Mathématiques

8 novembre 2023 – 1h30 – Patricia Jouannot-Chesney
Aucun document autorisé
Calculatrice interdite

Le barème est donné à titre indicatif

CORRIGE

EXERCICE 1 (3 points environ)

$X'(t) = AX(t)$ avec $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$

Le polynôme caractéristique $P_C(\lambda)$ = dét(A - λI_2) vaut $P_C(\lambda) = (2-\lambda)^2 + 1 = \lambda^2 - 4\lambda + 5$ soit Le polynôme caractéristique $P_C(\lambda)$ admet deux racines complexes conjuguées $2 - i$ et $2 + i$. A est diagonalisable dans C mais pas dans R.

On cherche le sev propre associé à une des valeurs propres $\lambda_1 = 2 - i$:

Les vecteurs propres de ce sev vérifient les équations suivantes : $\begin{cases} 2x - y = (2-i)x \\ x + 2y = (2-i)y \end{cases}$ i.e. $y = ix$ et appartiennent donc à une droite vectorielle dont un vecteur générateur est $V_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}$

Le sev propre associé à $\lambda_2 = \overline{\lambda_1} = 2 + i$ a pour générateur est $V_2 = \overline{V_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix}$

La solution homogène complexe est donc $X_h(t) = k_1 V_1 e^{(2-i)t} + k_2 V_2 e^{(2+i)t}$ (où k_1 et k_2 sont des constantes complexes) soit $\begin{cases} x(t) = k_1 e^{(2-i)t} + k_2 e^{(2+i)t} \\ y(t) = ik_1 e^{(2-i)t} - ik_2 e^{(2+i)t} \end{cases}$.

Une autre base de l'ensemble des solutions est $\mathrm{Re}(V_1 e^{(2-i)t})$ et $\mathrm{Im}(V_1 e^{(2-i)t})$ soit $\mathrm{Re}\begin{pmatrix} e^{2t}e^{-it} \\ ie^{2t}e^{-it} \end{pmatrix}$ et $\mathrm{Im}\begin{pmatrix} e^{2t}e^{-it} \\ ie^{2t}e^{-it} \end{pmatrix}$ soit $\begin{pmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \end{pmatrix} e^{2t}$ et $\begin{pmatrix} -\sin(t) \\ \cos(t) \end{pmatrix} e^{2t}$,

Les solutions **réelles** du système différentiel suivant : $\begin{cases} x'(t) = 2x(t) - y(t) \\ y'(t) = x(t) + 2y(t) \end{cases}$ sont données par

$X_h(t) = C_1 \begin{pmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \end{pmatrix} e^{2t} + C_2 \begin{pmatrix} -\sin(t) \\ \cos(t) \end{pmatrix} e^{2t}$ soit $\begin{cases} x(t) = C_1 \cos(t) e^{2t} - C_2 \sin(t) e^{2t} \\ y(t) = C_1 \sin(t) e^{2t} + C_2 \cos(t) e^{2t} \end{cases}$.

Autre possibilité : on écrit les solutions du système homogène sous la forme de combinaisons linéaires des fonctions $\cos(t)e^{2t}$ et $\sin(t)e^{2t}$ soit : $\begin{cases} x(t) = (C\cos(t) + D\sin(t))e^{2t} \\ y(t) = (E\cos(t) + F\sin(t))e^{2t} \end{cases}$

On réinjecte dans le système et on identifie :

$$\begin{cases} (-C\sin(t) + D\cos(t))e^{2t} + 2(C\cos(t) + D\sin(t))e^{2t} = (2C\cos(t) + 2D\sin(t) - E\cos(t) - F\sin(t))e^{2t} \\ (-E\sin(t) + F\cos(t))e^{2t} + 2(E\cos(t) + F\sin(t))e^{2t} = (C\cos(t) + D\sin(t) + 2E\cos(t) + 2F\sin(t))e^{2t} \end{cases}$$

ou $\begin{cases} -C\sin(t) + D\cos(t) = -E\cos(t) - F\sin(t) \\ -E\sin(t) + F\cos(t) = C\cos(t) + D\sin(t) \end{cases}$ soit $\begin{cases} E = -D \\ F = C \end{cases}$

On a donc comme solution du système : $\begin{cases} x(t) = (C\cos(t) + D\sin(t))e^{2t} \\ y(t) = (-D\cos(t) + C\sin(t))e^{2t} \end{cases}$ ou

$X_h(t) = CX_1(t) + DX_2(t)$ avec $X_1(t) = \begin{pmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \end{pmatrix} e^{2t}$ et $X_2(t) = \begin{pmatrix} \sin(t) \\ -\cos(t) \end{pmatrix} e^{2t}$ (avec C et D des constantes réelles)

EXERCICE 2 (6 points environ)

$X'(t) = AX(t) + B(t)$ avec $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$ et $B(t) = \begin{pmatrix} 4t + 1 + 7exp(-t) \\ 2t + 4 \end{pmatrix}$

Solution homogène :

Le polynôme caractéristique $P_C(\lambda)$ = dét(A - λI_2) vaut $P_C(\lambda) = (2 - \lambda)(3 - \lambda) - 12 = \lambda^2 - 5\lambda - 6$ soit $P_C(\lambda) = (\lambda + 1)(\lambda - 6)$. Le polynôme caractéristique $P_C(\lambda)$ admet deux racines réelles -1 et 6. A est diagonalisable dans R.

On cherche les sev propres associés aux valeurs propres :

Pour $\lambda_1 = -1$, les vecteurs propres de ce sev vérifient les équations : $\begin{cases} 2x + 3y = -x \\ 4x + 3y = -y \end{cases}$ i.e. $y = -x$ => un générateur possible est $V_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$, soit Ker(A+I)=VECT($V_1$).

Pour $\lambda_2 = 6$, les vecteurs propres de ce sev vérifient les équations : $\begin{cases} 2x + 3y = 6x \\ 4x + 3y = 6y \end{cases}$ i.e. $y = \frac{4}{3}x$ => un générateur possible est $V_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$, soit Ker(A-6I)=VECT($V_2$).

La solution est donc $X_h(t) = k_1 V_1 e^{-t} + k_2 V_2 e^{6t}$ (où k_1 et k_2 sont des constantes) soit

$$\begin{cases} x(t) = k_1 e^{-t} + 3k_2 e^{6t} \\ y(t) = -k_1 e^{-t} + 4k_2 e^{6t} \end{cases}$$

Solution générale :

On choisit comme solution particulière : $X_p(t) = \begin{pmatrix} at + b + (\alpha t + \beta)\exp(-t) \\ ct + d + (\gamma t + \delta)\exp(-t) \end{pmatrix}$, que l'on peut scinder en deux : la partie polynomiale et la partie contenant les exponentielles. On réinjecte dans le système différentiel et on identifie les coefficients :

$\begin{pmatrix} a + (\alpha - \alpha t - \beta)\exp(-t) \\ c + (\gamma - \gamma t - \delta)\exp(-t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2at + 2b + 3ct + 3d + (2\alpha t + 2\beta + 3\gamma t + 3\delta)\exp(-t) + 4t + 1 + 7\exp(-t) \\ 4at + 4b + 3ct + 3d + (4\alpha t + 4\beta + 3\gamma t + 3\delta)\exp(-t) + 2t + 4 \end{pmatrix}$, ce qui conduit $\begin{cases} 2a + 3c + 4 = 0 \\ 2b + 3d + 1 = a \\ 4a + 3c + 2 = 0 \\ 4b + 3d + 4 = c \end{cases}$ pour la partie polynomiale et $\begin{cases} -\alpha = 2\alpha + 3\gamma \\ \alpha - \beta = 2\beta + 3\delta + 7 \\ -\gamma = 4\alpha + 3\gamma \\ \gamma - \delta = 4\beta + 3\delta \end{cases}$ pour la partie contenant des exponentielles.

On obtient $\begin{cases} a = 1 \\ c = -2 \\ 2b + 3d = 0 \\ 2b + 3 = -3 \end{cases}$ soit $\begin{cases} a = 1 \\ c = -2 \\ b = -3 \\ d = 2 \end{cases}$ et $\begin{cases} \gamma = -\alpha \\ \alpha = 3\beta + 3\delta + 7 \\ \gamma = -\alpha \\ -\alpha = 4\beta + 4\delta \end{cases}$ $\begin{cases} \gamma = -\alpha \\ \beta + \delta = -1 \\ \gamma = -4 \\ \alpha = 4 \end{cases}$ soit $\begin{cases} \beta = 0 \\ \delta = -1 \\ \gamma = -4 \\ \alpha = 4 \end{cases}$ par exemple, le choix de β et de γ n'est pas unique.

On obtient comme solution particulière $X_p(t) = \begin{pmatrix} t - 3 + 4t\exp(-t) \\ -2t + 2 - (4t + 1)\exp(-t) \end{pmatrix}$ et comme solution générale du système différentiel $\begin{cases} x(t) = k_1 e^{-t} + 3k_2 e^{6t} + t - 3 + 4t\exp(-t) \\ y(t) = -k_1 e^{-t} + 4k_2 e^{6t} - 2t + 2 - (4t + 1)\exp(-t) \end{cases}$

EXERCICE 3 (4 points environ)

$X'(t) = AX(t) + B(t)$ avec $A = \begin{pmatrix} -3 & -1 \\ 4 & -7 \end{pmatrix}$ et $B(t) = \begin{pmatrix} 7exp(3t) \\ 6exp(3t) \end{pmatrix}$

Solution homogène :

Le polynôme caractéristique $P_C(\lambda)$ = dét(A - λI_2) vaut $P_C(\lambda) = (-3 - \lambda)(-7 - \lambda) + 4 = \lambda^2 + 10\lambda + 25$ soit $P_C(\lambda) = (\lambda + 5)^2$. Le polynôme caractéristique $P_C(\lambda)$ admet une racine double réelle -5. A sera diagonalisable uniquement si le sev propre est de dimension 2. Dans le cas contraire, le polynôme étant scindé dans R, elle sera trigonalisable.

On cherche le sev propre associé à la valeur propre double : les vecteurs propres de ce sev vérifient les équations : $\begin{cases} -3x - y = -5x \\ 4x - 7y = -5y \end{cases}$ i.e. $y = 2x$ => il s'agit de l'équation d'un sev de dimension 1 (droite vectorielle), un générateur possible est $V_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, soit Ker(A+5I)=VECT($V_1$). A n'est pas diagonalisable.

A est semblable à une matrice de Jordan : $A = PJP^{-1}$ avec $J = \begin{pmatrix} -5 & 1 \\ 0 & -5 \end{pmatrix}$ et les colonnes de P sont constituées de V_1 et d'un vecteur V_2 vérifiant $AV_2 = -5V_2 + V_1$.
Cherchons les composantes (x,y) de V_2 : $\begin{cases} -3x - y = -5x + 1 \\ 4x - 7y = -5y + 2 \end{cases}$ soit $\begin{cases} 2x - y = 1 \\ 4x - 2y = 2 \end{cases}$. Pour V_2, on choisit un vecteur vérifiant $y = 2x - 1$, par exemple $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ => la matrice de passage est alors $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$. Dans cette nouvelle base, le système différentiel s'écrit $U'(t) = JU(t)$, où U(t) est relié à X(t) par la relation $X(t) = PU(t)$. On pose $U(t) = \begin{pmatrix} u(t) \\ v(t) \end{pmatrix}$, le système différentiel est $\begin{cases} u'(t) = -5u(t) + v(t) \\ v'(t) = -5v(t) \end{cases}$ ou $\begin{cases} u'(t) + 5u(t) = k_2 e^{-5t} \\ v(t) = k_2 e^{-5t} \end{cases}$ qui a pour solution $\begin{cases} u(t) = k_2 t\, e^{-5t} + k_1 e^{-5t} \\ v(t) = k_2 e^{-5t} \end{cases}$. Et comme $X(t) = PU(t)$, on trouve comme solution $\begin{cases} x_h(t) = k_1 e^{-5t} + k_2 e^{-5t} + k_2 t e^{-5t} \\ y_h(t) = 2k_1 e^{-5t} + 2k_2 t e^{-5t} + k_2 e^{-5t} \end{cases}$ (où k_1 et k_2 sont des constantes)

Solution générale :

On choisit comme solution particulière : $X_p(t) = \begin{pmatrix} a\exp(3t) \\ b\exp(3t) \end{pmatrix}$. On réinjecte dans le système différentiel et on identifie les coefficients :
$\begin{pmatrix} 3a\exp(3t) \\ 3b\exp(3t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (-3a - b)\exp(3t) + 7\exp(3t) \\ (4a - 7b)\exp(3t) + 6\exp(3t) \end{pmatrix}$, ce qui conduit $\begin{cases} 3a = -3a - b + 7 \\ 3b = 4a - 7b + 6 \end{cases}$ soit
$\begin{cases} 6a = 7 - b \\ 10b = 4a + 6 \end{cases}$ soit $\begin{cases} a = 1 \\ b = 1 \end{cases}$ d'où la solution particulière $X_p(t) = \begin{pmatrix} \exp(3t) \\ \exp(3t) \end{pmatrix}$
La solution générale est donc $\begin{cases} x(t) = k_1 e^{-5t} + k_2 e^{-5t} + k_2 t e^{-5t} + \exp(3t) \\ y(t) = 2k_1 e^{-5t} + 2k_2 t e^{-5t} + k_2 e^{-5t} + \exp(3t) \end{cases}$

EXERCICE 4 (4 points environ)

$f(x,y)$ de classe C^2, définie sur R^2 : $f(x,y) = x^3 + 4xy - y^2 + 2y + 2$.

1) Dérivées partielles premières de f sur R^3 : $\frac{\partial f}{\partial x} = 3x^2 + 4y$ et $\frac{\partial f}{\partial y} = 4x - 2y + 2$

Dérivées partielles secondes de f : $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 6x$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = -2$ et $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = 4$.

2) Les points critiques de f sont caractérisés par $\frac{\partial f}{\partial x} = 0$ et $\frac{\partial f}{\partial y} = 0$. Ces points vérifient donc $\begin{cases} 3x^2 + 4y = 0 \\ 4x - 2y + 2 = 0 \end{cases}$ soit $\begin{cases} 3x^2 + 8x + 4 = 0 \\ y = 2x + 1 \end{cases}$. On obtient les deux racines $x_1 = -2$ et $x_2 = -\frac{2}{3}$ qui sont associés à $y_1 = -3$ et $y_2 = -\frac{1}{3}$ => il y a deux points critiques (-2,-3) et (-2/3,-1/3)

La matrice hessienne vaut en un point (x,y) quelconque $H_f = \begin{pmatrix} 6x & 4 \\ 4 & -2 \end{pmatrix}$.

Pour le point (-2,-3), la matrice vaut $H_f = \begin{pmatrix} -12 & 4 \\ 4 & -2 \end{pmatrix}$. Les valeurs propres sont toutes les deux négatives (somme=-14<0 et déterminant=8>0). Il s'agit d'un maximum local.

Pour le point (-2/3,-1/3), la matrice vaut $H_f = \begin{pmatrix} -4 & 4 \\ 4 & -2 \end{pmatrix}$. Les valeurs propres ne sont pas de même signe (déterminant=-8<0). Il s'agit d'un point selle.

EXERCICE 5 (3 points environ)

Soient f et F deux fonctions à valeurs réelles, de classe C ^{2} sur R^2. Les variables de f sont (x, y) et celles de F s'appellent (u, v). Le lien entre f et F est $f(x, y) = F(u, v)$, où $u = U(x, y) = ax + by$ et $v = V(x, y) = cx + dy$, avec a, b, c et d des constantes réelles.

1) La condition que doit vérifier le quadruplet (a, b, c, d) pour que l'application ∅ définie par $\emptyset(x, y) = (u, v)$ soit bijective de R^2 vers R^2, et donc inversible est que la matrice Jacobienne associée soit inversible. Son déterminant vaut ad-bc, il faut donc ad-bc ≠ 0

2) $\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial F(u,v)}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial F(u,v)}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x} = a\frac{\partial F(u,v)}{\partial u} + c\frac{\partial F(u,v)}{\partial v} = a\frac{\partial F}{\partial u} + c\frac{\partial F}{\partial v}$

$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial F(u,v)}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial F(u,v)}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y} = b\frac{\partial F(u,v)}{\partial u} + d\frac{\partial F(u,v)}{\partial v} = b\frac{\partial F}{\partial u} + d\frac{\partial F}{\partial v}$

3) $2\frac{\partial f}{\partial x} - 3\frac{\partial f}{\partial y} = 0$ est équivalent à $(2a - 3b)\frac{\partial F}{\partial u} + (2c - 3d)\frac{\partial F}{\partial v} = 0$. On choisit a=3 et b=2, la condition du 1) devient 3d-2c ≠ 0 et l'EDP devient $(2c - 3d)\frac{\partial F}{\partial v} = 0$ soit $\frac{\partial F}{\partial v} = 0$ car le coefficient est non nul (la constante c du texte vaut donc zéro).

La solution est $F(u, v) = \varphi(u)$ et la solution générale $f(x, y) = \varphi(3x + 2y)$.