Mathématiques

8 novembre 2022 – 1h30 – Patricia Jouannot-Chesney
Aucun document autorisé
Calculatrice interdite

Le barème est donné à titre indicatif

CORRIGE

EXERCICE 1 (7-8 points environ)

On cherche la solution du système différentiel : $\begin{cases} x'(t) = 2x(t) + 3y(t) + exp(2t) \\ y'(t) = kx(t) + 2y(t) - exp(2t) \end{cases}$, où k désigne un réel positif ou nul ($k \geq 0$).

Le système peut s'écrire : $X'(t) = AX(t) + B(t)$ avec $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ k & 2 \end{pmatrix}$ et $B(t) = \begin{pmatrix} \exp(2t) \\ -\exp(2t) \end{pmatrix}$

Systèmes homogènes : $\mathrm{X}'(\mathrm{t}) = \mathrm{AX}(\mathrm{t})$

1) a) Pour k=3, $\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$ => la solution est fournie par la diagonalisation de A.

$P_C(\lambda)$ = dét(A - λI_2) vaut $\mathrm{P_C}(\lambda) = (2-\lambda)^2 - 9 = (2-\lambda-3)(2-\lambda+3) = (-\lambda-1)(5-\lambda)$

2 valeurs propres (-1) et (5) => A est diagonalisable.

On cherche le sev propre associé à $\lambda = -1$: E_{-1}

Les vecteurs propres de ce sev vérifient les équations suivantes : $\begin{cases} 2x + 3y = -x \\ 3x + 2y = -y \end{cases}$ i.e. $y = -x$, ils appartiennent à une droite vectorielle dont un générateur est $\mathrm{V}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$: E_{-1}=vect(V_1)

On cherche le sev propre associé à $\lambda = 5$: E_5

Les vecteurs propres de ce sev vérifient les équations suivantes : $\begin{cases} 2x + 3y = 5x \\ 3x + 2y = 5y \end{cases}$ i.e. $y = x$, ils appartiennent à une droite vectorielle dont un générateur est $\mathrm{V}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$: E_5=vect(V_2)

La solution de l'équation homogène est donnée par $\begin{pmatrix} \mathrm{x_h}(\mathrm{t}) \\ \mathrm{y_h}(\mathrm{t}) \end{pmatrix} = \mathrm{k_1} \exp(-\mathrm{t}) \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} + \mathrm{k_2} \exp(5\mathrm{t}) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

soit $\begin{cases} \mathrm{x_h}(\mathrm{t}) = \mathrm{k_1}\exp(-\mathrm{t}) + \mathrm{k_2}\exp(5\mathrm{t}) \\ \mathrm{y_h}(\mathrm{t}) = -\mathrm{k_1}\exp(-\mathrm{t}) + \mathrm{k_2}\exp(5\mathrm{t}) \end{cases}$

b) Pour k=0, $\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$, $P_C(\lambda)$ = dét(A - λI_2) vaut $\mathrm{P_C}(\lambda) = (2-\lambda)^2$. Il y a une racine double : $\lambda = 2$. On cherche le sev propre associé à $\lambda = 2$, Les vecteurs propres de ce sev vérifient les équations suivantes :

$\begin{cases} 2x + 3y = 2x \\ 2y = 2y \end{cases}$ i.e. $y = 0$ => Ce sev propre est de dimension 1, un vecteur générateur est le vecteur $\mathrm{V}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ donc A n'est pas diagonalisable. On cherche à trouver une forme de Jordan

J= $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ semblable à A. On cherche donc un vecteur V_2 de composantes x et y vérifiant $AV_2 - 2V_2 = V_1$ soit $\begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ ou $\begin{cases} 3y = 1 \\ 0 = 0 \end{cases}$. On prend par exemple : $V_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1/3 \end{pmatrix}$. La matrice de passage est alors : $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1/3 \end{pmatrix}$ et $A=P.J.P^{-1}$.

Dans la base (V_1,V_2), on doit résoudre le système différentiel en (u(t), v(t)) : $\begin{cases} u'(t) = 2u(t) + v(t) \\ v'(t) = 2v(t) \end{cases}$ où $\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = P\begin{pmatrix} u(t) \\ v(t) \end{pmatrix}$. On a alors $v(t) = k_2 \exp(2t)$ et $u(t) = k_1 \exp(2t) + k_2 t \exp(2t)$. Puis, en appliquant la matrice P, on obtient : $\begin{cases} x_h(t) = k_1 \exp(2t) + k_2 t \exp(2t) \\ y_h(t) = \frac{k_2}{3} \exp(2t) \end{cases}$, ce qui correspond à la formule générale $X_h(t) = k_1 V_1 \exp(2t) + k_2 V_2 \exp(2t) + k_2 t \exp(2t)\, V_1$

2) a) Pour k=3, $\begin{pmatrix} x_h(t) \\ y_h(t) \end{pmatrix} = k_1 \exp(-t)\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} + k_2 \exp(5t)\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Pour obtenir une solution particulière, on cherche une solution en faisant varier les constantes de la solution homogène =>

$\begin{pmatrix} x_p(t) \\ y_p(t) \end{pmatrix} = k_1(t) \exp(-t)\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} + k_2(t) \exp(5t)\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. On résout :

$$k'_1(t)\exp(-t)\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} + k'_2(t)\exp(5t)\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \exp(2t) \\ -\exp(2t) \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} k'_1(t)\exp(-t) + k'_2(t)\exp(5t) = \exp(2t) \\ -k'_1(t)\exp(-t) + k'_2(t)\exp(5t) = -\exp(2t) \end{cases}$$

$$k'_1(t) = \frac{\begin{vmatrix} e^{2t} & e^{5t} \\ -e^{2t} & e^{5t} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} e^{-t} & e^{5t} \\ -e^{-t} & e^{5t} \end{vmatrix}} = \frac{2\,e^{7t}}{2\,e^{4t}} = e^{3t} \text{ et } k'_2(t) = \frac{\begin{vmatrix} e^{-t} & e^{2t} \\ -e^{-t} & -e^{2t} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} e^{-t} & e^{5t} \\ -e^{-t} & e^{5t} \end{vmatrix}} = \frac{0}{2\,e^{4t}} = 0 \Rightarrow k_1(t) = e^{3t}/3 \text{ et } k_2(t) = \text{cste} = 0$$

$$\begin{pmatrix} x_p(t) \\ y_p(t) \end{pmatrix} = \exp(2t)\begin{pmatrix} 1/3 \\ -1/3 \end{pmatrix} \text{ et } \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = k_1 \exp(-t)\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} + k_2 \exp(5t)\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \exp(2t)\begin{pmatrix} 1/3 \\ -1/3 \end{pmatrix}$$

b) Pour k=0, $\begin{cases} x_h(t) = k_1 \exp(2t) + k_2 t \exp(2t) \\ y_h(t) = \frac{k_2}{3} \exp(2t) \end{cases}$ soit $\begin{pmatrix} x_h(t) \\ y_h(t) \end{pmatrix} = k_1\begin{pmatrix} \exp(2t) \\ 0 \end{pmatrix} + k_2\begin{pmatrix} t\exp(2t) \\ \exp(2t)/3 \end{pmatrix}$. Pour obtenir une solution particulière, on cherche une solution en faisant varier les constantes de la solution homogène => $\begin{pmatrix} x_p(t) \\ y_p(t) \end{pmatrix} = k_1(t)\begin{pmatrix} \exp(2t) \\ 0 \end{pmatrix} + k_2(t)\begin{pmatrix} t\exp(2t) \\ \exp(2t)/3 \end{pmatrix}$. On résout

$$k'_1(t)\begin{pmatrix} \exp(2t) \\ 0 \end{pmatrix} + k'_2(t)\begin{pmatrix} t\exp(2t) \\ \exp(2t)/3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \exp(2t) \\ -\exp(2t) \end{pmatrix} \text{ soit } \begin{cases} k'_1(t) + k'_2(t)\,t = 1 \\ k'_2(t)/3 = -1 \end{cases} \text{ soit } \begin{cases} k'_1(t) = 1 + 3t \\ k'_2(t) = -3 \end{cases}$$

et $k_1(t) = t + 3t^2/2$ et $k_2(t) = -3t$ d'où $\begin{pmatrix} x_p(t) \\ y_p(t) \end{pmatrix} = \exp(2t)\begin{pmatrix} t + \frac{3t^2}{2} - 3t^2 \\ -t \end{pmatrix} = \exp(2t)\begin{pmatrix} t - 3t^2/2 \\ -t \end{pmatrix}$ et la solution générale est donc => $\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \exp(2t)\,[\; k_1\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + k_2\begin{pmatrix} t \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} t - \frac{3t^2}{2} \\ -t \end{pmatrix}$

EXERCICE 2 (5-6 points environ)

Trouver les solutions réelles f(t) de l'équation différentielle linéaire d'ordre 3 :

$$f^{(3)}(t) - 2f''(t) - f'(t) + 2f(t) = 4t^2 + 4t + 2$$

1) On pose $X(t) = \begin{pmatrix} f(t) \\ f'(t) \\ f''(t) \end{pmatrix}$. $X'(t) = \begin{pmatrix} f'(t) \\ f''(t) \\ f^{(3)}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} f(t) \\ f'(t) \\ f''(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 4t^2+4t+2 \end{pmatrix}$, soit

$X'(t) = AX(t) + B(t)$ avec $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ et $B(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 4t^2+4t+2 \end{pmatrix}$.

2) Solution générale de l'équation homogène $X_h(t)$.On cherche à diagonaliser A : $P_C(\lambda)$ = dét(A - λI_2)

vaut $P_C(\lambda) = \begin{vmatrix} -\lambda & 1 & 0 \\ 0 & -\lambda & 1 \\ -2 & 1 & 2-\lambda \end{vmatrix} = -\lambda[(-\lambda)(2-\lambda)-1] - 2 = (-\lambda)(\lambda^2 - 2\lambda - 1) - 2 = -\lambda^3 + 2\lambda^2 + \lambda - 2$

soit $P_C(\lambda) = (\lambda - 2)(-\lambda^2 + 1) = -(\lambda - 2)(\lambda - 1)(\lambda + 1)$

3 valeurs propres distinctes -1, 1 et 2 => A est diagonalisable.

On cherche le sev propre associé à $\lambda = -1$: E_{-1}

Les vecteurs propres de ce sev vérifient les équations suivantes : $\begin{cases} y = -x \\ z = -y \\ -2x + y + 2z = -z \end{cases}$ i.e. $\begin{cases} y = -x \\ z = x \end{cases}$, ils appartiennent à une droite vectorielle dont un générateur est $V_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$: E_{-1}=vect(V_1)

On cherche le sev propre associé à $\lambda = 1$: E_1

Les vecteurs propres de ce sev vérifient les équations suivantes : $\begin{cases} y = x \\ z = y \\ -2x + y + 2z = z \end{cases}$ i.e. i.e. $\begin{cases} y = x \\ z = x \end{cases}$, ils appartiennent à une droite vectorielle dont un générateur est $V_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$: E_1=vect(V_2)

On cherche le sev propre associé à $\lambda = 2$: E_2

Les vecteurs propres de ce sev vérifient les équations suivantes : $\begin{cases} y = 2x \\ z = 2y \\ -2x + y + 2z = 2z \end{cases}$ i.e. i.e. $\begin{cases} y = 2x \\ z = 4x \end{cases}$, ils appartiennent à une droite vectorielle dont un générateur est $V_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$: E_2=vect(V_3)

La solution de l'équation homogène est $\begin{pmatrix} f(t) \\ f'(t) \\ f''(t) \end{pmatrix} = k_1 \exp(-t)\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + k_2 \exp(t)\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + k_3 \exp(2t)\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$

=> $f(t) = k_1 \exp(-t) + k_2 \exp(t) + k_3 \exp(2t)$

3) Trouver une solution particulière $X_p(t)$ puis la solution générale f(t) de l'équation différentielle linéaire d'ordre 3. On cherche une solution particulière sous la forme $f_0(t) = at^2 + bt + c$.

On a alors $f'_0(t) = 2\mathrm{at} + \mathrm{b}$, $f_0''(t) = 2\mathrm{a}$ et $f_0^{(3)}(t) = 0$, d'où

$-2(2\mathrm{a}) - (2\mathrm{at} + \mathrm{b}) + 2(\mathrm{at}^2 + \mathrm{bt} + \mathrm{c}) = 2\mathrm{at}^2 + (2\mathrm{b} - 2\mathrm{a})\mathrm{t} - 4\mathrm{a} - \mathrm{b} + 2\mathrm{c} = 4\mathrm{t}^2 + 4\mathrm{t} + 2$ ce qui conduit à a=2, b=4 et c=7 soit $f_0(t) = 2\mathrm{t}^2 + 4\mathrm{t} + 7$

EXERCICE 3 (4 points environ)

f et F deux fonctions à valeurs réelles, de classe C ^{2} sur R^2. Le lien entre f et F est $f(x,y) = F(u,v)$, où $u = U(x,y) = x + ay$ et $v = V(x,y) = x + by$, avec a et b des constantes réelles.

1) La matrice Jacobienne doit être inversible, son déterminant vaut b-a, il faut donc a ≠ b

2) $\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial F}{\partial u}(x+ay, x+by)\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial v}(x+ay, x+by)\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial F}{\partial u}(x+ay, x+by) + \frac{\partial F}{\partial v}(x+ay, x+by)$

$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial F}{\partial u}(x+ay, x+by)\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial F}{\partial v}(x+ay, x+by)\frac{\partial v}{\partial y} = a\frac{\partial F}{\partial u}(x+ay, x+by) + b\frac{\partial F}{\partial v}(x+ay, x+by)$

3) On choisit les valeurs a=1 et b=-1. $\frac{\partial f}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial y} = 2$ se ramène à $\frac{\partial F}{\partial u} + \frac{\partial F}{\partial v} - \frac{\partial F}{\partial u} + \frac{\partial F}{\partial v} = 2$ soit $\frac{\partial F}{\partial v} = 1$. La constante c vaut 1.

4) $\frac{\partial F}{\partial v} = 1$ a pour solution $F(u,v) = v + \emptyset(u)$. Et $\frac{\partial f}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial y} = 2$ a pour solution $f(x,y) = x - y + \emptyset(x+y)$.

EXERCICE 4 (4 points environ)

Soit la fonction $f(x,y)$ de classe C^2, définie sur R^2 : $f(x,y) = (x-1)^2 + (2-y)^3 + 2$.

1) Dérivées partielles premières de f sur R^2 : $\frac{\partial f}{\partial x} = 2(x-1)$, $\frac{\partial f}{\partial y} = -3(2-y)^2$

Dérivées partielles secondes de f sur R^2 : $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 2$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 6(2-y)$ et $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 0$

2) Le (ou les) point(s) critique(s) de f sont caractérisés par $\frac{\partial f}{\partial x} = 2(x-1) = 0$ et $\frac{\partial f}{\partial y} = -3(2-y)^2 = 0$. Il y a donc un seul point critique (x=1,y=2). Pour ce point, la matrice Hessienne vaut $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, on a $rt - s^2 = 0$. Il faut donc examiner le terme $f(1+\mathrm{h}, 2+\mathrm{k}) = f(1,2) + \mathrm{h}^2 - \mathrm{k}^3$ => point selle et pas d'extremum.

3) On considère le rectangle défini par $-2 \leq x \leq 0$ et $3 \leq y \leq 4$, existe-t-il des extrema ? Oui, comme la recherche d'extrema est associée à un compact, il existe des extrema globaux :

$1 \leq (x-1)^2 \leq 9$ et $1 \leq (y-2)^3 \leq 8$ et $-8 \leq (2-y)^3 \leq -1$ donc $-5 \leq f(x,y) \leq 10$; La valeur minimale est -5 atteinte en (0,4) et celle du maximum est 10 atteinte en (-2,3).