plus loin que le PID

- ▶ Le cahier des charges énoncé de façon temporelle peut se retranscrire de façon fréquentielle sur les fonctions de sensibilité.
- ▶ Le correcteur va donc devoir être choisit de façon à ce que le cahier des charges fréquentiel soit bien respecté.
- ▶ La difficulté est que les fonctions de sensibilité sont des fonctions non linéaires de $C(p)$ ($T(p) = G(p)C(p)/(1 + G(p)C(p))$), il donc difficile de faire le lien entre la boucle fermée $T(p)$ et le correcteur $C(p)$.
- ▶ En revanche, il est plus simple de façonner la boucle ouverte $L(p) = G(p)C(p)$ en choisissant correctement $C(p)$.
- ▶ On doit donc faire le lien entre la BF $T(p)$ et la BO $L(p)$. En particulier, on s'intéresse au temps de réponse et au dépassement en BF.
- ▶ On va ici faire le lien dans un cas particulier : $L(p) = \frac{K}{p(\tau p + 1)}$

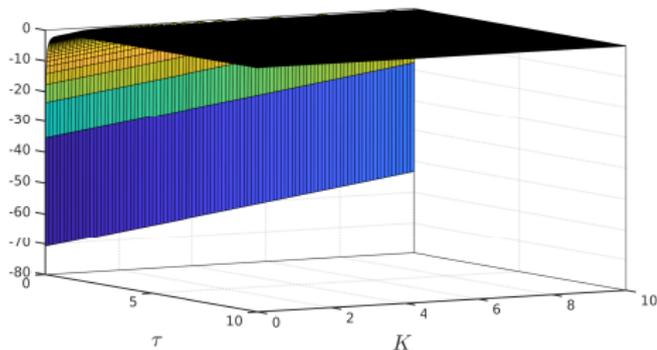
Pulsation de coupure de la boucle ouverte :

$$|L(j\omega)| = \frac{K}{\omega\sqrt{\tau^2\omega^2 + 1}}, \quad |L(j\omega_c)| = 1 \Rightarrow \omega_c =$$

Pulsation de résonance de la boucle fermée avec un bouclage unitaire :

$$T(j\omega) = \frac{L(j\omega)}{1 + L(j\omega)} \Rightarrow |T(j\omega)| = \Rightarrow \omega_r =$$

$$-|\omega_c - \omega_r| :$$



Pour ce type de système, la pulsation de coupure en Boucle Ouverte est équivalente à la pulsation de résonance de Boucle fermée

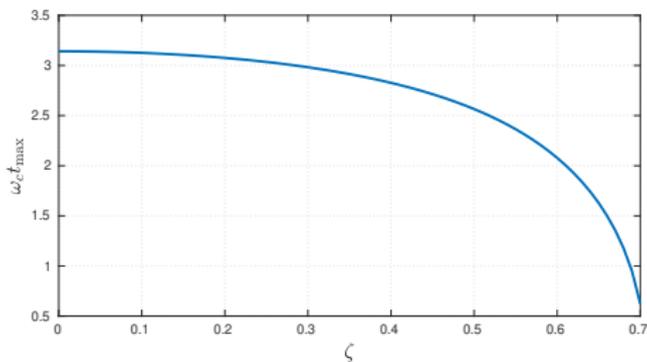
Il est possible d'associer les performances de la boucle ouverte et celles de la boucle fermée :

$$\underbrace{\omega_c}_{BO} \approx \underbrace{\omega_r}_{BF} = \underbrace{\omega_0 \sqrt{1 - 2\zeta^2}}_{BF} \quad \text{or} \quad \underbrace{t_{\max}}_{BF} = \frac{\pi}{\underbrace{\omega_0 \sqrt{1 - \zeta^2}}_{BF}}$$

Aussi

$$\omega_c t_{\max} =$$

C'est une relation qui permet de déterminer la pulsation de coupure de la boucle ouverte à partir du t_{\max} souhaité (spécifié par le cahier des charges)



Dans la littérature, cette relation est souvent approchée par $\omega_c t_{\max} \approx 3$.

On va maintenant chercher une relation entre le dépassement en BF et la marge de phase en BO.

Si on regarde la boucle fermée, on a :

$$T(p) = \frac{L(p)}{1 + L(p)} = \frac{\frac{K}{p(\tau p + 1)}}{1 + \frac{K}{p(\tau p + 1)}} = \frac{K}{\tau p^2 + p + K}$$

qui est un second ordre.

Pour un second ordre, on a une relation entre ζ et la valeur du premier dépassement D_1 :

$$D_1 = e^{-\frac{\pi \zeta}{\sqrt{1 - \zeta^2}}}$$

si on l'inverse, on trouve :

$$\zeta =$$

Si on cherche à mettre ce second ordre sous forme standard

$$G(p) = \frac{\bar{K}\omega_0^2}{p^2 + 2\zeta\omega_0 + \omega_0^2}$$

on trouve

$$\omega_0^2 =$$

$$\zeta =$$

$$K\tau =$$

On a donc maintenant une relation entre les paramètres de la BO et le dépassement en BF.

Si on regarde le système en BO, on a

$$G(p) = \frac{K}{p(\tau p + 1)}$$

donc on obtient comme pulsation de coupure à 0dB :

$$\omega_c = \frac{\sqrt{-1 + \sqrt{1 + 4K^2\tau^2}}}{\sqrt{2}\tau}$$

et comme marge de phase :

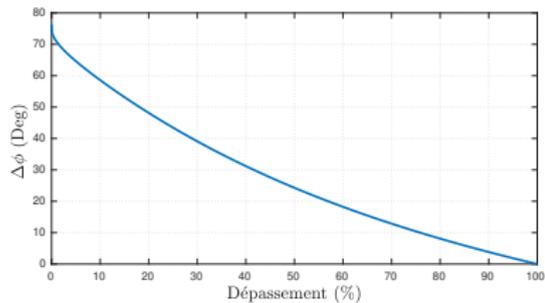
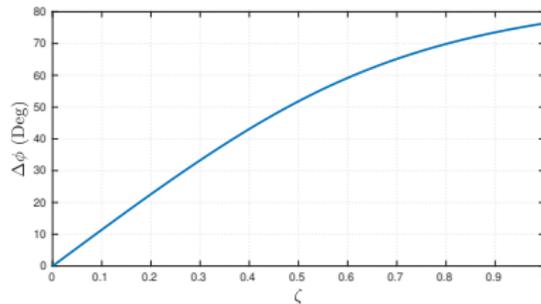
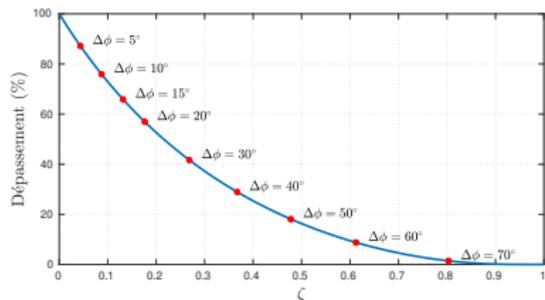
$$\Delta\phi =$$

or

$$\omega_c\tau = \tau \frac{\sqrt{-1 + \sqrt{1 + 4K^2\tau^2}}}{\sqrt{2}\tau} = \frac{\sqrt{-1 + \sqrt{1 + \frac{1}{4\zeta^4}}}}{\sqrt{2}}$$

et donc

$$\Delta\phi =$$



D_1	ζ	$\Delta\phi$
0%	1	90°
5%	0.69	65°
10%	0.59	59°
20%	0.46	48°

Finalement, on a les relations :

$$\zeta = \sqrt{\frac{(\log(D_1))^2}{\pi^2 + (\log(D_1))^2}}$$
$$\Delta\phi = \operatorname{atan} \left(\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{-1 + \sqrt{1 + \frac{1}{4\zeta^4}}}} \right)$$
$$\omega_c = \frac{\pi \sqrt{1 - 2\zeta^2}}{t_{\max} \sqrt{1 - \zeta^2}}$$

Qui nous permettent de déterminer la marge de phase et la pulsation de coupure que l'on doit avoir en BO, en fonction du dépassement et temps de réponse voulus en BF.

Ces relations sont exactes si $L(p) = \frac{K}{p(\tau p + 1)}$, mais on les utilisera quand même en tant qu'approximation pour les autres types de systèmes.

4. Synthèse des PID

4.1 Les actions d'un PID

4.2 Relation BO/BF - cas du premier ordre avec intégrateur

4.3 Synthèse d'un PI

4.4 Synthèse d'un PI avance de phase

4.5 Un peu plus loin que le PID

Synthèse basée sur l'hypothèse du second ordre

Un PI est adapté aux systèmes du premier et du second ordre, il est donc naturel de faire l'approximation d'une fonction de transfert en boucle ouverte du second ordre. En effet, il s'agit d'un des seuls transfert qui permet de faire un lien direct entre le fréquentiel et le temporel. Si le transfert en boucle ouverte est d'ordre supérieur, une différence entre l'attendu et l'obtenu va apparaître. Cette différence sera d'autant plus grande que les termes négligés sont dans la bande passante du système de commande.

Asservissement du moteur à courant continu

Modèle de synthèse :

$$\Theta(p) = \frac{41.2}{p(\tau_2 p + 1)} U(p), \quad \tau_2 = 14 \cdot 10^{-3}$$

Asservissement du moteur à courant continu

Modèle de synthèse :

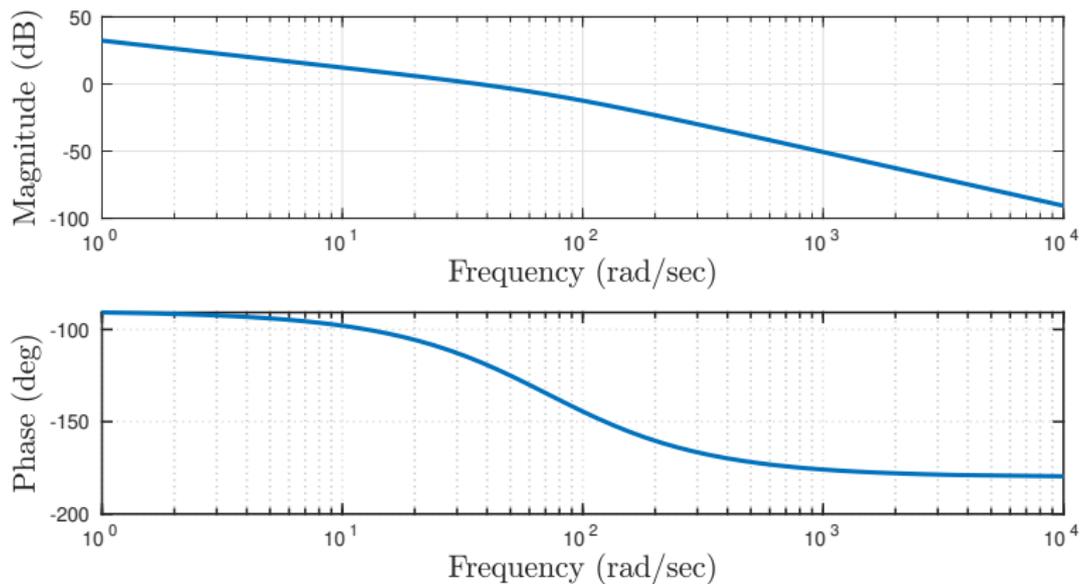
$$\Theta(p) = \frac{41.2}{p(\tau_2 p + 1)} U(p), \quad \tau_2 = 14 \cdot 10^{-3}$$

Premier cahier des charges :

1. les signaux de consigne sont de type échelon,
2. la réponse à un échelon de consigne peut présenter un dépassement de 20% au maximum,
3. le temps du premier dépassement doit être le plus petit possible,
4. le correcteur doit donner satisfaction sur le système réel, aussi, on souhaite avoir une marge de phase de 45° minimum.

Modèle de synthèse :

$$\Theta(p) = \frac{41.2}{p(\tau_2 p + 1)} U(p), \quad \tau_2 = 14 \cdot 10^{-3}$$



Réponse au cahier des charges

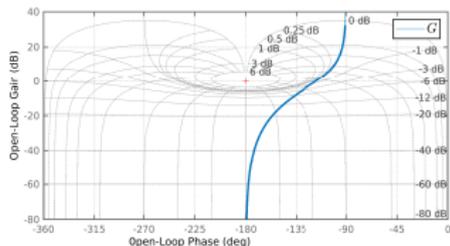
1. $G(p)$ contient un intégrateur donc pas d'erreur de position.
Un correcteur proportionnel K_p peut peut-être suffire ?

L'augmentation du gain en translatant verticalement le lieu de la boucle ouverte diminue la marge de phase et augmente le dépassement. Le temps du premier dépassement est par contre diminué.

Calculer la valeur du gain permettant d'obtenir le dépassement et la marge de phase souhaités.

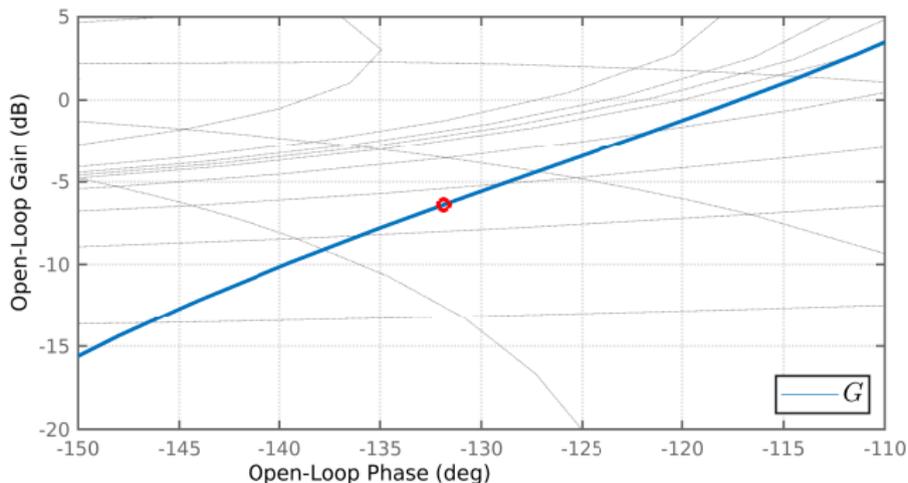
$$D_1 = 20\% \quad \Rightarrow \quad \zeta = 0.4559 \quad \Rightarrow \quad \Delta\phi \approx 48$$

Solution graphique :



$$\text{Arg}(L(j\omega_c)) = -180 + \Delta\phi = -132^\circ$$

$$|L(j\omega_c)|_{dB} \approx -6.46 \Rightarrow K_p = 2.10$$



Solution Analytique (placement de pôles)

$$T(p) = \frac{41.2K_p}{p(\tau_2 p + 1) + 41.2K_p} = \frac{41.2K_p/\tau_2}{p^2 + p/\tau_2 + 41.2K_p/\tau_2}$$

On a

$$2\zeta\omega_0 = \frac{1}{\tau_2}$$
$$\omega_0^2 = \frac{41.2K_p}{\tau_2}$$

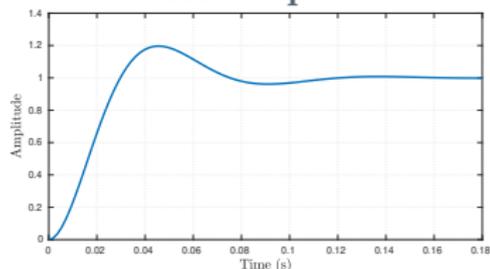
ce qui donne

$$K_p = \frac{1}{4\zeta^2\tau_2 41.2}$$

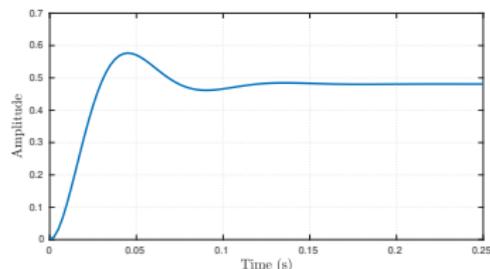
et donc

$$\zeta = 0.4559 \text{ et } \tau_2 = 14 \cdot 10^{-3} \Rightarrow K_p = 2.0853$$

Performances temporelles

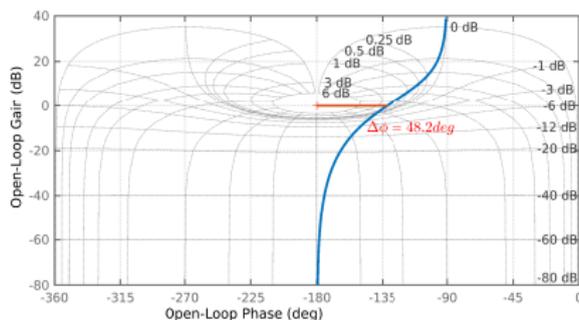


Suivi de consigne de type échelon



Rejet de perturbation de commande

Performances fréquentielles



Le cahier des charges est rempli. Avec ce correcteur, une diminution de t_{max} va de paire avec une augmentation du dépassement.

Second cahier des charges :

1. les signaux de consigne sont de type échelon,
2. la réponse à un échelon de consigne peut présenter un dépassement de 20% au maximum,
3. le système est soumis à des perturbations de commande de type échelon qu'il faut rejeter,
4. le temps du premier dépassement doit être égale à $75ms$,
5. le correcteur doit donner satisfaction sur le système réel, aussi, on souhaite avoir une marge de phase de 45° minimum.

Réponse au cahier des charges :

3. Le système est soumis à des perturbations de commande de type échelon : nécessité de mettre un intégrateur en aval donc il faut utiliser un PI :

$$C(p) = \frac{K_p \left(p + \frac{1}{T_i} \right)}{p}$$

Synthèse basée sur l'hypothèse du second ordre :

- L'utilisation d'un PI augmente l'ordre de $L(p)$, l'hypothèse second ordre n'est plus respectée. Nous allons considérer que le transfert peut se séparer en une partie du second ordre dominante et un transfert additionnel agissant en hautes pulsations par rapport au dominant. Les performances seront plus ou moins affectées en fonction de la véracité de cette hypothèse.

$$L(p) = \frac{41.2}{p(\tau_2 p + 1)} \frac{K_p \left(p + \frac{1}{T_i} \right)}{p}, \quad \tau_2 = 14 \cdot 10^{-3}$$

- Le cahier des charges spécifie un t_{\max} et un dépassement. Il n'existe pas de relation explicite permettant de relier t_{\max} et le dépassement à la boucle ouverte pour un transfert quelconque. En utilisant les propriétés liant le temporel et le fréquentiel d'un second ordre, nous allons déterminer la pulsation de coupure et la marge de phase de la boucle ouverte ω_c et $\Delta\phi$ en fonction de t_{\max} et du dépassement D_1 .

1. En considérant ces deux contraintes :

$$D_1 = 20\% \Rightarrow \zeta = 0.46 \Rightarrow \Delta\phi = 48^\circ$$

$$t_{\max} = 75ms \Rightarrow \omega_c = \frac{\pi\sqrt{1-2\zeta^2}}{t_{\max}\sqrt{1-\zeta^2}} = 35.8rad/s$$

2. Connaissant la pulsation de coupure et d'après le diagramme de Bode de $G(p)$:

$$Arg(G(j\omega_c)) = -116^\circ$$

$$|G(j\omega_c)| = 0.74dB \rightarrow 1.03$$

3. Calcul du zéro pour obtenir la marge de phase à ω_c :

$$\Delta\phi = 180^\circ + \text{Arg}(L(j\omega_c))$$

$$\text{Arg}(C(j\omega_c)) = \text{Arg}\left(\frac{K_p\left(j\omega_c + \frac{1}{T_i}\right)}{j\omega_c}\right)$$

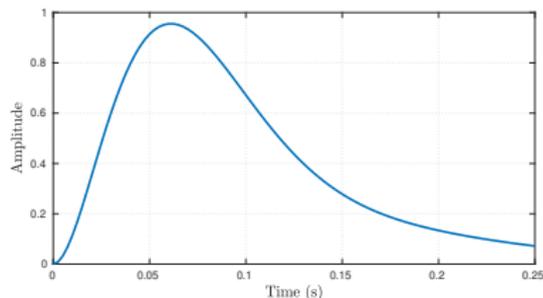
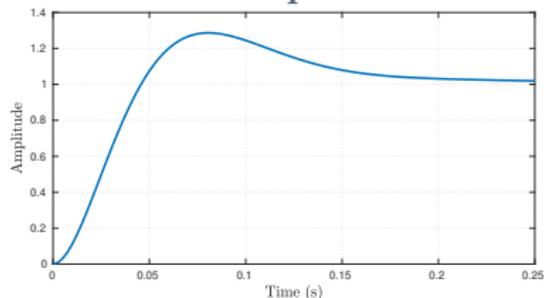
4. Le gain du correcteur se déduit directement de

$$|L(j\omega_c)|_{dB} = 0 \Rightarrow -|C(j\omega_c)|_{dB} - |G(j\omega_c)|_{dB} = 0$$

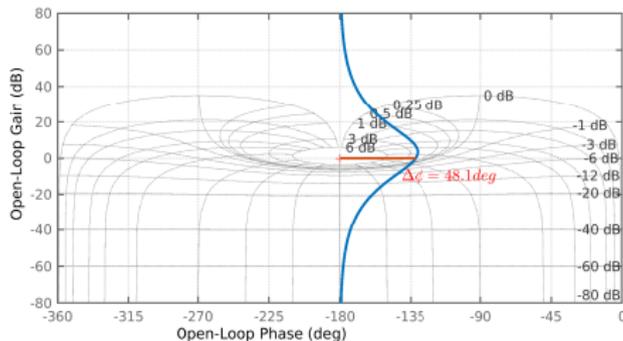
\Rightarrow

\Rightarrow

Performances temporelles

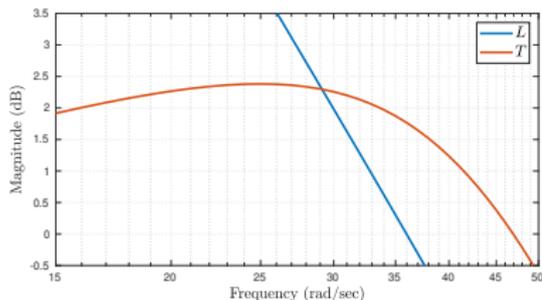


Performances fréquentielles



Le dépassement est trop important car l'hypothèse du second ordre n'est pas respectée.

Analyse des performances

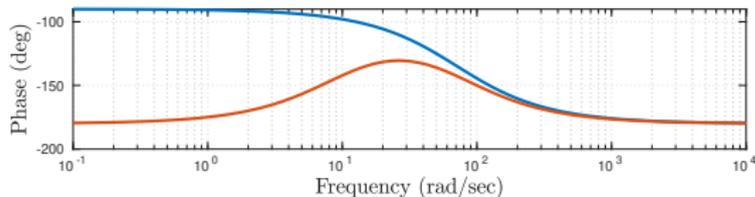
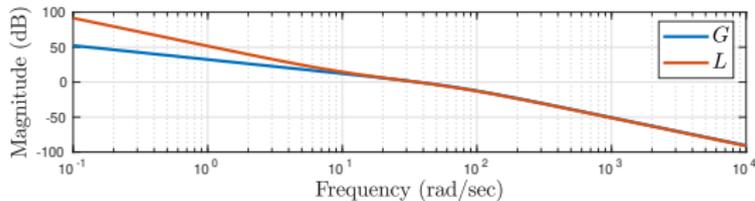


$$\underbrace{\omega_c}_{BO} \neq \underbrace{\omega_0}_{BF}$$

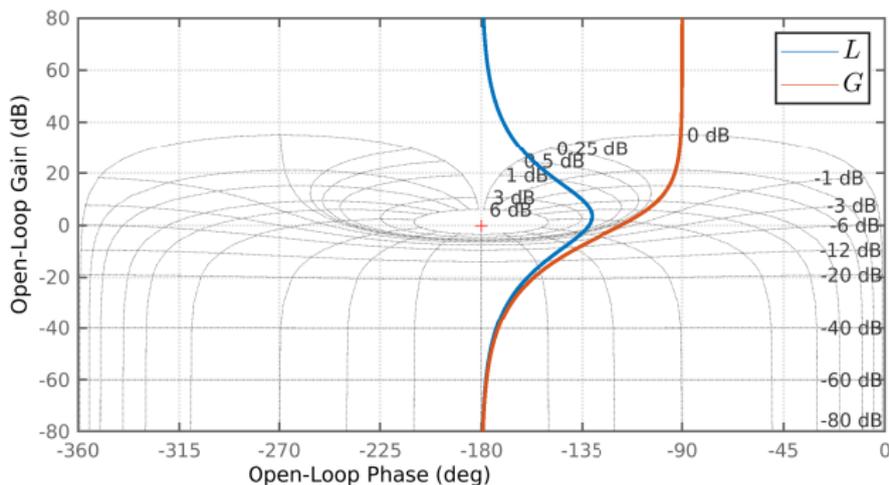
Malgré le non-respect de l'hypothèse second ordre, les performances obtenues sont proches de celles demandées par le cahier des charges.

$$L(p) = \frac{41.2 \left(p + \frac{1}{T_i} \right)}{p^2 (\tau p + 1)}$$

$$\neq \frac{K}{(\tau p + 1)}$$



Modification du correcteur

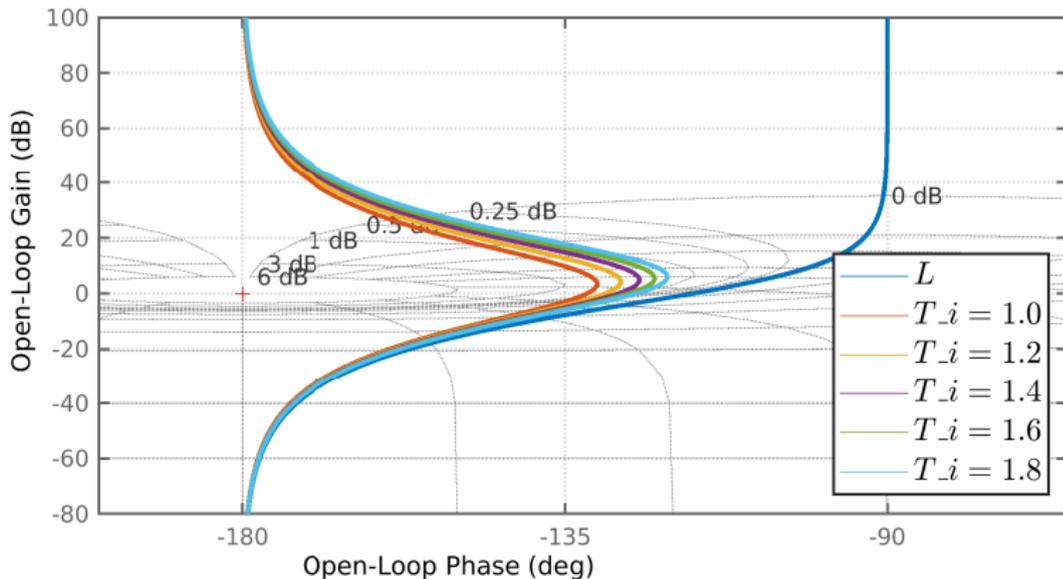


Pour diminuer le dépassement, il faut s'éloigner des courbes d'isogain $> 2dB$.



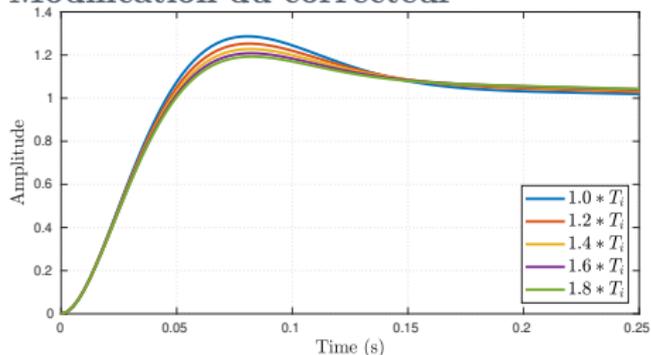
L'action du PI doit s'arrêter plus rapidement : T_i doit augmenter.

Modification du correcteur



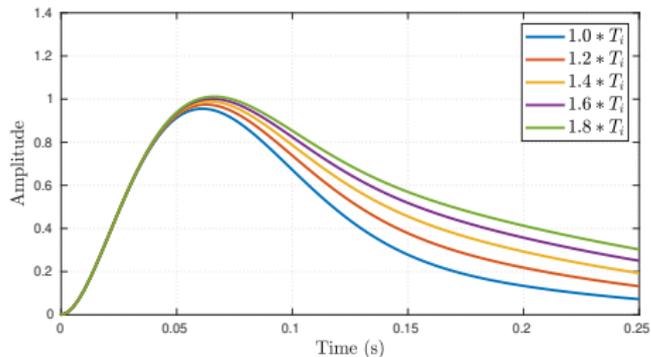
La boucle ouverte rejoint de plus en plus rapidement le lieu du système à commander.

Modification du correcteur



Le dépassement diminue avec l'augmentation de T_i

t_{\max} n'est pas modifié par les variations de T_i



$$|T_{v_u \rightarrow \varepsilon}(j\omega)| = |G(j\omega)S(j\omega)|$$

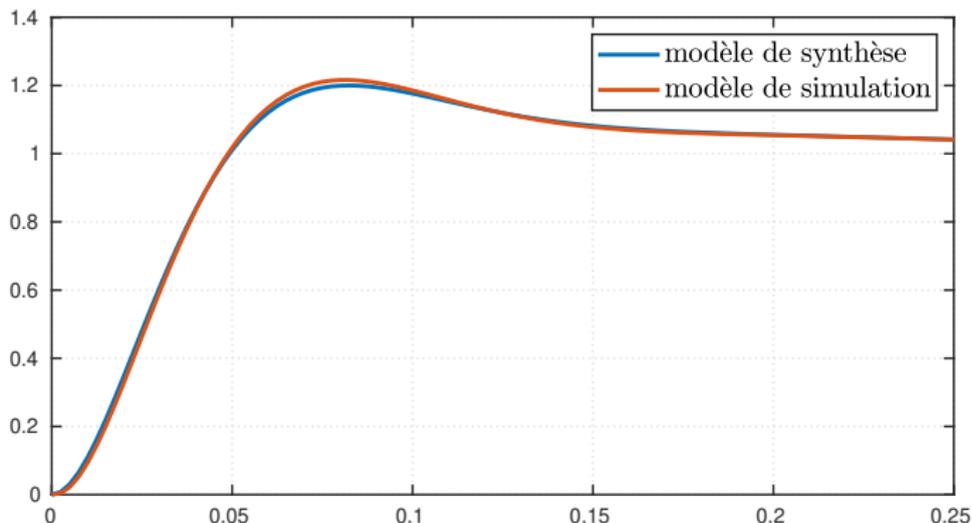
avec

$$|T_{v_u \rightarrow \varepsilon}(BP)| \approx \frac{1}{|C(j\omega)|}$$

⇓

Ralentissement du rejet de la perturbation

Performances finales avec le PI



$$C(p) = \frac{0.94 \left(p + \frac{1}{0.17} \right)}{p}$$

La simplification du modèle de commande est justifiée par cette réponse. Cela était prévisible puisque notre synthèse est basée sur une pulsation de coupure de 35 rad/s , pulsation à laquelle les deux lieux sont superposés.

4. Synthèse des PID

4.1 Les actions d'un PID

4.2 Relation BO/BF - cas du premier ordre avec intégrateur

4.3 Synthèse d'un PI

4.4 Synthèse d'un PI avance de phase

4.5 Un peu plus loin que le PID

Limitation du temps de réponse en BF

Le PI est un retard de phase, aussi, cela introduit une limitation en terme de déphasage :

$$-90^\circ < \text{Arg}(C(j\omega)) < 0$$

En sachant que

$$\Delta\phi = \text{Arg}(C(j\omega_c)) + \text{Arg}(G(j\omega_c)) + 180^\circ$$

la phase du système à commander à la pulsation de coupure doit donc être comprise entre :

$$-180^\circ + \Delta\phi + 0 < \text{Arg}(G(j\omega_c)) < -180^\circ + \Delta\phi + 90^\circ$$

Avec $\Delta\phi \approx 45^\circ$, cela entraîne

$$-135^\circ < \text{Arg}(G(j\omega_c)) < -45^\circ$$

Deux limitations :

$$-135^\circ < \text{Arg}(G(j\omega_c))$$

Si le système est d'ordre supérieur à 1. Il y a une pulsation max ω_{\max} pour laquelle

$$\text{Arg}(G(j\omega_{\max})) = -135^\circ$$

Au dessus de cette pulsation, le zéro du PI ne pourra pas apporter suffisamment de phase pour obtenir la marge de phase souhaitée. Il faudra donc que $\omega_c < \omega_{\max}$.

$$t_{\max} = \frac{\pi \sqrt{1 - 2\zeta^2}}{\omega_c \sqrt{1 - \zeta^2}} > \frac{\pi \sqrt{1 - 2\zeta^2}}{\omega_{\max} \sqrt{1 - \zeta^2}}$$

↓

t_{\max} est borné par une valeur minimale.

$$\text{Arg}(G(j\omega_c)) < -45^\circ$$

Avec un procédé classique, cette limite n'introduit pas de limitation. Sauf si présence de zéro à non minimum de phase et autres déphaseurs basse pulsations, comme par exemple le convertisseur DC-DC.

↓

Dans ce cas t_{\max} est borné par une valeur maximale.

Limitation du temps de réponse en BF

Dans l'exemple du moteur que l'on a vu précédemment, la limitation du temps de premier dépassement est donnée par :

$$-90^\circ < \text{Arg}(C(j\omega_c)) < 0^\circ \text{ avec } \text{Arg}(C(j\omega_c)) = -180^\circ + \Delta\phi - \text{Arg}(G(j\omega_c))$$

Ce qui donne :

$$\text{Arg}(G(j\omega_{\max})) = -180^\circ + \Delta\phi \text{ avec } \Delta\phi = 48^\circ$$

On obtient donc :

$$\begin{aligned} \text{Arg}(G(j\omega_{\max})) &= -132^\circ \\ \Downarrow \\ \omega_{\max} &= 65 \text{rad/s} \\ \Downarrow \\ \omega_c &< 65 \text{rad/s} \\ \Downarrow \\ t_{\max} &> \frac{\pi \sqrt{1 - 2\zeta^2}}{\omega_c \sqrt{1 - \zeta^2}} > 42 \text{ms} \end{aligned}$$

Pour pouvoir franchir cette limite, l'avance de phase du zéro du PI ne suffit plus, le correcteur doit contenir une avance de phase supplémentaire.

Second cahier des charges :

1. les signaux de consigne sont de type échelon,
2. la réponse à un échelon de consigne peut présenter un dépassement de 20% au maximum,
3. le système est soumis à des perturbations de commande de type échelon qu'il faut rejeter,
4. le temps du premier dépassement doit être égale à 30ms,
5. le correcteur doit donner satisfaction sur le système réel, aussi, on souhaite avoir une marge de phase de 45° minimum.

Réponse au cahier des charges :

3. Le système est soumis à des perturbations de commande de type échelon : nécessité de mettre un intégrateur en aval donc il faut utiliser un PI.
4. Temps du premier dépassement $< 45ms$ donc un correcteur PI ne suffit pas. Nous allons synthétiser un PI avance de phase.

$$C(p) = \frac{K_p \left(p + \frac{1}{T_i} \right)}{p} \left(\frac{aT_d p + 1}{T_d p + 1} \right) \quad \text{avec } a > 1$$

Synthèse du PI avance de phase :

1. En considérant ces deux contraintes

$$D_1 = 20\% \Rightarrow \zeta = 0.46 \Rightarrow \Delta\phi = 48^\circ$$
$$t_{\max} = 30ms \Rightarrow \omega_c = \frac{\pi\sqrt{1-2\zeta^2}}{t_{\max}\sqrt{1-\zeta^2}} = 89.9rad/s$$

2. Connaissant la pulsation de coupure et d'après le diagramme de Bode de $G(p)$:

$$\text{Arg}(G(j\omega_c)) = -14.5^\circ$$
$$|G(j\omega_c)|_{dB} = -10.9dB \rightarrow 0.2851$$

3. L'avance de phase maximale doit être à la pulsation de coupure :

$$\begin{aligned}\omega_m = \omega_c &\Rightarrow \text{Arg}(L(j\omega_c)) = -180^\circ + \Delta\phi \\ &\text{Arg}(C(j\omega_c)) = \\ &\text{Arg}(C(j\omega_c)) =\end{aligned}$$

Le PI est là pour rejeter la perturbation basse fréquence donc il doit permettre un rejet de la perturbation suffisamment rapide ($1/T_i$ rapide) mais son effet doit être suffisamment faible à la pulsation de coupure pour éviter d'avoir à synthétiser une avance de phase importante ($1/T_i$ grand).

On va choisir ici une avance de phase d'environ 30° .

On a donc d'une part

$$\text{Arg}(C(j\omega_c)) =$$

et d'autre part :

$$\begin{aligned}\arctan(\omega_c T_i) &= \\ &= \\ &\Rightarrow T_i =\end{aligned}$$

4. Il y a deux paramètres à calculer pour l'avance de phase :

$$\Phi_m = 30^\circ \Rightarrow a = \frac{1 + \sin(\Phi_m)}{1 - \sin(\Phi_m)} =$$

$$\omega_m = \omega_c = \frac{1}{T_d \sqrt{a}} \Rightarrow T_d = \frac{1}{\omega_m \sqrt{a}} =$$

5. Le gain proportionnel est obtenu partir de la relation $|L(j\omega_c)| = 1$, ce qui donne

$$|L(j\omega_c)|_{dB} = 0 \Rightarrow |C(j\omega_c)|_{dB} = -|G(j\omega_c)|_{dB}$$

donc on doit avoir

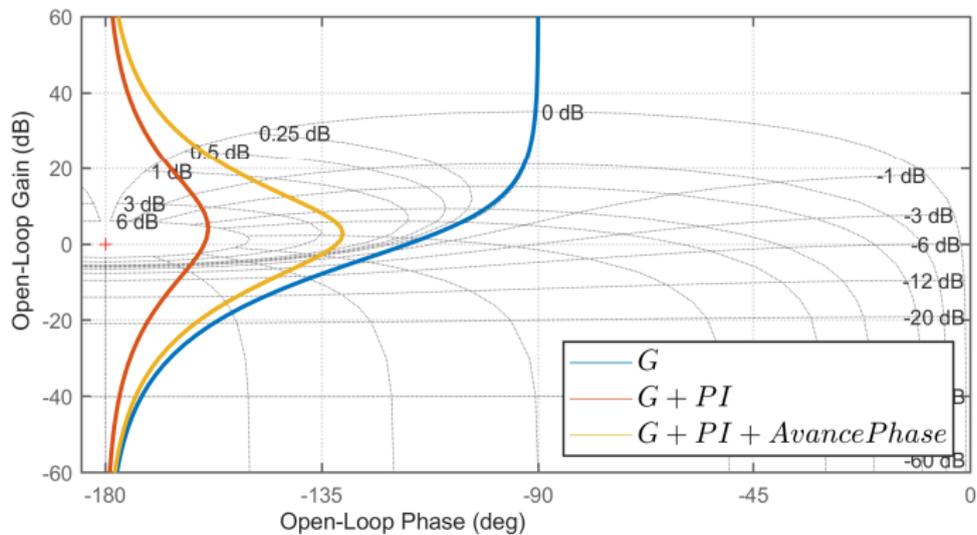
$$|C(j\omega_c)| = \frac{1}{0.263} = 3.8$$

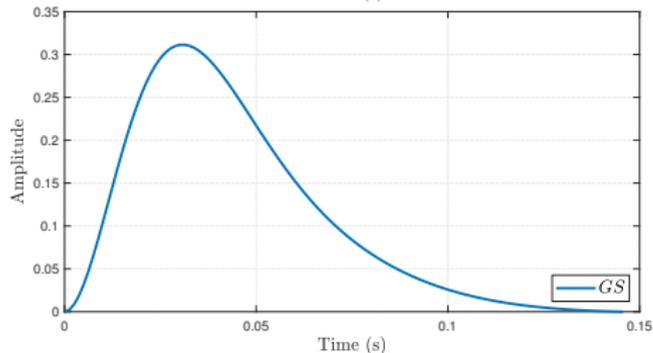
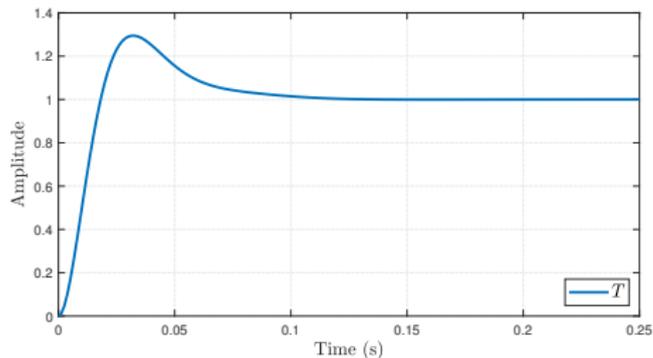
Or

$$|C(j\omega_c)| =$$

Donc

$$K_p =$$





il faut diminuer le
dépassement donc s'éloigner
du point critique

Augmenter l'avance de
phase donc Φ_m

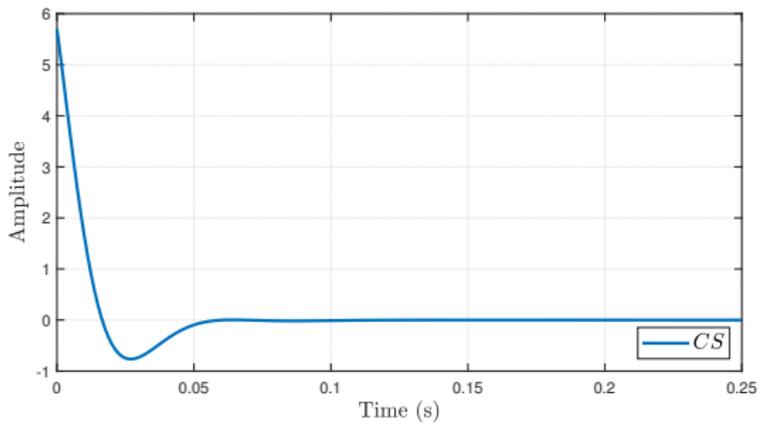
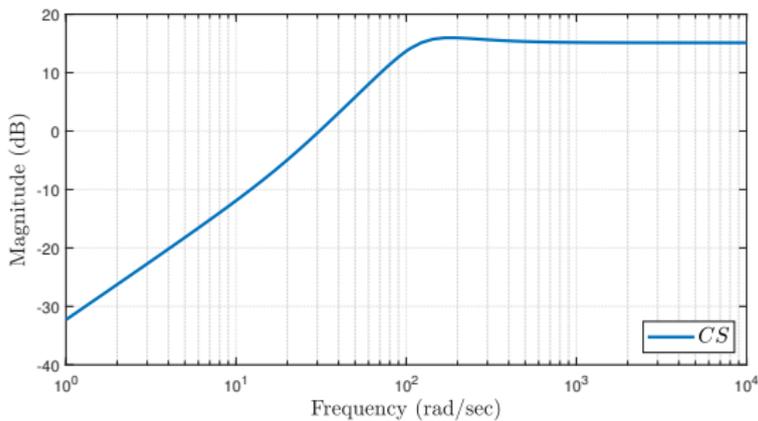


Sensibilité de la commande
aux bruits de mesures

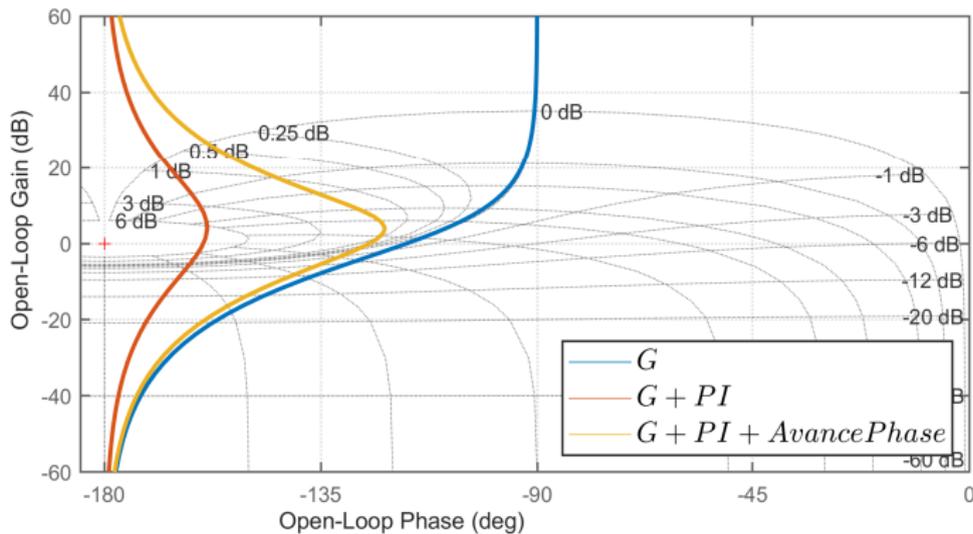
Réduire le retard de phase
donc augmenter T_i

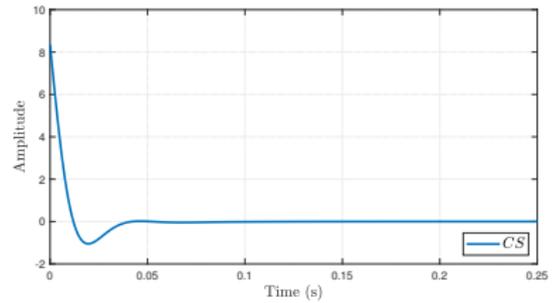
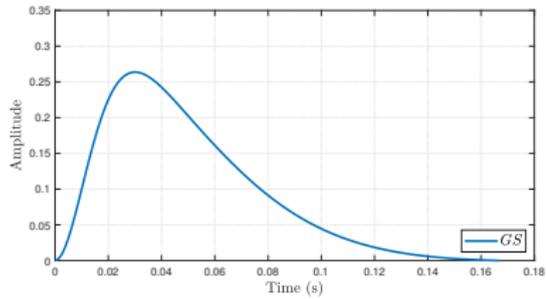
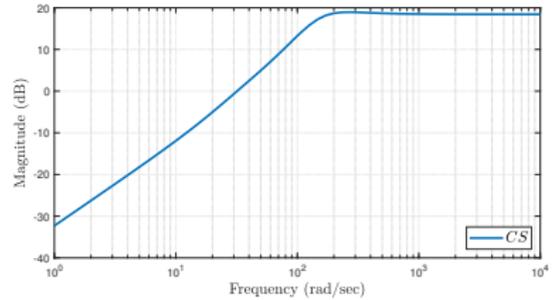
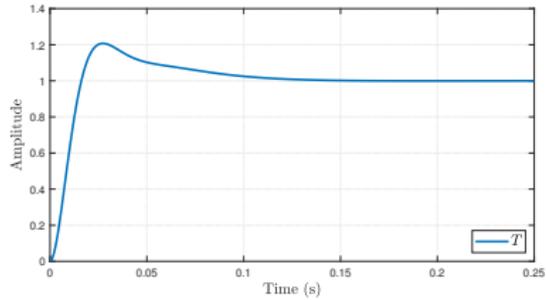


Rejet de la perturbation de
commande plus lente

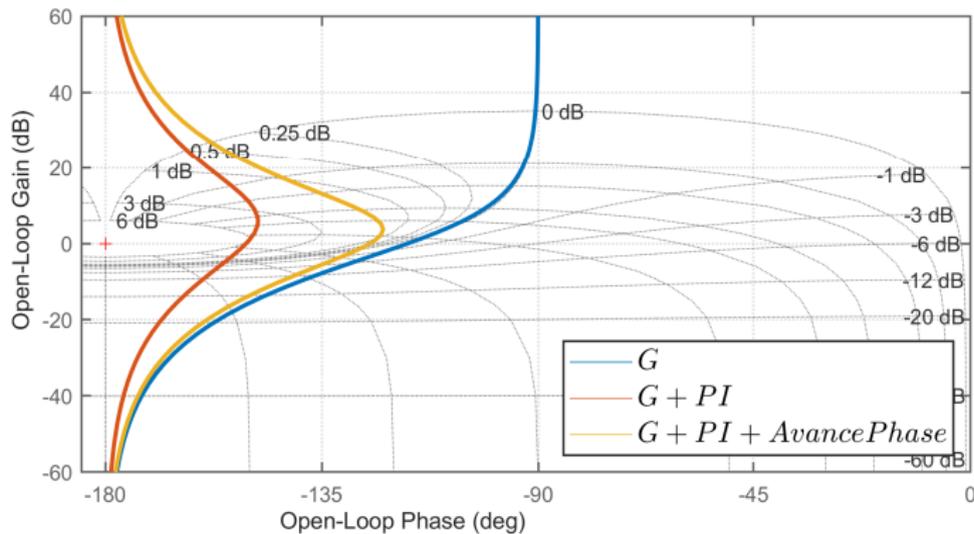


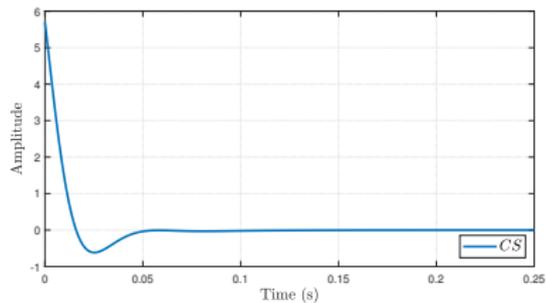
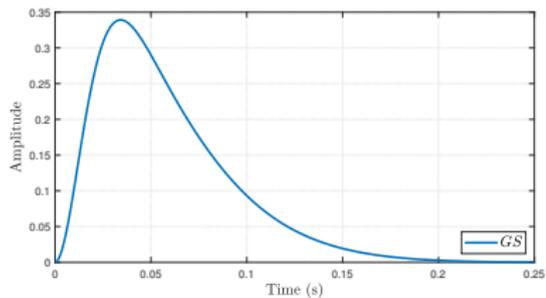
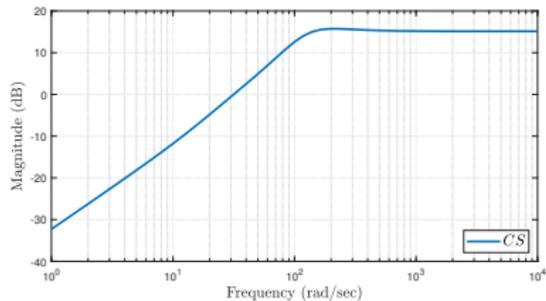
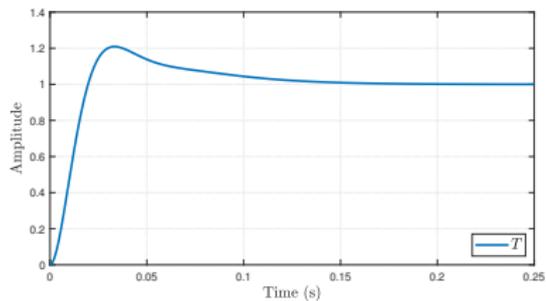
Si on augmente Φ_m de 30%, cela donne :





Si au lieu d'augmenter Φ_m , on augmente T_i de 50%, cela donne :





4. Synthèse des PID

4.1 Les actions d'un PID

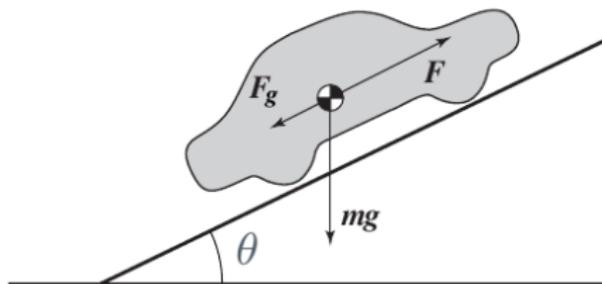
4.2 Relation BO/BF - cas du premier ordre avec intégrateur

4.3 Synthèse d'un PI

4.4 Synthèse d'un PI avance de phase

4.5 Un peu plus loin que le PID

Régulateur de vitesse pour voiture



Équations du mouvement dans la direction parallèle à la surface de la route :

$$m \frac{dv}{dt} = F_{\text{mot}} + F_{\text{aero}} + F_{\text{frict}} + F_g$$

avec

$$F_{\text{aero}} = -\frac{1}{2} \rho C_d A v |v|$$

$$F_g = -mg \sin(\theta)$$

$$F_{\text{frict}} = -mg C_r \cos(\theta) \text{sign}(v)$$

Modèle pour le moteur

- Relation vitesse moteur/couple :

$$T(\omega) = T_m \left(1 - \beta \left(\frac{\omega}{\omega_m} - 1 \right)^2 \right)$$

avec ω la vitesse de rotation du moteur en *rad/s*.

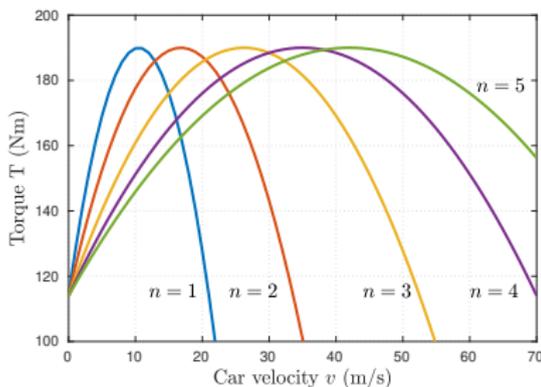
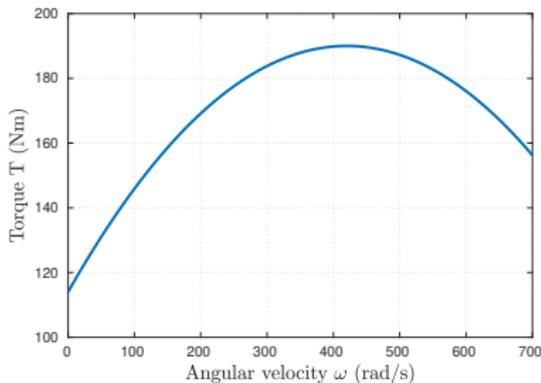
- Relation vitesse moteur / vitesse véhicule :

$$\omega = \alpha_n v$$

avec v la vitesse de la voiture en *m/s* et α_n est un coefficient qui dépend du rapport engagé ($\alpha_1 = 40$, $\alpha_2 = 25$, $\alpha_3 = 16$, $\alpha_4 = 12$, $\alpha_5 = 10$)

- Force appliquée au véhicule :

$$F_{mot} = \alpha_n T(\alpha_n v) u, \quad 0 \leq u \leq 1$$



- ▶ Le modèle complet du véhicule est donc donné par :

$$\frac{dv}{dt} = \frac{1}{m} \left(\alpha_n T(\alpha_n v) u - \frac{1}{2} \rho C_d A v |v| - mg C_r \cos(\theta) \text{sign}(v) - mg \sin(\theta) \right)$$

- ▶ Les valeurs numériques utilisées ici sont données par

$$T_m = 190, \quad \beta = 0.4, \quad \omega_m = 420, \quad \alpha_5 = 10, \quad C_r = 0.01, \\ m = 1500, \quad g = 9.81, \quad \rho = 1.2, \quad C_d A = 0.79$$

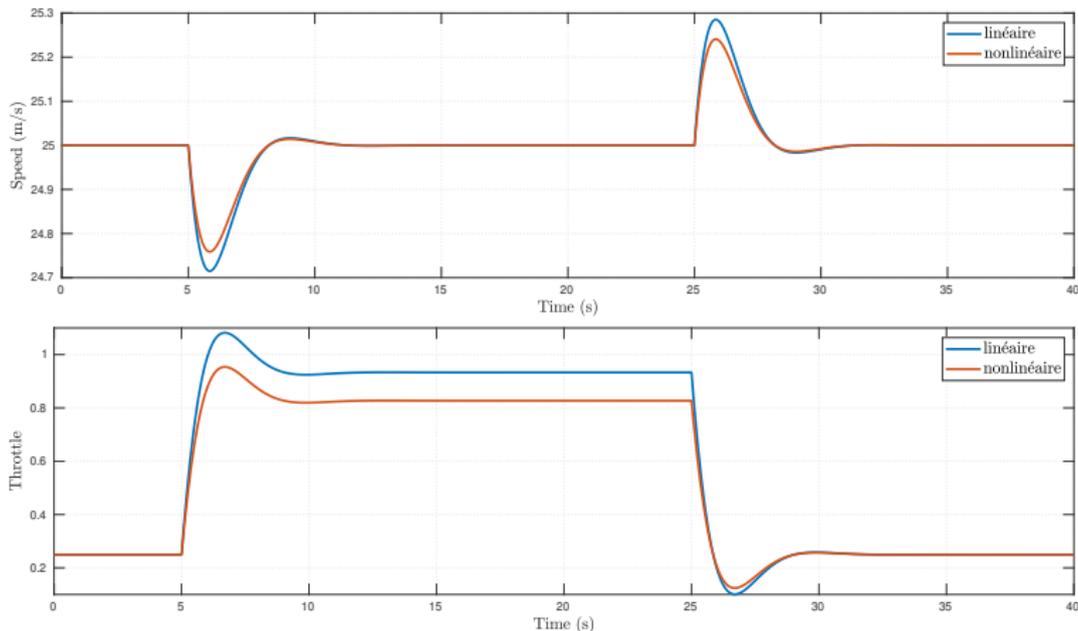
- ▶ On linéarise le modèle au point de fonctionnement $\bar{v} = 25$ (90km/h), ce qui donne $\bar{u} = 0.2497$
- ▶ Le système linéarisé au point de fonctionnement est donné par

$$G(p) = \frac{1.1837}{p + 0.0134}$$

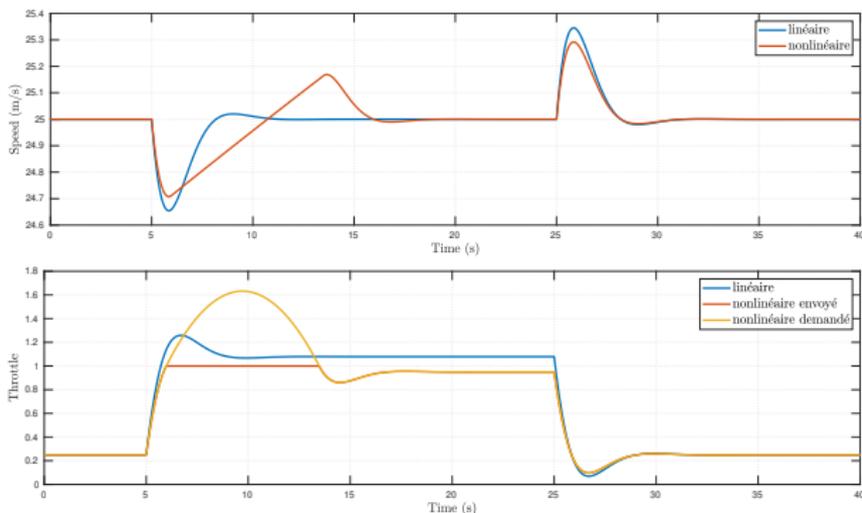
Afin de réguler la vitesse de la voiture, nous utilisons un correcteur de type PI :

$$C(p) = 1.5 \frac{p + 1}{p}$$

On considère dans un premier temps que la pente change de $0deg$ à $4deg$ entre $5s$ et $25s$:



Que se passe-t-il si la pente est un peu plus raide, par exemple égale à $4.85deg$:



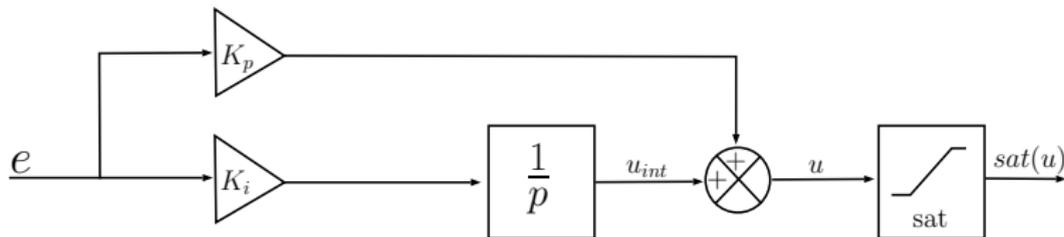
Qu'est ce qui ne va pas ?

- ▶ Une fois que l'entrée est saturée, l'intégrale de l'erreur continue d'augmenter (integrator wind-up).
- ▶ Quand l'erreur diminue, la valeur importante de l'intégrale empêche le correcteur de reprendre rapidement en mode normal. Donc la réponse est retardée.

Une commande PI peut se décomposer sous la forme suivante :

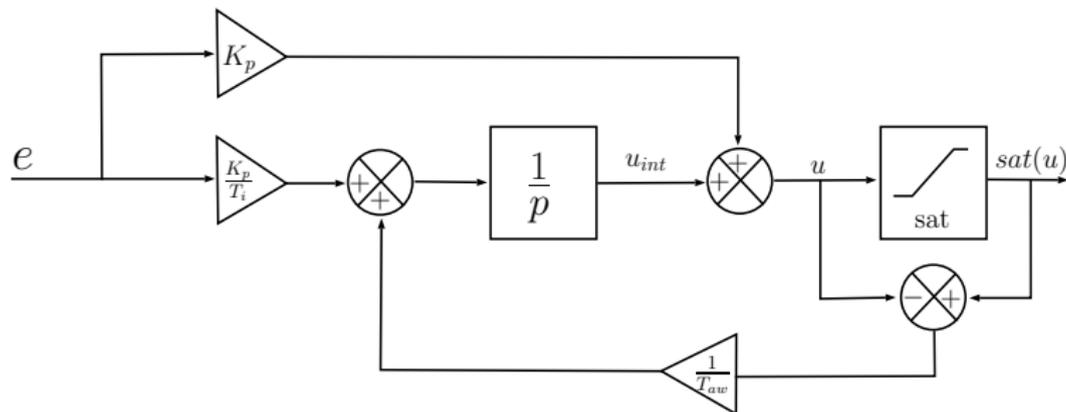
$$C(p) = K_p \frac{p + \frac{1}{T_i}}{p} = K_p + \frac{K_p}{T_i} \frac{1}{p}$$

Une solution est d'ajouter une action pour limiter la valeur de la sortie de l'intégrateur u_{int}

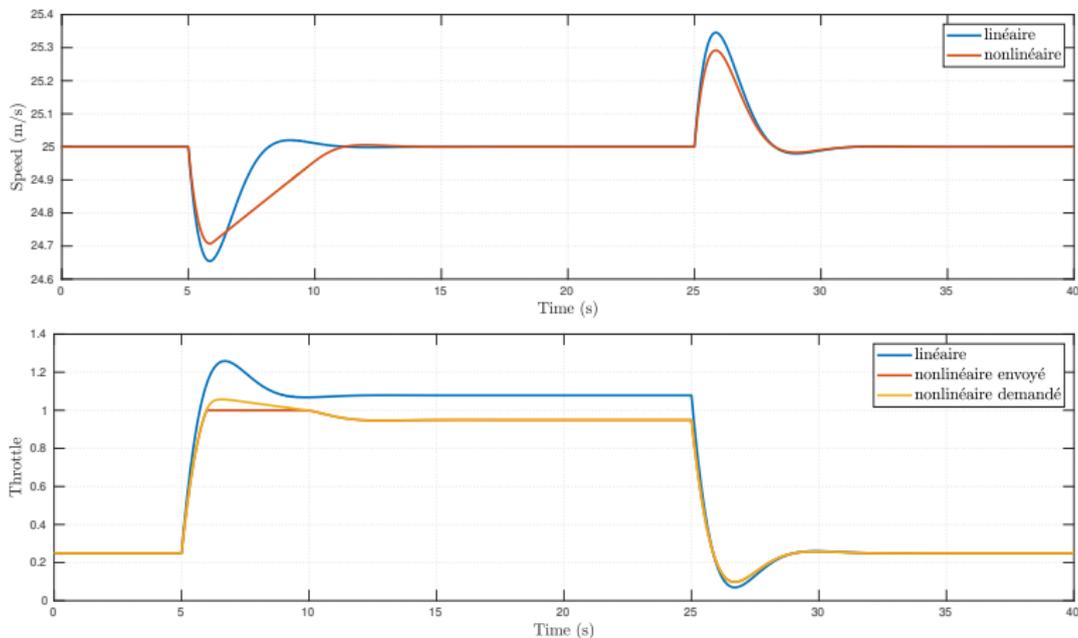


Afin d'éviter que l'intégrale n'augmente de trop quand la commande sature, on rajouter une action qui va modifier u_{int} :

$$u_{int} = \int \frac{K_p}{T_i} e + \frac{1}{T_{aw}} (sat(u) - u) dt$$



Résultat avec une pente à $4.85deg$ et un anti wind-up réglé à $T_{aw} = 0.2$:



Le bruit de mesure agit sur la sortie et sur la commande du système de commande. Son influence sur les performances en sortie est faible car le système a généralement un comportement passe-bas. Par contre, le transfert reliant le bruit de mesure avec le signal de commande est

$$T_{w_y \rightarrow u}(j\omega) = C(j\omega)S(j\omega)$$

D'après ce qu'on a vu précédemment, en hautes pulsations, on a :

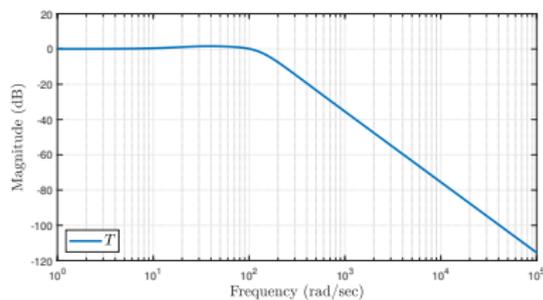
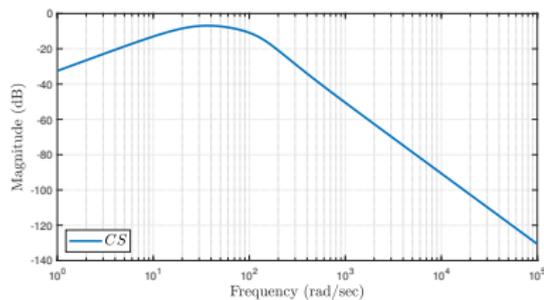
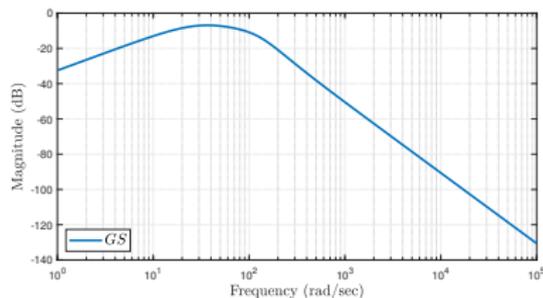
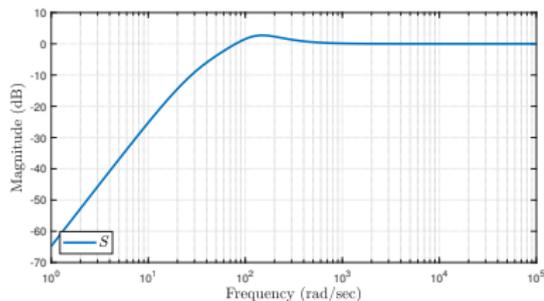
$$|T_{w_y \rightarrow u}(j\omega)| \approx |C(j\omega)|$$

Il faut donc que $|C(j\omega)| \approx 0$ en hautes pulsations. Cette condition n'est pas vérifiée pour un correcteur de type PID.

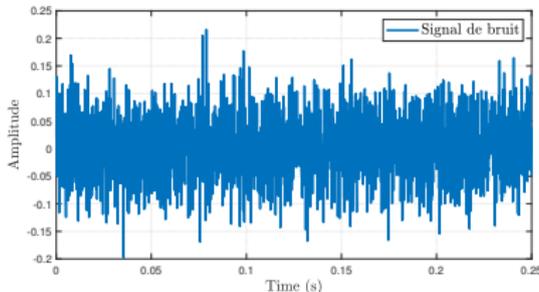
Il faut donc ajouter un filtre passe-bas au correcteur pour assurer une insensibilité de la commande aux bruits de mesure.

Les conséquences du non respect de cette condition est en premier lieu une dépense énergétique importante, ensuite une usure prématurée des actionneurs.

Si on reprend le correcteur PID qu'on a synthétisé pour le moteur, les fonctions de sensibilité sont données par :

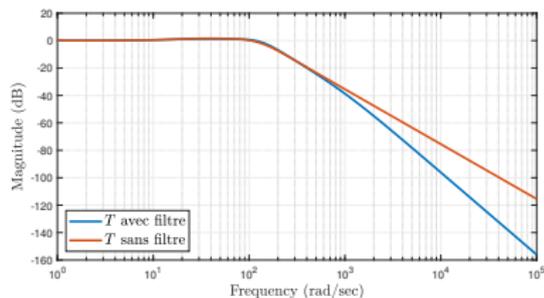
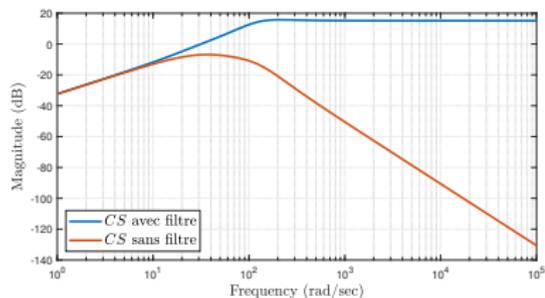
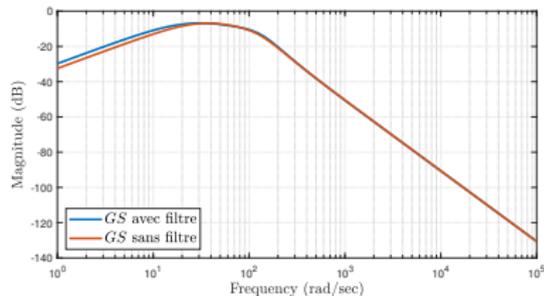
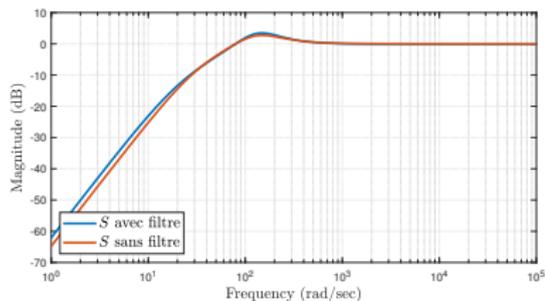


On suppose que la sortie mesurée du système est bruitée, avec un bruit donné par

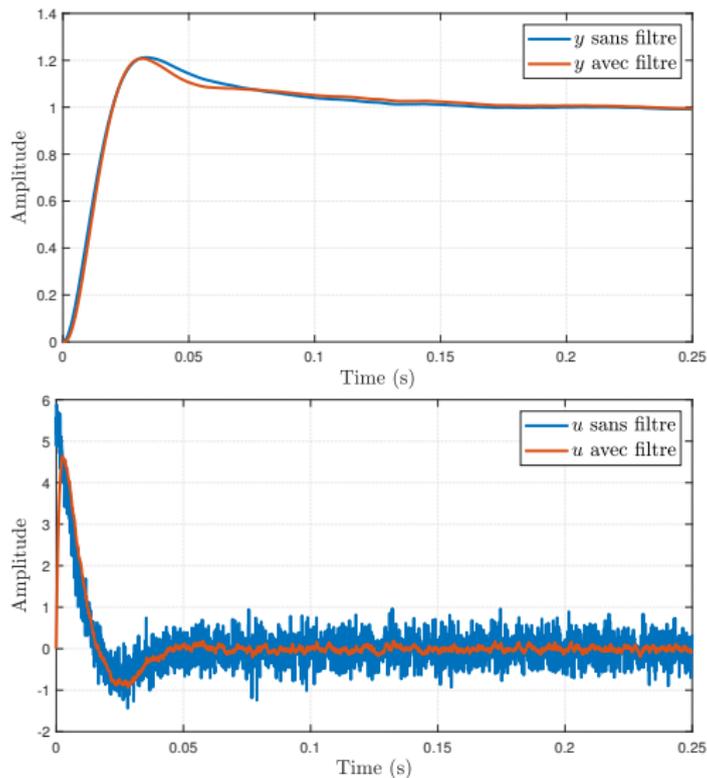


Afin de rajouter un filtre sur le correcteur, on procède comme suit :

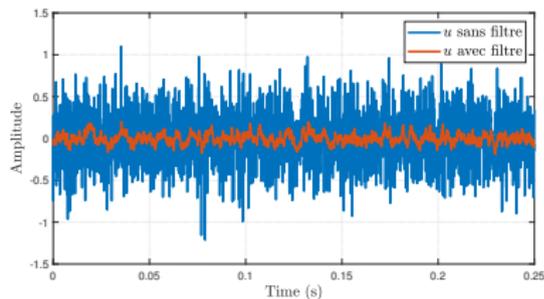
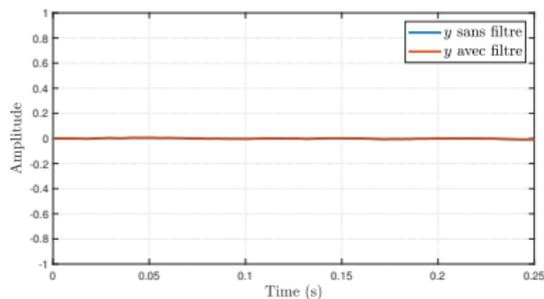
- 1) On calcule la pulsation de coupure voulue ω_c .
- 2) On définit un filtre du premier ordre $F(p) = \frac{1}{\tau p + 1}$ avec $\tau = \frac{1}{10\omega_c}$.
- 3) On fait la synthèse d'un correcteur $C(p)$, de type PI avance de phase sur le système $G(p) \times F(p)$.
- 4) Notre correcteur avec le filtre est donné par $C_f(p) = C(p) \times F(p)$.



Les résultats sont donnés par



Si on regarde ce qui se passe en régime établi, on obtient



Si on calcule l'énergie de la commande ($\sum_k T_k u_k^2$), on obtient :

- ▶ 1.16 dans le cas d'un correcteur avec filtre
- ▶ 30.16 dans le cas d'un correcteur PID sans filtre

soit un rapport de 26 !