Domaine d'élasticité
Etude numérique

Gislaine MARIE, Septembre 2023

ÉCOLE PUBLIQUE D'INGÉNIEURS
CENTRE DE RECHERCHE

L'École des INGÉNIEURS Scientifiques

DÉFINITION DU DOMAINE D'ÉLASTICITÉ
LES COMPORTEMENTS LINÉAIRES ET NON-LINÉAIRES

Les systèmes **linéaires** sont les systèmes que nous avons étudiés jusque-là en simulation numérique.

Exemple de linéarité : la loi de Hooke décrivant le rapport linéaire entre la contrainte et la déformation.

$$\sigma = E.\varepsilon$$

Les structures linéaires se prêtent parfaitement aux analyses par éléments finis (calculs de matrices linéaires).

Les systèmes sont loin d'avoir tous un rapport linéaire entre la force exercée et le déplacement résultant.

Dans les autres cas, le comportement est dit **non-linéaire** car la courbe décrivant le comportement de tels systèmes n'est plus linéaire/droite.

La rigidité du système n'est plus constante mais varie en fonction du chargement.

DÉFINITION DU DOMAINE D'ÉLASTICITÉ
LES COMPORTEMENTS LINÉAIRES ET NON-LINÉAIRES

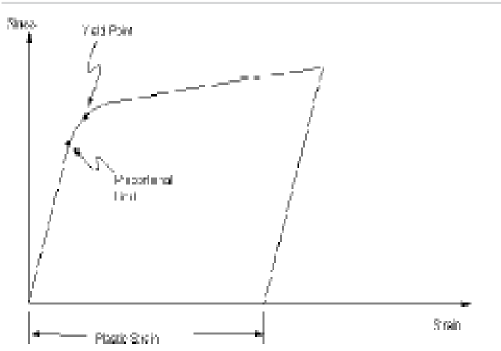
Le comportement devient non-linéaire lorsque la raideur du système est impactée par un changement brutal du chargement, tel que :

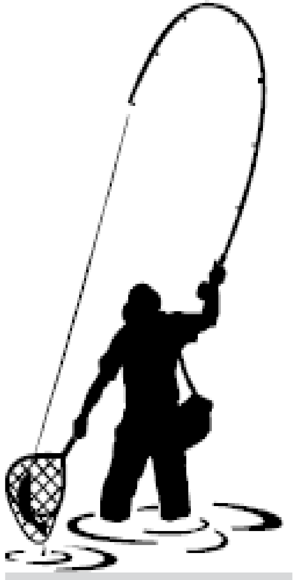
- Lorsque la contrainte dépasse la **limite d'élasticité** du matériau (cas des **matériaux non-linéaires** pour lesquels le rapport contrainte-déformation est non linéaire)

- Lorsque la **déformation** induite par le chargement devient **importante** (**non-linéarité géométrique** des cas de grandes déformations)

- Lorsqu'un changement de statut à lieu : typiquement, la **naissance d'un contact** entre deux corps, la **suppression ou ajout d'éléments**,…

Il arrive que ces 3 sources de non-linéarités soient combinées…





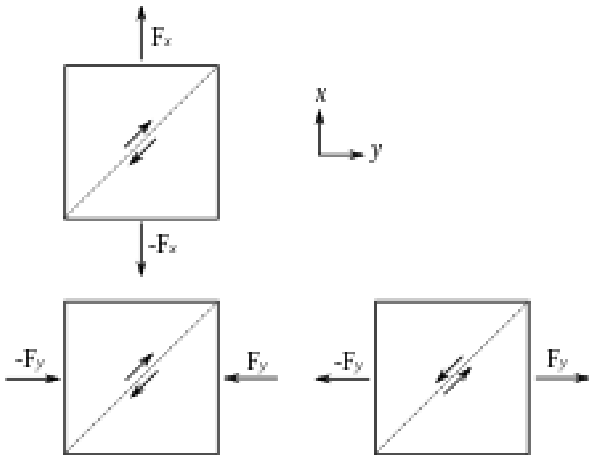
DÉFINITION DU DOMAINE D’ÉLASTICITÉ
LES CRITERES DE PLASTICITE

Le critère de plasticité est un critère permettant de savoir, sous des sollicitations données, si une pièce **se déforme plastiquement** ou si elle reste dans le domaine élastique.

Dans le cas de la traction uniaxiale d'une éprouvette d'un matériau ductile, la limite de contrainte au-delà de laquelle on a une déformation plastique est la **limite d'élasticité** σ_e.

Cette situation est recherchée pour la mise en forme (laminage, forgeage, pliage, emboutissage, etc.).

Schmid a montré que la déformation plastique des cristaux se fait par cisaillement, en faisant glisser les plans d'atomes les uns sur les autres. En chargement vierge, la **cission** (contrainte de cisaillement) est maximale pour un plan incliné de 45° par rapport à l'axe de traction.



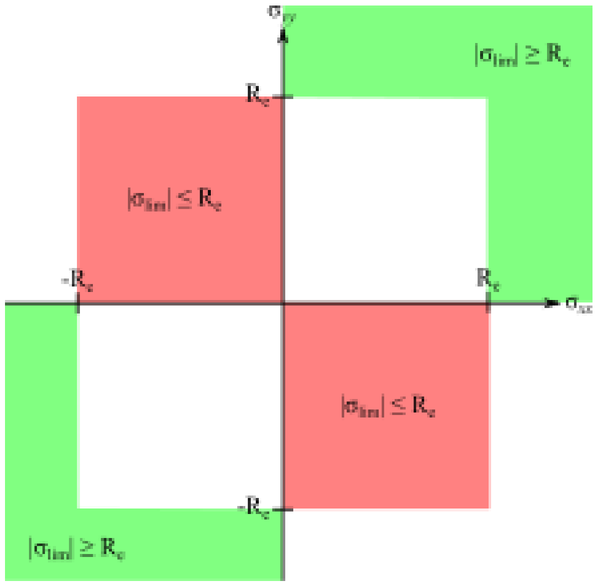
DÉFINITION DU DOMAINE D’ÉLASTICITÉ
LES CRITERES DE PLASTICITE

Si on sollicite l’éprouvette selon *x* et *y*, on obtient la cission (containte de cisaillement) résultante en projetant les forces de traction ou compression sur le plan à 45°

- si l'on a de la traction sur *x* et sur *y*, les cissions résultantes s'opposent, on atteint donc moins vite la limite élasticité ; la situation est identique si l'on a de la compression sur les deux axes
- si l'on a de la traction sur *x* et de la compression sur *y*, les cissions résultantes s'ajoutent, on atteint donc plus vite la limite d'élasticité

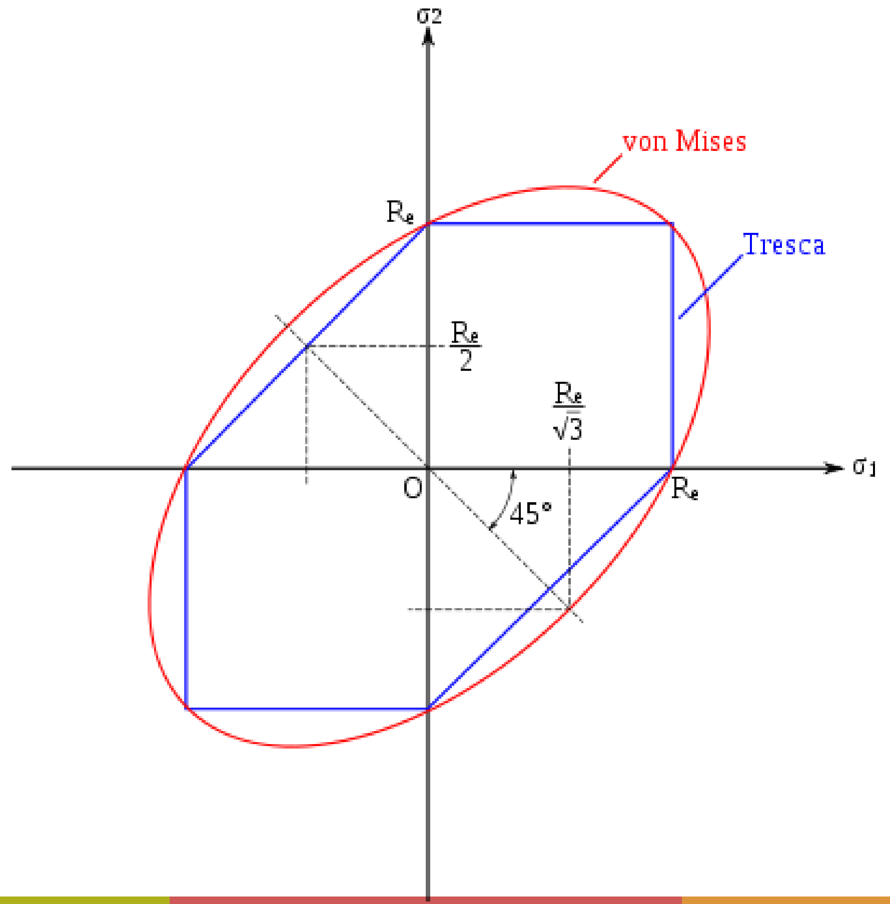
Si nous représentons la frontière entre les domaines élastique et plastique sur un graphique (σ_{xx}, σ_{yy})

- les contraintes valent σ_e sur les axes (traction ou compression uniaxiale)
- les contraintes pour plastifier sont plus élevées que σ_e lorsqu'elles sont de même signe
- les contraintes pour plastifier sont plus faibles que σ_e lorsqu'elles sont de signes opposés



LES CRITERES DE PLASTICITE EN CONTRAINTES PLANES

Dans un cas plus général, on représente cette frontière entre les domaines élastique et plastique dans l'espace des contraintes principales σ_I, σ_{II} et σ_{III}, et dans le cas des contraintes planes ($\sigma_{III} = 0$)

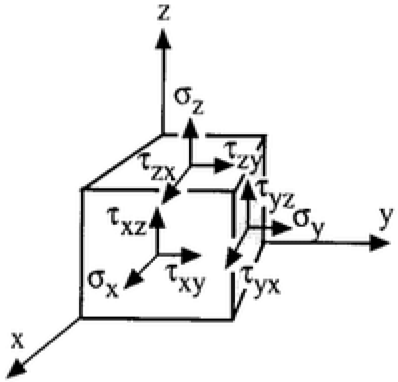


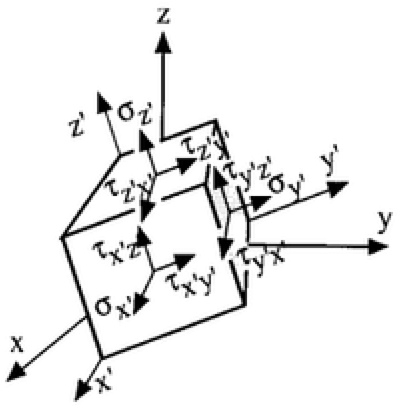
DÉFINITION DU DOMAINE D'ÉLASTICITÉ
CONTRAINTES PRINCIPALES

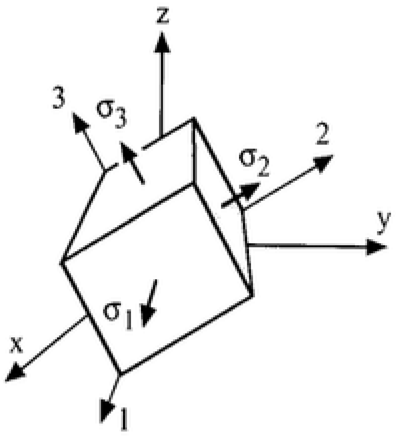
ENSI CAEN
ÉCOLE PUBLIQUE D'INGÉNIEURS
CENTRE DE RECHERCHE

Dans un cas plus général, on représente cette frontière entre les domaines élastique et plastique dans **<u>l'espace des contraintes principales</u>** σ_I, σ_{II} et σ_{III}.

Puisque le tenseur des contraintes est une matrice symétrique, il existe, au moins, une base orthonormée de l'espace dans laquelle le tenseur des contraintes est une matrice diagonale.







$$\sigma = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy} & \sigma_{yz} \\ \sigma_{zx} & \sigma_{zy} & \sigma_{zz} \end{bmatrix} (\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}) \longrightarrow \sigma = \begin{bmatrix} \sigma_I & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_{II} & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{III} \end{bmatrix} (\vec{I}, \vec{II}, \vec{III})$$

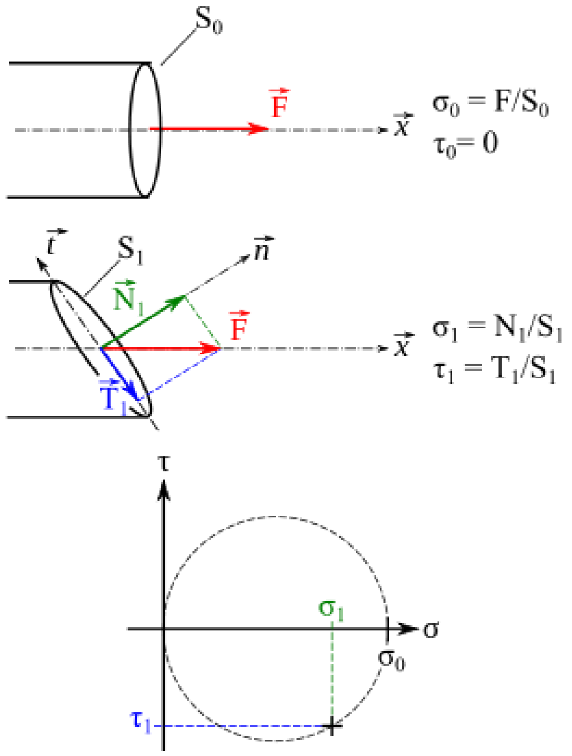
DÉFINITION DU DOMAINE D'ÉLASTICITÉ
CONTRAINTES PRINCIPALES

La base principale de contrainte a une signification physique : c'est celle dans laquelle il n'y a **pas de contrainte de cisaillement** (tous les termes non-diagonaux de la matrice sont nuls).

$$\sigma = \begin{bmatrix} \sigma_I & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_{II} & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{III} \end{bmatrix} (\vec{I}, \vec{II}, \vec{III})$$

On peut déterminer les directions et contraintes principales

- grâce au cercle de Mohr (représentation graphique 2D des états de contrainte, où l'axe horizontal représente l'amplitude de la contrainte normale et l'axe vertical représente l'amplitude de la contrainte de cisaillement),
- par les méthodes algébriques, en remarquant que les contraintes principales sont les valeurs propres du tenseur, et les directions principales, ses vecteurs propres.

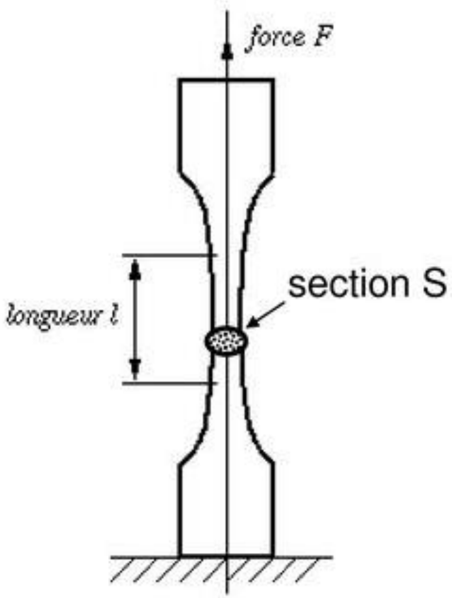


DÉFINITION DU DOMAINE D'ÉLASTICITÉ
CONTRAINTES PRINCIPALES – CAS PARTICULIERS

- Dans le **<u>cas d'une sollicitation uniaxiale</u>**, deux des contraintes principales sont nulles.
  On choisit par convention $\sigma_I \neq 0$
  x_I est l'axe de traction, on a $|\sigma_I| = F/S$ (la contrainte nominale), $\sigma_{II} = \sigma_{III} = 0$
  On a $\tau_{max} = ½|\sigma_I|$, et la cission est orientée à 45° de l'axe de traction

  Le tenseur des contraintes principales s'écrit donc :

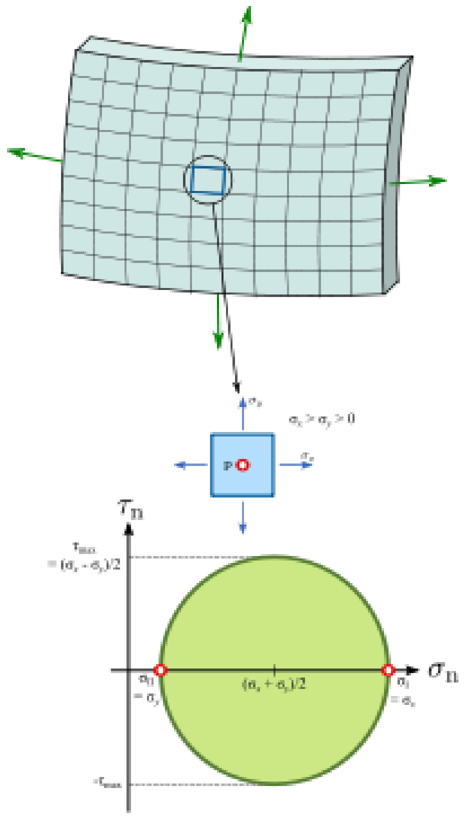
$$\begin{bmatrix} \sigma_I & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$



  Dans le cas de la compression unixiale, on a $\sigma_I < 0$, donc $\sigma_I < \sigma_{II}$ et $\sigma_I < \sigma_{III}$ contrairement à la convention initiale.

DÉFINITION DU DOMAINE D'ÉLASTICITÉ
CONTRAINTES PRINCIPALES – CAS PARTICULIERS

- Dans le **cas de contraintes planes**, une des contraintes principales est nulle
  On choisit arbitrairement $\sigma_{III} = 0$
  on peut alors avoir $\sigma_{II} < 0$ donc $\sigma_{II} < \sigma_{III}$, contrairement à la convention précédente
  Dans tous les cas, on a $\tau_{max} = ½|\sigma_I - \sigma_{II}|$



Le tenseur des contraintes principales s'écrit donc :

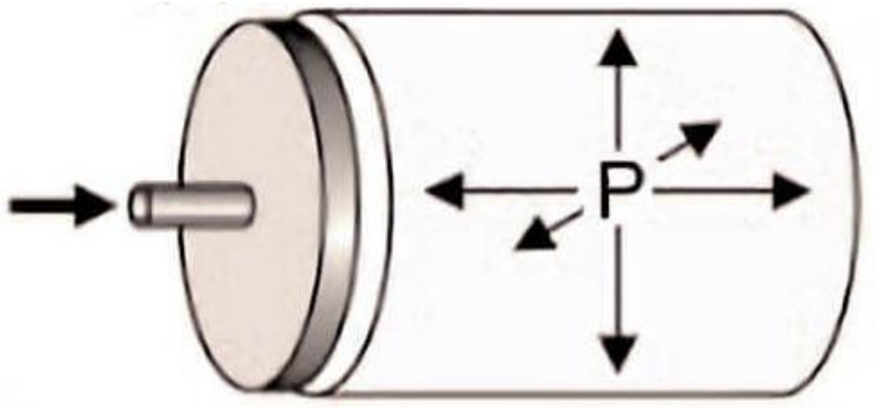
$$\begin{bmatrix} \sigma_I & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_{II} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

CONTRAINTES PRINCIPALES – CAS PARTICULIERS

- Dans le **cas d'une pression isostatique** P, on a $\sigma_I = \sigma_{II} = \sigma_{III} = P$
  On a $\tau_{max} = 0$

  Le tenseur des contraintes principales s'écrit :

$$\begin{bmatrix} P & 0 & 0 \\ 0 & P & 0 \\ 0 & 0 & P \end{bmatrix}$$



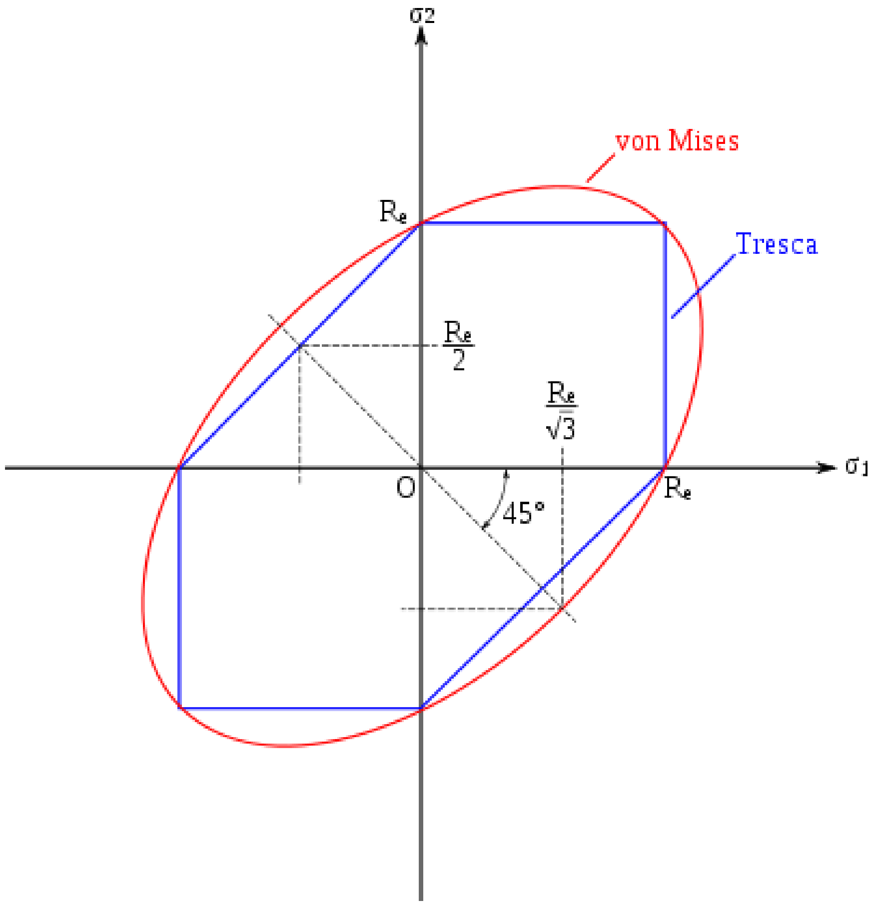
LES CRITERES DE PLASTICITE EN CONTRAINTES PLANES

Dans un cas plus général, on représente cette frontière entre les domaines élastique et plastique dans l'espace des contraintes principales σ_I, σ_{II} et σ_{III} (base orthonormée telle que le tenseur des contraintes soit une matrice diagonale).

Dans le cas des contraintes planes ($\sigma_{III} = 0$), on représente son intersection avec le plan (σ_I, σ_{II}) et la surface de charge est une courbe.

On utilise deux critères principaux :

- le critère de Tresca
- le **critère de von Mises**.



DÉFINITION DU DOMAINE D'ÉLASTICITÉ
LES CRITERES DE PLASTICITE EN CONTRAINTES PLANES

Dans le cas de contraintes planes *($\sigma_{III}=0$)*

- le critère de Tresca donnant la condition de déformation élastique est :

  $|\sigma_I - \sigma_{II}| \leq \sigma_e$ et $|\sigma_I - \sigma_{III}| = |\sigma_I| \leq \sigma_e$ et $|\sigma_{II} - \sigma_{III}| = |\sigma_{II}| \leq \sigma_e$

  La courbe est un hexagone.

- le critère de von Mises s'écrit : $\sqrt{{\sigma_I}^2 + {\sigma_{II}}^2 - \sigma_I\,\sigma_{II}} \leq \sigma_e$

  La surface limite est une ellipse.

DÉFINITION DU DOMAINE D'ÉLASTICITÉ
LES CRITERES DE PLASTICITE – CONTRAINTE EQUIVALENTE

La **contrainte équivalente** est une valeur calculée à partir du tenseur des contraintes, que l'on compare à la limite d'élasticité pour savoir si l'on est dans le domaine élastique ou plastique

Suivant le critère de plasticité retenu, on définit :

- la contrainte équivalente de Tresca : $\sigma_{eq} = max(|\sigma_I - \sigma_{II}|, |\sigma_{II} - \sigma_{III}|, |\sigma_{III} - \sigma_I|)$
- la **contrainte équivalente de von Mises** : : $\sigma_{eq} = \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{(\sigma_I - \sigma_{II})^2 + (\sigma_{III} - \sigma_{II})^2 + (\sigma_{III} - \sigma_I)^2}$

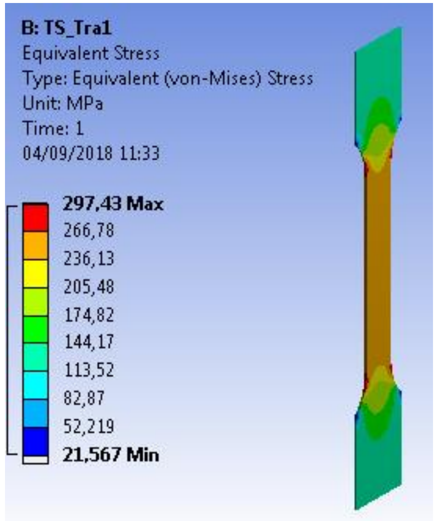
Dans un cas de sollicitations planes, pour lequel on n'a que deux contraintes normale σ et de cisaillement τ :

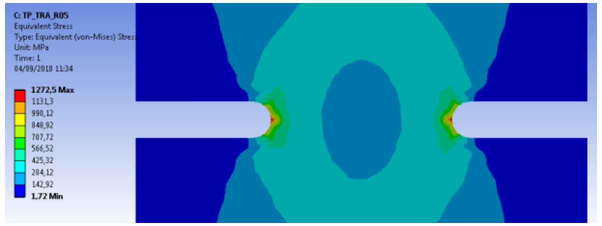
- la contrainte de Tresca : $\sigma_{eq} = \sqrt{\sigma^2 + 4\,\tau^2}$
- la contrainte de von Mises : $\sigma_{eq} = \sqrt{\sigma^2 + 3\,\tau^2}$

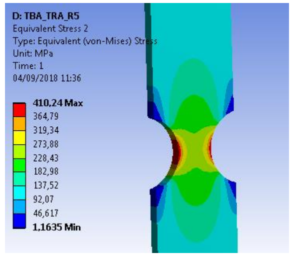
DÉFINITION DU DOMAINE D'ÉLASTICITÉ
BUT DU TP

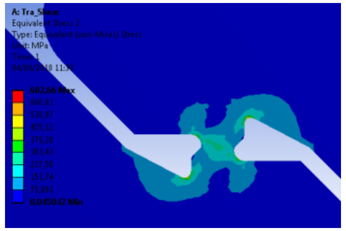
En modélisant les essais expérimentaux de traction sur différentes géométries d'éprouvettes, on cherche à mieux comprendre la définition de la limite d'élasticité d'un matériaux telle que définie par le critère de Von Mises. Pour cela, on va calculer les états de contrainte lorsque les pièces sont sollicitées en traction jusque σ_e, et représenter la surface de charge.

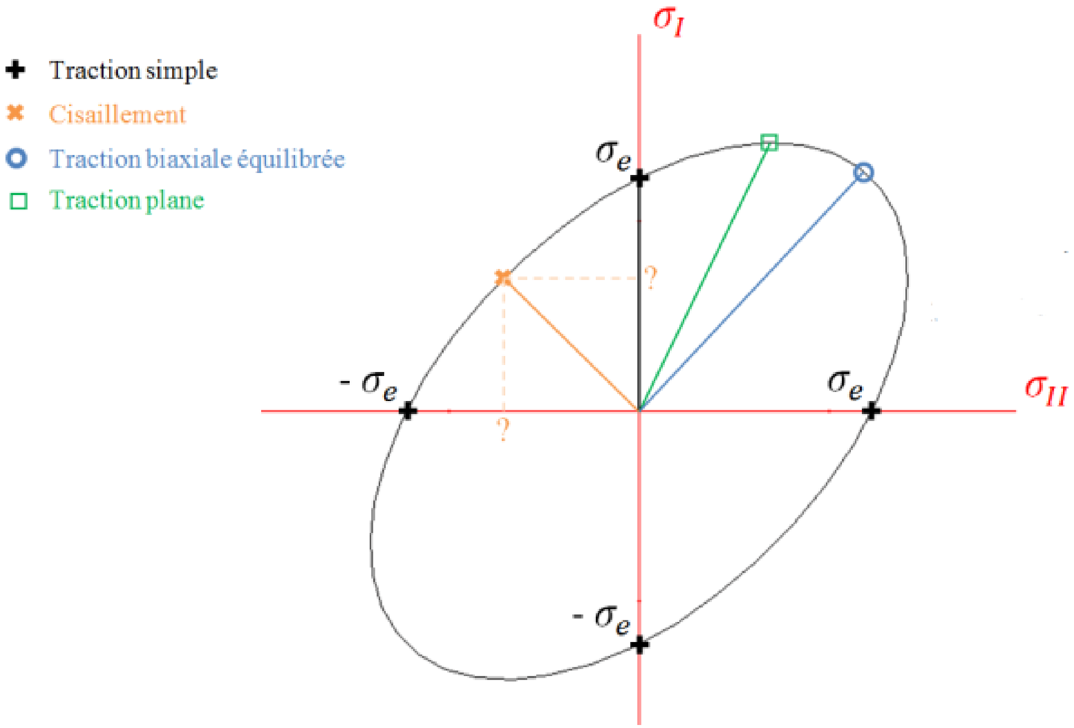
$$\sigma_{eq} = \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + {\sigma_1}^2 + {\sigma_2}^2}$$











DONNÉES ET STRATÉGIES

Vous devrez :

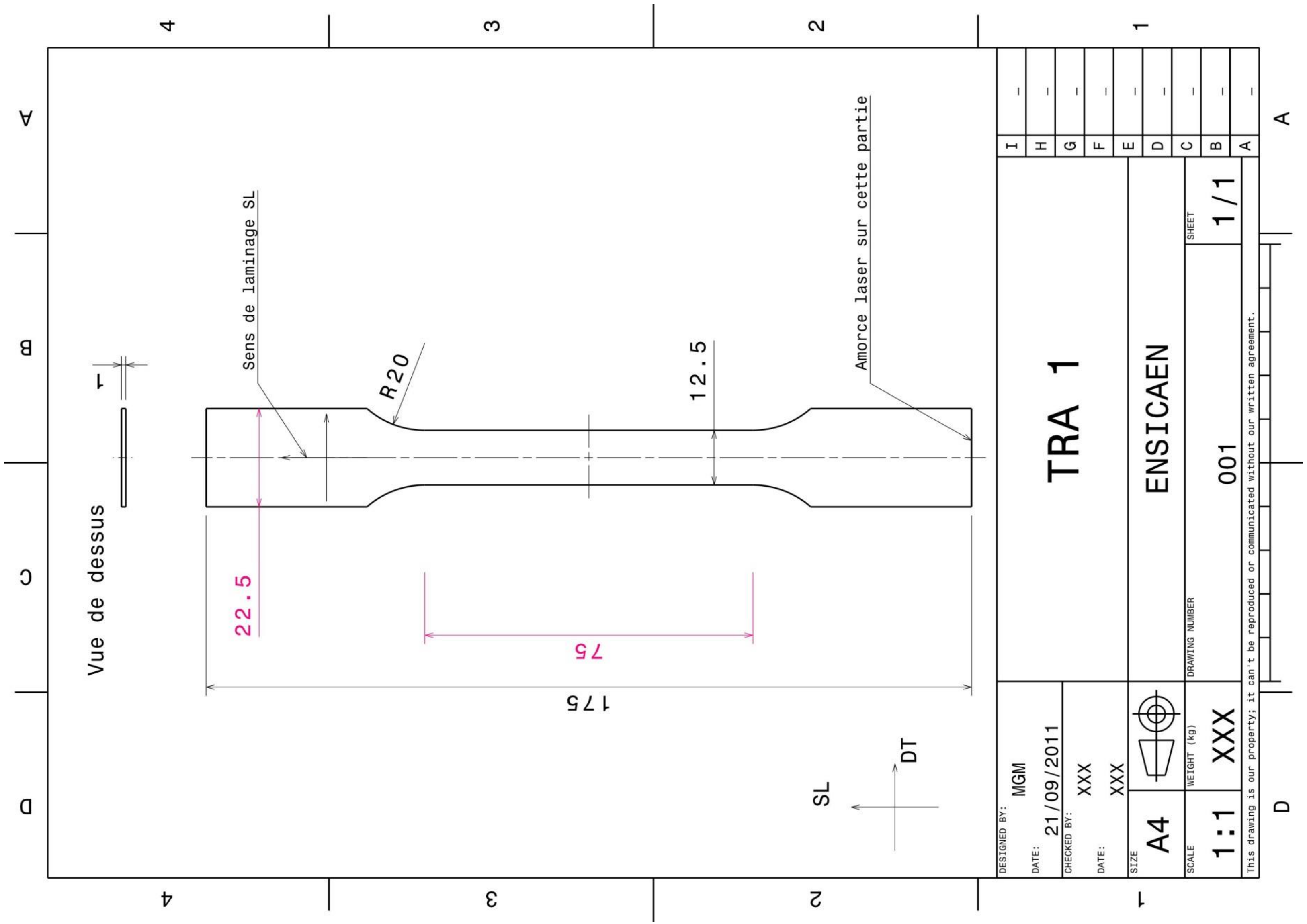
- Mettre en donnée des essais simples de traction
- Choisir un maillage de bonne qualité pour chaque éprouvette
- Trouver l'effort nécessaire pour arriver à la limite d'élasticité des quatre éprouvettes
- Exploiter les résultats (analyse des **<u>contraintes dans le repère des contraintes principales</u>**, **<u>dans le repère initial</u>** ainsi que la **<u>contrainte équivalente</u>**) et les critiquer
- Présenter vos résultats de façon pertinente et synthétique
- Si possible, faire le lien avec le cours associé

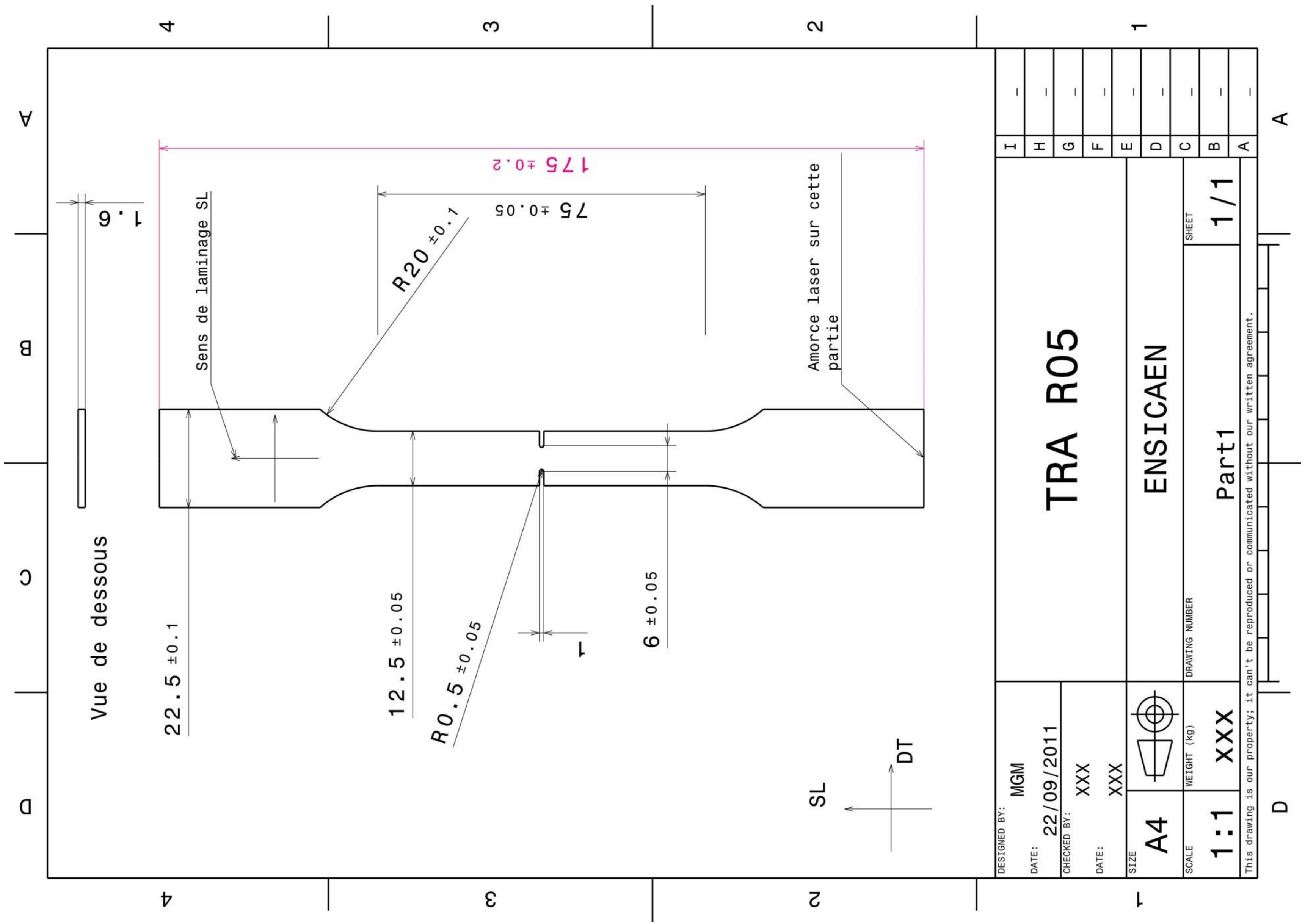
Réalisez une première simulation

- Paramétrez le matériau,
- (Créez et) importez la géométrie,
- Réalisez un maillage adapté au problème,
- Appliquez le chargement adapté;
- Sélectionnez les données à traiter.

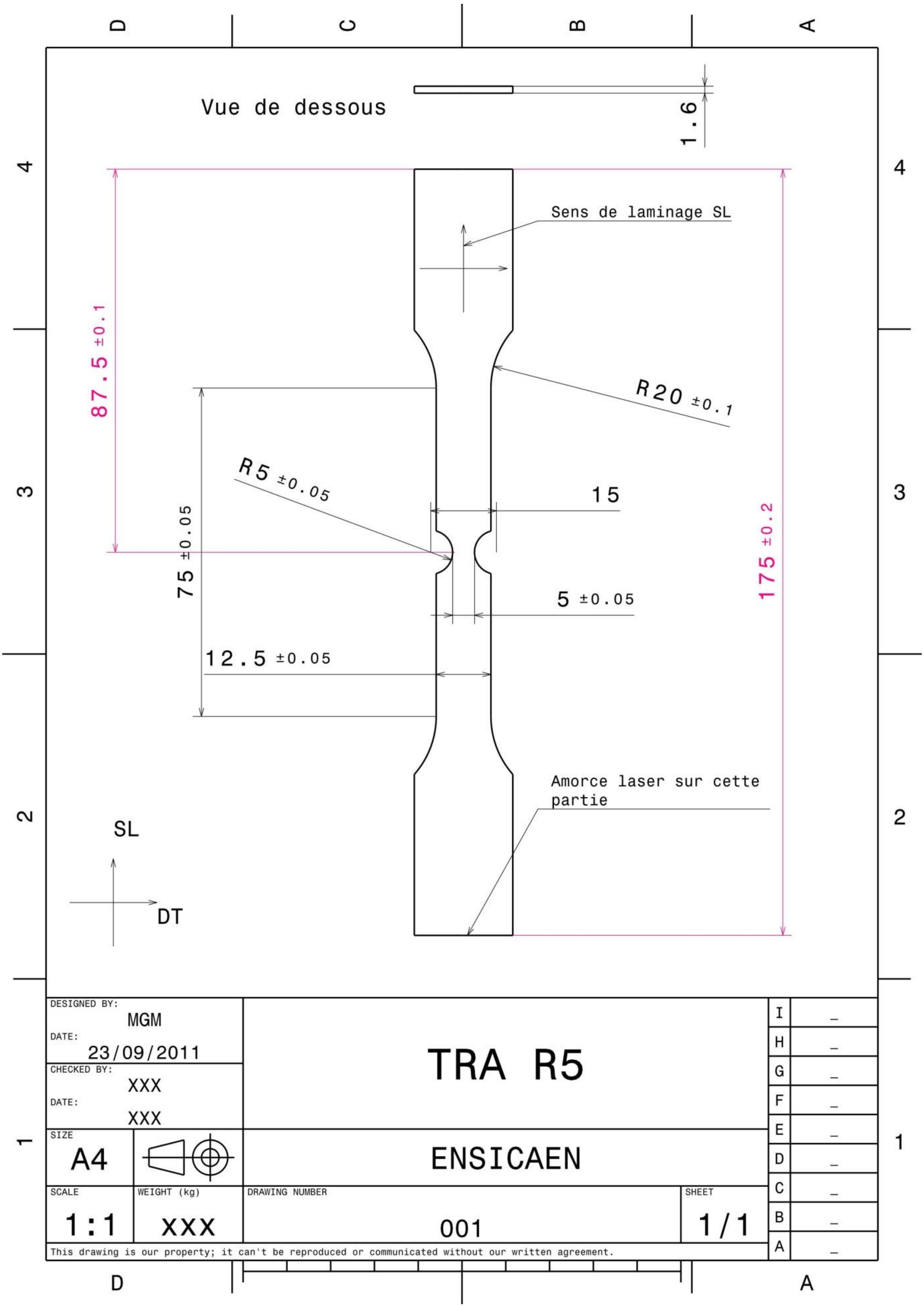
Simulation à reproduire pour les 4 géométries d'éprouvette (traction simple, à encoche (2 rayons) et de cisaillement – dernière géométrie fournie)

ENSI CAEN
ÉCOLE PUBLIQUE D'INGÉNIEURS
CENTRE DE RECHERCHE

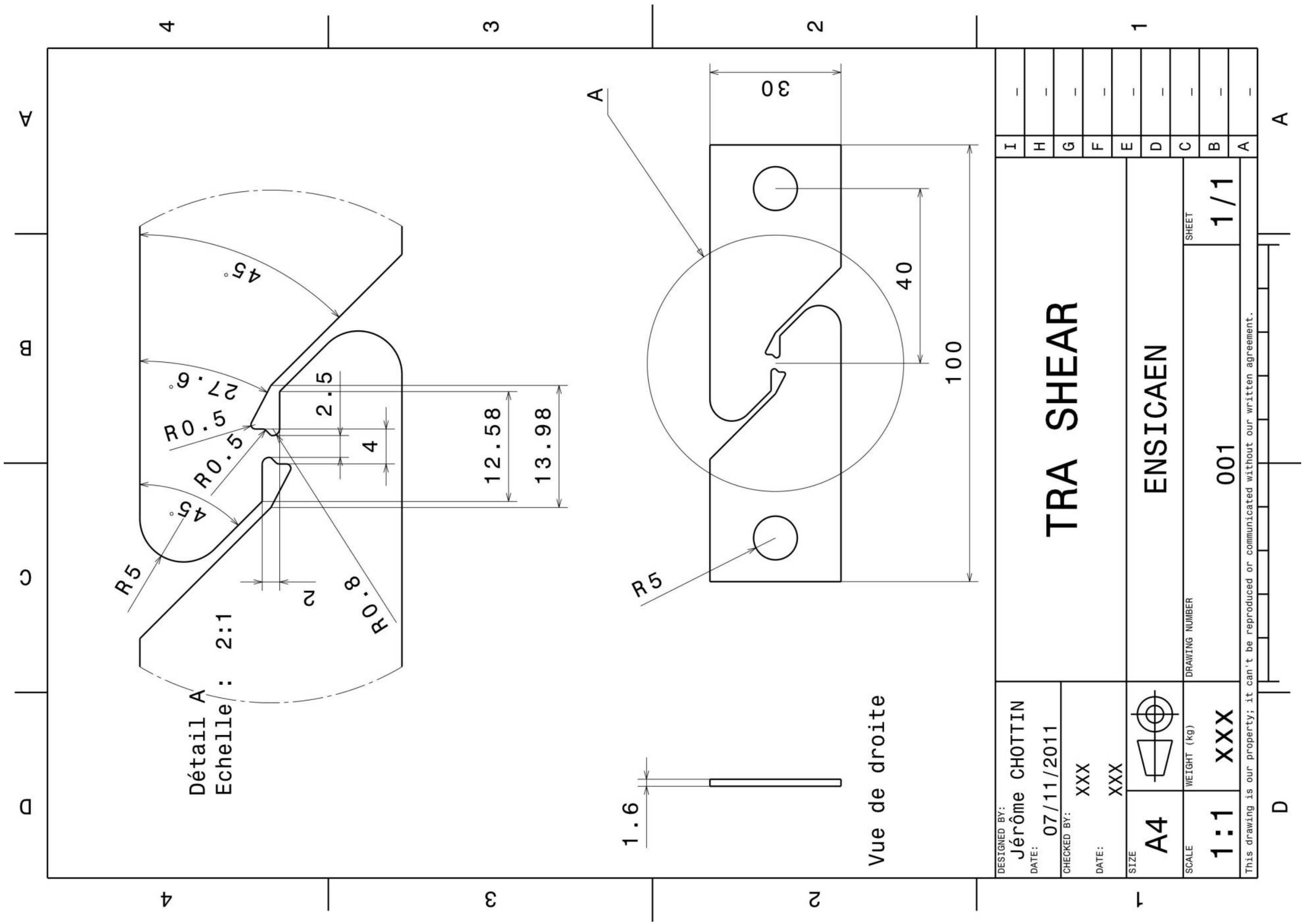




175 ±0.2
75 ±0.05
R20 ±0.1
1.6
Sens de laminage SL
Amorce laser sur cette partie
Vue de dessous
22.5 ±0.1
12.5 ±0.05
R0.5 ±0.05
1
6 ±0.05
SL
DT
TRA R05
ENSICAEN
Part1
DESIGNED BY: MGM
DATE: 22/09/2011
CHECKED BY: XXX
DATE: XXX
SIZE A4
SCALE 1:1
WEIGHT (kg) XXX
DRAWING NUMBER
SHEET 1/1
This drawing is our property; it can't be reproduced or communicated without our written agreement.



ENSICAEN
ÉCOLE PUBLIQUE D'INGÉNIEURS
CENTRE DE RECHERCHE



TRA SHEAR
ENSICAEN
DESIGNED BY: Jérôme CHOTTIN
DATE: 07/11/2011
CHECKED BY: XXX
DATE: XXX
SIZE A4
SCALE 1:1
WEIGHT (kg) XXX
DRAWING NUMBER 001
SHEET 1/1
This drawing is our property; it can't be reproduced or communicated without our written agreement.
Détail A
Echelle : 2:1
Vue de droite
A
30
40
100
R5
1.6
45°
27.6°
R0.5
R0.5
R0.8
R5
2.5
4
2
12.58
13.98