ENSICAEN - 1A Matériaux et Chimie - FISE

TD1 - Systèmes différentiels linéaires

CORRIGE

Exercice 1. *Système homogène : solutions complexes et réelles*

$(\boldsymbol{a})$ $\begin{cases} x_1'(t) = x_1(t) + 2x_2(t) \\ x_2'(t) = 2x_1(t) + x_2(t) \end{cases}$

$X'(t) = AX(t)$ avec $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$

Le polynôme caractéristique $P_C(\lambda)$ = dét(A - λI_2) vaut $P_C(\lambda) = (1-\lambda)^2 - 4 = \lambda^2 - 2\lambda - 3$ soit $P_C(\lambda) = (1-\lambda-2)(1-\lambda+2) = (\lambda+1)(\lambda-3)$. Le polynôme caractéristique $P_C(\lambda)$ admet deux racines réelles -1 et 3. A est diagonalisable dans R.

On cherche les sev propres associés aux valeurs propres :

Pour $\lambda_1 = -1$, les vecteurs propres de ce sev vérifient les équations suivantes : $\begin{cases} x + 2y = -x \\ 2x + y = -y \end{cases}$ i.e. $y = -x$ => un générateur possible est $V_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$, soit Ker(A+I)=VECT($V_1$).

Pour $\lambda_2 = 3$, les vecteurs propres de ce sev vérifient les équations suivantes : $\begin{cases} x + 2y = 3x \\ 2x + y = 3y \end{cases}$ i.e. $y = x$ => un générateur possible est $V_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, soit Ker(A-3I)=VECT($V_2$).

La solution est donc $X_h(t) = k_1 V_1 e^{-t} + k_2 V_2 e^{3t}$ (où k_1 et k_2 sont des constantes) soit $\begin{cases} x_1(t) = k_1 e^{-t} + k_2 e^{3t} \\ x_2(t) = -k_1 e^{-t} + k_2 e^{3t} \end{cases}$

$(\boldsymbol{b})$ $\begin{cases} x_1'(t) = -x_2(t) \\ x_2'(t) = 3x_1(t) \end{cases}$

$X'(t) = AX(t)$ avec $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$

Le polynôme caractéristique $P_C(\lambda)$ = dét(A - λI_2) vaut $P_C(\lambda) = \lambda^2 + 3 = (\lambda + i\sqrt{3})(\lambda - i\sqrt{3})$ soit Le polynôme caractéristique $P_C(\lambda)$ admet deux racines complexes conjuguées $-i\sqrt{3}$ et $i\sqrt{3}$. A est diagonalisable dans C.

On cherche le sev propre associé à une des valeurs propres $\lambda_1 = i\sqrt{3}$:

Les vecteurs propres de ce sev vérifient les équations suivantes : $\begin{cases} -y = i\sqrt{3}x \\ 3x = i\sqrt{3}y \end{cases}$ i.e. $y = -i\sqrt{3}x$ et appartiennent donc à une droite vectorielle dont un vecteur générateur est $V_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -i\sqrt{3} \end{pmatrix}$

Le sev propre associé à $\lambda_2 = \overline{\lambda_1} = -i\sqrt{3}$ a pour générateur est $V_2 = \overline{V_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ i\sqrt{3} \end{pmatrix}$

La solution homogène complexe est donc $X_h(t) = k_1 V_1 e^{i\sqrt{3}t} + k_2 V_2 e^{-i\sqrt{3}t}$ (où k_1 et k_2 sont des constantes complexes) soit $\begin{cases} x_1(t) = k_1 e^{i\sqrt{3}t} + k_2 e^{-i\sqrt{3}t} \\ x_2(t) = -ik_1\sqrt{3}e^{i\sqrt{3}t} + ik_2\sqrt{3}e^{-i\sqrt{3}t} \end{cases}$.

Une autre base de l'ensemble des solutions est Re($V_1e^{i\sqrt{3}t}$) et Im($V_1e^{i\sqrt{3}t}$) soit Re$\begin{pmatrix} e^{i\sqrt{3}t} \\ -i\sqrt{3}e^{i\sqrt{3}t} \end{pmatrix}$ et Im$\begin{pmatrix} e^{i\sqrt{3}t} \\ -i\sqrt{3}e^{i\sqrt{3}t} \end{pmatrix}$ soit $\begin{pmatrix} \cos(\sqrt{3}t) \\ \sqrt{3}\sin(\sqrt{3}t) \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} \sin(\sqrt{3}t) \\ -\sqrt{3}\cos(\sqrt{3}t) \end{pmatrix}$,

Et la solution peut s'écrire $X_h(t) = C_1\begin{pmatrix} \cos(\sqrt{3}t) \\ \sqrt{3}\sin(\sqrt{3}t) \end{pmatrix} + C_2\begin{pmatrix} \sin(\sqrt{3}t) \\ -\sqrt{3}\cos(\sqrt{3}t) \end{pmatrix}$

soit $\begin{cases} x_1(t) = C_1\cos(\sqrt{3}t) + C_2\sin(\sqrt{3}t) \\ x_2(t) = \sqrt{3}C_1\sin(\sqrt{3}t) - \sqrt{3}C_2\cos(\sqrt{3}t) \end{cases}$.

Autre possibilité : on écrit les solutions du système homogène sous la forme de combinaisons linéaires des fonctions $\cos(\sqrt{3}t)$ et $\sin(\sqrt{3}t)$ soit :

$$\begin{cases} x_1(t) = C\cos(\sqrt{3}t) + D\sin(\sqrt{3}t) \\ x_2(t) = E\cos(\sqrt{3}t) + F\sin(\sqrt{3}t) \end{cases}$$

On réinjecte dans le système et on identifie :

$\begin{cases} -C\sqrt{3}\sin(t) + D\sqrt{3}\cos(\sqrt{3}t) = -E\cos(\sqrt{3}t) - F\sin(\sqrt{3}t) \\ -E\sqrt{3}\sin(t) + F\sqrt{3}\cos(\sqrt{3}t) = 3C\cos(\sqrt{3}t) + 3D\sin(\sqrt{3}t) \end{cases}$ ou $\begin{cases} E = -\sqrt{3}D \\ F = \sqrt{3}C \end{cases}$

On a donc comme solution du système : $\begin{cases} x_1(t) = C\cos(\sqrt{3}t) + D\sin(\sqrt{3}t) \\ x_2(t) = -\sqrt{3}D\cos(\sqrt{3}t) + \sqrt{3}C\sin(\sqrt{3}t) \end{cases}$ ou

$X_h(t) = CX_1(t) + DX_2(t)$ avec $X_1(t) = \begin{pmatrix} \cos(\sqrt{3}t) \\ \sqrt{3}\sin(\sqrt{3}t) \end{pmatrix}$ et $X_2(t) = \begin{pmatrix} \sin(\sqrt{3}t) \\ -\sqrt{3}\cos(\sqrt{3}t) \end{pmatrix}$ (avec C et D des constantes réelles)

$(\boldsymbol{c})\begin{cases} x_1'(t) = x_1(t) - x_2(t) \\ x_2'(t) = x_1(t) + x_2(t) \end{cases}$

$X'(t) = AX(t)$ avec $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

Le polynôme caractéristique $P_C(\lambda)$ = dét(A - λI_2) vaut $P_C(\lambda) = (1-\lambda)^2 + 1 = \lambda^2 - 2\lambda + 2$. Le polynôme caractéristique $P_C(\lambda)$ admet deux racines complexes conjuguées 1+i et 1-i. A est diagonalisable dans C.

On cherche le sev propre associé à une des valeurs propres $\lambda_1 = 1 - i$: E_{1-i}

Les vecteurs propres de ce sev vérifient les équations suivantes : $\begin{cases} ix - y = 0 \\ x + iy = 0 \end{cases}$ i.e. $y = ix$ et appartiennent donc à une droite vectorielle dont un vecteur générateur est $V_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}$

Pour le sev propre associé à $\lambda_2 = \overline{\lambda_1} = 1 + i$: E_{1+i}, il a pour générateur est $V_2 = \overline{V_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix}$

La solution homogène complexe est donc $X_h(t) = k_1V_1e^{(1-i)t} + k_2V_2e^{(1+i)t}$ (où k_1 et k_2 sont des constantes complexes) soit $\begin{cases} x_1(t) = k_1e^{(1-i)t} + k_2e^{(1+i)t} \\ x_2(t) = ik_1e^{(1-i)t} - ik_2e^{(1+i)t} \end{cases}$ ou $\begin{cases} x_1(t) = e^t(k_1e^{-it} + k_2e^{+it}) \\ x_2(t) = e^t(ik_1e^{-it} - ik_2e^{+it}) \end{cases}$.

Une autre base de l'ensemble des solutions est $\mathrm{Re}(V_1 e^{(1-i)t})$ et $\mathrm{Im}(V_1 e^{(1-i)t})$ soit $\mathrm{Re}\begin{pmatrix} e^t\cos(t) - ie^t\sin(t) \\ ie^t\cos(t) + e^t\sin(t) \end{pmatrix}$ et $\mathrm{Im}\begin{pmatrix} e^t\cos(t) - ie^t\sin(t) \\ ie^t\cos(t) + e^t\sin(t) \end{pmatrix}$ soit $\begin{pmatrix} e^t\cos(t) \\ e^t\sin(t) \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} -e^t\sin(t) \\ e^t\cos(t) \end{pmatrix}$ et $X_h(t) = A_1\begin{pmatrix} e^t\cos(t) \\ e^t\sin(t) \end{pmatrix} + A_2\begin{pmatrix} -e^t\sin(t) \\ e^t\cos(t) \end{pmatrix}$ soit $\begin{cases} x_1(t) = A_1\, e^t\cos(t) - A_2\, e^t\sin(t) \\ x_2(t) = A_1\, e^t\sin(t) + A_2\, e^t\cos(t) \end{cases}$.

Autre possibilité : on écrit les solutions du système homogène sous la forme de combinaisons linéaires des fonctions $e^t\cos(t)$ et $e^t\sin(t)$ soit :

$$\begin{cases} x_1(t) = C_1\, e^t\cos(t) + C_2\, e^t\sin(t) \\ x_2(t) = D_1\, e^t\cos(t) + D_2\, e^t\sin(t) \end{cases}$$

On réinjecte dans le système et on identifie :

$\begin{cases} (C_1+C_2)\, e^t\cos(t) + (-C_1+C_2)\, e^t\sin(t) = (C_1-D_1)e^t\cos(t) + (C_2-D_2)\, e^t\sin(t) \\ (D_1+D_2)e^t\cos(t) + (-D_1+D_2)\, e^t\sin(t) = (C_1+D_1)e^t\cos(t) + (C_2+D_2)\, e^t\sin(t) \end{cases}$ ou $\begin{cases} D_1 = -C_2 \\ D_2 = C_1 \end{cases}$

On a donc comme solution du système :

$\begin{cases} x_1(t) = C_1\, e^t\cos(t) + C_2\, e^t\sin(t) \\ x_2(t) = C_1\, e^t\sin(t) - C_2\, e^t\cos(t) \end{cases}$ ou $X_h(t) = C_1X_1(t) + C_2X_2(t)$ avec $X_1(t) = \begin{pmatrix} e^t\cos(t) \\ e^t\sin(t) \end{pmatrix}$ et $X_2(t) = \begin{pmatrix} e^t\sin(t) \\ -e^t\cos(t) \end{pmatrix}$ (avec C_1 et C_2 sont des constantes réelles)

Exercice 2. *Système homogène*

(a) $\begin{cases} x'(t) = 3x(t) - y(t) + z(t) \\ y'(t) = 2y(t) \\ z'(t) = x(t) - y(t) + 3z(t) \end{cases}$ soit X'(t)=AX(t) où $X(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix}$ et $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$

On forme le polynôme caractéristique $P_C(\lambda)$ = dét($A - \lambda I_3$)
$P_C(\lambda) = (3-\lambda)[\,(2-\lambda)(3-\lambda)\,] - (2-\lambda) = (9 - 6\lambda + \lambda^2)(2-\lambda) - 2 = -\lambda^3 + 8\lambda^2 - 20\lambda + 16$ soit $P_C(\lambda) = -(\lambda-2)(\lambda^2 - 6\lambda + 8) = -(\lambda-2)(\lambda-2)(\lambda-4)$. A n'est diagonalisable que si le sev associé à la valeur propre 2 soit Ker(A-2I) est de dimension 2.

On cherche le sev propre associé à $\lambda = 2$: E_2=Ker(A-2I)

Les vecteurs propres de ce sev vérifient les équations suivantes : $\begin{cases} 3x - y + z = 2x \\ 2y = 2y \\ x - y + 3z = 2z \end{cases}$ soit $\{x - y + z = 0$,

ils appartiennent à un plan vectoriel de dimension 2 dont une base peut être $V_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ et $V_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et E_2=vect(V_1, V_2) (le choix des vecteurs V1 et V2 est non unique) ; la matrice A est donc diagonalisable.

On cherche le sev propre associé à $\lambda = 4$: E_4=Ker(A-4I)

Les vecteurs propres de ce sev vérifient les équations suivantes : $\begin{cases} 3x - y + z = 4x \\ 2y = 4y \\ x - y + 3z = 4z \end{cases}$ $\begin{cases} -x - y + z = 0 \\ y = 0 \\ x - y - z = 0 \end{cases}$

soit $\begin{cases} y = 0 \\ x = z \end{cases}$ et appartiennent à une droite vectorielle dont un générateur est $V_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$: E_4=vect(V_4)

La solution de l'équation homogène est donnée par

$$\begin{pmatrix} x_h(t) \\ y_h(t) \\ z_h(t) \end{pmatrix} = k_1 \exp(2t) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + k_2 \exp(2t) \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + k_3 \exp(4t) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

(***b***) $\begin{cases} x'(t) = x(t) + 4y(t) - 2z(t) \\ y'(t) = 6y(t) - 3z(t) \\ z'(t) = -x(t) + 4y(t) \end{cases}$ soit X'(t)=AX(t) où $X(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix}$ et $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & -2 \\ 0 & 6 & -3 \\ -1 & 4 & 0 \end{pmatrix}$

On forme le polynôme caractéristique $P_C(\lambda)$ = dét(A - λI_3)
$P_C(\lambda) = (1-\lambda)[\,(6-\lambda)(-\lambda) + 12] - \big(-12 + 2(6-\lambda)\big) = (12 - 6\lambda + \lambda^2)(1-\lambda) + 2\lambda = -\lambda^3 + 14\lambda^2 - 16\lambda + 12$ soit $P_C(\lambda) = -\lambda^3 + 7\lambda^2 - 16\lambda + 12 = -(\lambda-2)(\lambda-2)(\lambda-3)$. A n'est diagonalisable que si le sev associé à la valeur propre 2 soit Ker(A-2I) est de dimension 2.

On cherche le sev propre associé à $\lambda = 2$: E₂=Ker(A-2I)

Les vecteurs propres de ce sev vérifient les équations suivantes : $\begin{cases} x + 4y - 2z = 2x \\ 6y - 3z = 2y \\ -x + 4y = 2z \end{cases}$ soit $\begin{cases} -x + 4y - 2z = 0 \\ 4y - 3z = 0 \\ -x + 4y - 2z = 0 \end{cases}$, $\begin{cases} y = \frac{3z}{4} \\ z = x \end{cases}$ ils appartiennent à une droite vectorielle (dimension 1) dont un vecteur générateur est $V_2 = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$. Le sev E_2=vect(V_2); la matrice A n'est donc pas diagonalisable mais comme le polynôme caractéristique est scindé, A est semblable à une matrice de Jordan $J = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ reliée à A par $A = P.J.P^{-1}$. On cherche un vecteur propre associé à $\lambda = 3$ et on complète la base associée à J avec la relation $AV_3 = 2V_3 + V_2$.

On cherche le sev propre associé à $\lambda = 3$: E₃=Ker(A-3I)

Les vecteurs propres de ce sev vérifient les équations suivantes : $\begin{cases} x + 4y - 2z = 3x \\ 6y - 3z = 3y \\ -x + 4y = 3z \end{cases}$

$\begin{cases} -2x + 4y - 2z = 0 \\ 3(y - z) = 0 \\ -x + 4y - 3z = 0 \end{cases}$ soit $\begin{cases} y = z \\ y = x \end{cases}$ et appartiennent à une droite vectorielle dont un générateur est $V_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$: E_3=vect(V_1)

On cherche un vecteur tel que $AV_3 = 2V_3 + V_2$ soit $\begin{cases} x + 4y - 2z = 2x + 4 \\ 6y - 3z = 2y + 3 \\ -x + 4y = 2z + 4 \end{cases}$ soit $\begin{cases} -x + 4y - 2z = 4 \\ 4y - 3z = +3 \\ -x + 4y - 2z = 4 \end{cases}$ ou $\begin{cases} -x + 4y - 2z = 4 \\ x = z - 1 \end{cases}$ ou $\begin{cases} 4y = 3 + 3z \\ x = z - 1 \end{cases}$. On prend (par exemple) $V_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 3/2 \\ 1 \end{pmatrix}$. La matrice de passage est donc $P = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 0 \\ 1 & 3 & 3/2 \\ 1 & 4 & 1 \end{pmatrix}$

X'(t)=AX(t) devient U'(t)=JU(t) (X(t)=PU(t)). On note $U(t) = \begin{pmatrix} u(t) \\ v(t) \\ w(t) \end{pmatrix}$, on résoud le système U'(t)=JU(t) soit : $\begin{cases} u'(t) = 3u(t) \\ v'(t) = 2v(t) + w(t) \\ w'(t) = 2w(t) \end{cases}$. La résolution conduit à $\begin{cases} u(t) = k_1 e^{3t} \\ v(t) = k_2 e^{2t} + k_3 t e^{2t} \\ w(t) = k_3 e^{2t} \end{cases}$ puis à

$$\begin{cases} x(t) = u(t) + 4v(t) = k_1 e^{3t} + 4k_2 e^{2t} + 4k_3 t e^{2t} \\ y(t) = u(t) + 3v(t) + \frac{3}{2} w(t) = k_1 e^{3t} + 3k_2 e^{2t} + 3k_3 t e^{2t} + \frac{3}{2} k_3 e^{2t} \\ z(t) = u(t) + 4v(t) + w(t) = k_1 e^{3t} + 4k_2 e^{2t} + 4k_3 t e^{2t} + k_3 e^{2t} \end{cases}$$ ou

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix} = k_1 e^{3t} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + k_2 e^{2t} \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} + k_3 e^{2t} \left[\begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} t + \begin{pmatrix} 0 \\ 3/2 \\ 1 \end{pmatrix} \right].)$$

(*c*) $\begin{cases} x'(t) = -\frac{1}{2} x(t) + y(t) + \frac{3}{2} z(t) \\ y'(t) = -\frac{3}{2} x(t) + y(t) + \frac{1}{2} z(t) \\ z'(t) = \frac{1}{2} x(t) + y(t) + \frac{1}{2} z(t) \end{cases}$ soit avec $X(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix}$ et $A = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & 1 & \frac{3}{2} \\ -\frac{3}{2} & 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 1 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$, X'(t) = AX(t)

On forme le polynôme caractéristique $P_C(\lambda)$ = dét(A - λI_3)

$P_C(\lambda) = \left(-\frac{1}{2} - \lambda\right)\left[(1-\lambda)\left(\frac{1}{2} - \lambda\right) - \frac{1}{2}\right] - \left[\left(-\frac{3}{2}\right)\left(\frac{1}{2} - \lambda\right) - \frac{1}{4}\right] + \frac{3}{2}\left(-\frac{3}{2} - \frac{1}{2}(1-\lambda)\right)$ soit (après calculs) $P_C(\lambda) = -\lambda^3 + \lambda^2 - 2$ ou $P_C(\lambda) = -(\lambda+1)(\lambda^2 - 2\lambda + 2) - (\lambda+1)(\lambda - 1 - i)(\lambda - 1 + i)$ car (-1) est racine évidente. A n'est pas diagonalisable dans R mais est diagonalisable dans C.

On cherche le sev propre associé à $\lambda = -1$: E_{-1}

Les vecteurs propres de ce sev vérifient les équations suivantes : $\begin{cases} -\frac{1}{2} x + y + \frac{3}{2} z = -x \\ -\frac{3}{2} x + y + \frac{1}{2} z = -y \\ \frac{1}{2} x + y + \frac{1}{2} z = -z \end{cases}$ soit $\begin{cases} \frac{1}{2} x + y + \frac{3}{2} z = 0 \\ -\frac{3}{2} x + 2y + \frac{1}{2} z = 0 \end{cases}$ soit $\begin{cases} x + 2y + 3z = 0 \\ -3x + 4y + z = 0 \end{cases}$ soit $\begin{cases} x = -z \\ y = -z \end{cases}$, ils appartiennent à une droite vectorielle dont un générateur est $V_{-1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$: E_{-1}=vect(V_{-1})

On cherche le sev propre associé à $\lambda = 1 + i$: E_{1+i}

Les vecteurs propres de ce sev vérifient les équations suivantes : $\begin{cases} -\frac{1}{2}x + y + \frac{3}{2}z = (1+i)x \\ -\frac{3}{2}x + y + \frac{1}{2}z = (1+i)y \\ \frac{1}{2}x + y + \frac{1}{2}z = (1+i)z \end{cases}$

$\begin{cases} -(\frac{3}{2}+i)x + y + \frac{3}{2}z = 0 \\ -\frac{3}{2}x - iy + \frac{1}{2}z = 0 \\ \frac{1}{2}x + y + (-\frac{1}{2} - i)z = 0 \end{cases}$ soit $\begin{cases} -(\frac{3}{2}+i)x + (\frac{-iz+3ix}{2}) + \frac{3}{2}z = 0 \\ y = (-iz+3ix)/2 \\ \frac{1}{2}x + (\frac{-iz+3ix}{2}) + (-\frac{1}{2} - i)z = 0 \end{cases}$ soit $\begin{cases} \left(-\frac{3}{2}+\frac{i}{2}\right)x + (\frac{3}{2}-\frac{i}{2})z = 0 \\ y = \frac{-iz+3ix}{2} \\ \frac{1}{2}x + \frac{3i}{2}x + (-\frac{1}{2} - \frac{3}{2}i)z = 0 \end{cases}$ soit

$\begin{cases} x = z \\ y = ix \end{cases}$ appartiennent à une droite vectorielle dont un générateur est $V_{1+i} = \begin{pmatrix} 1 \\ i \\ 1 \end{pmatrix}$: E_{1+i}=vect(V_{1+i})

Comme les valeurs propres sont complexes conjuguées, un vecteur propre associé à (1-i) peut être choisi en prenant le complexe conjugué de V_{1+i} et E_{1-i}=vect(V_{1-i}) avec $V_{1-i} = \overline{V_{1+i}} = \begin{pmatrix} 1 \\ -i \\ 1 \end{pmatrix}$

La solution de l'équation homogène est donnée (avec des coefficients complexes) par

$$\begin{pmatrix} x_h(t) \\ y_h(t) \\ z_h(t) \end{pmatrix} = k_1 \exp(-t) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + k_2 \exp((1+i)t) \begin{pmatrix} 1 \\ i \\ 1 \end{pmatrix} + k_3 \exp((1-i)t) \begin{pmatrix} 1 \\ -i \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Une base de l'ensemble des solutions est $(e^{-t}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, e^{(1+i)t}\begin{pmatrix} 1 \\ i \\ 1 \end{pmatrix}, e^{(1-i)t}\begin{pmatrix} 1 \\ -i \\ 1 \end{pmatrix})$ (le 3ème élément est le conjugué du 2ème) ou on peut choisir une base constituée uniquement de fonctions réelles soit $(e^{-t}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \mathrm{Re}(e^{(1+i)t}\begin{pmatrix} 1 \\ i \\ 1 \end{pmatrix}), \mathrm{Im}(e^{(1+i)t}\begin{pmatrix} 1 \\ +i \\ 1 \end{pmatrix}))$ car si $X_1(t)$ et $\overline{X_1}(t)$ sont des solutions linéairement indépendantes alors Re(X_1(t)) et Im(X_1(t)) le sont aussi (ici, on a $X_1(t) = e^{(1+i)t}\begin{pmatrix} 1 \\ i \\ 1 \end{pmatrix}$) et

$(e^{-t}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, e^{t}\begin{pmatrix} \cos(t) \\ -\sin(t) \\ \cos(t) \end{pmatrix}, e^{t}\begin{pmatrix} \sin(t) \\ \cos(t) \\ \sin(t) \end{pmatrix})$ est une base possible de l'ensemble des solutions (réelles), ce qui conduit à une solution générale de l'équation homogène :

$$\begin{pmatrix} x_h(t) \\ y_h(t) \\ z_h(t) \end{pmatrix} = k_1 e^{-t} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + k'_2 e^{t} \begin{pmatrix} \cos(t) \\ -\sin(t) \\ \cos(t) \end{pmatrix} + k'_3 e^{t} \begin{pmatrix} \sin(t) \\ \cos(t) \\ \sin(t) \end{pmatrix}$$

Exercice 3. *Système avec second membre*

$X(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}$ solution du système différentiel $\begin{cases} x_1'(t) = x_1(t) + x_2(t) + 3e^{2t} \\ x_2'(t) = 4x_1(t) + x_2(t) + 9t \end{cases}$

$X'(t) = AX(t) + B(t)$ avec $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$ et $B(t) = \begin{pmatrix} 3e^{2t} \\ 9t \end{pmatrix}$

1) Solution homogène :
Le polynôme caractéristique $P_C(\lambda)$ = dét(A - λI_2) vaut $P_C(\lambda) = (1-\lambda)^2 - 4 = \lambda^2 - 2\lambda - 3$ soit $P_C(\lambda) = (1-\lambda-2)(1-\lambda+2) = (\lambda+1)(\lambda-3)$. Le polynôme caractéristique $P_C(\lambda)$ admet deux racines réelles -1 et 3. A est diagonalisable dans R.

On cherche les sev propres associés aux valeurs propres :

Pour $\lambda_1 = -1$, les vecteurs propres de ce sev vérifient les équations suivantes : $\begin{cases} x+y=-x \\ 4x+y=-y \end{cases}$ i.e. $y = -2x$ => un générateur possible est $V_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$, soit Ker(A+I)=VECT($V_1$).

Pour $\lambda_2 = 3$, les vecteurs propres de ce sev vérifient les équations suivantes : $\begin{cases} x+y=3x \\ 4x+y=3y \end{cases}$ i.e. $y = 2x$ => un générateur possible est $V_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, soit Ker(A-3I)=VECT($V_2$).

La solution est donc $X_h(t) = k_1V_1e^{-t} + k_2V_2e^{3t}$ (où k_1 et k_2 sont des constantes) soit $\begin{cases} x_1(t) = k_1e^{-t} + k_2e^{3t} \\ x_2(t) = -2k_1e^{-t} + 2k_2e^{3t} \end{cases}$

2) On choisit comme solution particulière : $X_p(t) = \begin{pmatrix} at+b+\alpha e^{2t} \\ ct+d+\beta e^{2t} \end{pmatrix}$, on réinjecte dans le système différentiel et on identifie les coefficients :

$$X'_P(t) = \begin{pmatrix} a+2\alpha e^{2t} \\ c+2\beta e^{2t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} at+b+\alpha e^{2t}+ct+d+\beta e^{2t} \\ 4at+4b+4\alpha e^{2t}+ct+d+\beta e^{2t} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3e^{2t} \\ 9t \end{pmatrix} \text{ soit}$$

$$\begin{pmatrix} (a+c)t+b+d+(\alpha+\beta+3)e^{2t} \\ (4a+c+9)t+4b+d+(4\alpha+\beta)e^{2t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+2\alpha e^{2t} \\ c+2\beta e^{2t} \end{pmatrix}, \text{ ce qui conduit à } \begin{cases} a+c=0 \\ b+d=a \\ \alpha+\beta+3=2\alpha \\ 4a+c+9=0 \\ 4b+d=c \\ 4\alpha+\beta=2\beta \end{cases} \text{ soit}$$

$$\begin{cases} c=-a \\ b+d=a \\ 4b+d=-a \\ 3a+9=0 \\ \beta+3=\alpha \\ 4\alpha=\beta \end{cases} \text{ soit } \begin{cases} a=-3 \\ c=3 \\ b=2 \\ d=-5 \\ \alpha=-1 \\ \beta=-4 \end{cases}.$$

On obtient comme solution particulière $X_p(t) = \begin{pmatrix} -3t+2-e^{2t} \\ 3t-5-4e^{2t} \end{pmatrix}$ et comme solution générale du système différentiel $\begin{cases} x_1(t) = k_1e^{-t} + k_2e^{3t} - 3t + 2 - e^{2t} \\ x_2(t) = -2k_1e^{-t} + 2k_2e^{3t} + 3t - 5 - 4e^{2t} \end{cases}$.

Exercice 4. *Système avec second membre*

$X'(t) = AX(t) + B(t)$ où $A = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}$ et $B(t) = \begin{pmatrix} t \\ 0 \end{pmatrix}$

Solution homogène :
Le polynôme caractéristique vaut $P_C(\lambda) = (-1-\lambda)(-3-\lambda) + 1 = \lambda^2 + 4\lambda + 4 = (2+\lambda)^2$. Le polynôme caractéristique $P_C(\lambda)$ admet une racine double (-2).

On cherche le sev propre associé à cette valeur propre : pour $\lambda = -2$, les vecteurs propres de ce sev vérifient les équations suivantes : $\begin{cases} -x-y=-2x \\ x-3y=-2y \end{cases}$ i.e. $y = x$ => le sev est de dimension 1, un générateur possible est $V_1 = \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$, soit Ker(A+2I)=VECT(V_1). A n'est pas diagonalisable dans R mais est trigonalisable et on peut trouver une matrice semblable à A : $J = \begin{pmatrix}-2 & 1\\0 & -2\end{pmatrix}$. La base des vecteurs de J est composée de V_1 et V_2. On obtient $V_2 = \begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ en utilisant la relation $AV_2 = -2V_2 + V_1$ soit $\begin{cases}-x-y=-2x+1\\x-3y=-2y+1\end{cases}$ soit $\begin{cases}x-y=+1\\x-y=+1\end{cases}$. On choisit $V_2 = \begin{pmatrix}0\\-1\end{pmatrix}$ (choix arbitraire) puis on résout $U' = JU$ soit le système différentiel $\begin{cases}u'_1(t) = -2u_1(t) + u_2(t)\\ u'_2(t) = -2u_2(t)\end{cases}$ ou $\begin{cases}u'_1(t) + 2u_1(t) = k_2e^{-2t}\\ u_2(t) = k_2e^{-2t}\end{cases}$ qui a pour solution $\begin{cases}u_1(t) = k_2t\,e^{-2t} + k_1e^{-2t}\\ u_2(t) = k_2e^{-2t}\end{cases}$. Et comme X=PU, on obtient $X_h(t) = k_1V_1e^{-2t} + k_2tV_1e^{-2t} + k_2V_2e^{-2t}$ (où k_1 et k_2 sont des constantes) soit $\begin{cases}x_{1h}(t) = k_1e^{-2t} + k_2te^{-2t}\\ x_{2h}(t) = k_1e^{-2t} + k_2te^{-2t} - k_2e^{-2t}\end{cases}$

Solution générale :

On choisit comme solution particulière : $X_p(t) = \begin{pmatrix}at+b\\ct+d\end{pmatrix}$, on réinjecte dans le système différentiel et on identifie les coefficients :

$X'_P(t) = \begin{pmatrix}a\\c\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-at-b-ct-d\\at+b-3ct-3d\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}t\\0\end{pmatrix}$ soit

$\begin{pmatrix}-(a+c)t+t-b-d\\(a-3c)t+b-3d\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}a\\c\end{pmatrix}$, ce qui conduit à $\begin{cases}-a-c+1=0\\a=-b-d\\a-3c=0\\b-3d=c\end{cases}$ soit $\begin{cases}-4c+1=0\\-b-d=3c\\a=3c\\b-3d=c\end{cases}$ soit

$\begin{cases}c=\frac{1}{4}\\a=\frac{3}{4}\\d=-c=-\frac{1}{4}\\b=c+3d=-\frac{1}{2}\end{cases}$. On obtient comme solution particulière $X_p(t) = \begin{pmatrix}\frac{3}{4}t-\frac{1}{2}\\\frac{1}{4}t-\frac{1}{4}\end{pmatrix}$ et comme solution générale du système différentiel $\begin{cases}x_1(t) = k_1e^{-2t} + k_2te^{-2t} + \frac{3}{4}t - \frac{1}{2}\\ x_2(t) = k_1e^{-2t} + k_2te^{-2t} - k_2e^{-2t} + \frac{1}{4}t - \frac{1}{4}\end{cases}$

Exercice 5. *Résolution d'une équation différentielle linéaire (EDL) d'ordre 3*

Trouver les solutions réelles f(t) de l'EDL d'ordre 3 : $f^{(3)}(t)+f''(t) - 10f'(t) + 8f(t) = 4e^{2t}$

1) $X(t) = \begin{pmatrix}f(t)\\f'(t)\\f''(t)\end{pmatrix}$, $X'(t) = AX(t) + B(t)$ avec $A = \begin{pmatrix}0 & 1 & 0\\0 & 0 & 1\\-8 & 10 & -1\end{pmatrix}$ et $B(t) = \begin{pmatrix}0\\0\\4e^{2t}\end{pmatrix}$

2) Solution homogène :

Le polynôme caractéristique $P_C(\lambda)$ = dét(A - λI_3) vaut $P_C(\lambda) = (-\lambda)[(-\lambda)(-1-\lambda) - 10] - 8$ soit $P_C(\lambda) = -(\lambda-2)(\lambda-1)(\lambda+4)$. Le polynôme caractéristique $P_C(\lambda)$ admet trois racines réelles 1, 2 et -4. A est diagonalisable dans R.

On cherche les sev propres associés aux valeurs propres :

Pour $\lambda_1 = 1$, les vecteurs propres de ce sev vérifient les équations suivantes : $\begin{cases}y=x\\z=y\\-8x+10y-z=z\end{cases}$

i.e. $\begin{cases}y=x\\z=y\end{cases}$ => un générateur est $V_1 = \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$, soit Ker(A-I)=VECT($V_1$).

Pour $\lambda_2 = 2$, les vecteurs propres de ce sev vérifient les équations suivantes : $\begin{cases} y = 2x \\ z = 2y \\ -8x + 10y - z = 2z \end{cases}$

i.e. $\begin{cases} y = 2x \\ z = 2y \end{cases}$=> un générateur est $V_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$, soit Ker(A-2I)=VECT($V_2$).

Pour $\lambda_3 = -4$, les vecteurs propres de ce sev vérifient les équations suivantes : $\begin{cases} y = -4x \\ z = -4y \\ -8x + 10y - z = -4z \end{cases}$ i.e. $\begin{cases} y = -4x \\ z = -4y \end{cases}$=> un générateur est $V_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ 16 \end{pmatrix}$, soit Ker(A+4I)=VECT($V_3$). La solution homogène est donc $X_h(t) = k_1V_1e^t + k_2V_2e^{2t} + k_3V_3e^{-4t}$ (où k_1, k_2 et k_3 sont des constantes) soit $X_h(t) = k_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^t + k_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} e^{2t} + k_3 \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ 16 \end{pmatrix} e^{-4t}$.

Remarque : Pour le sev propre associé à une valeur propre λ, à cause de la forme de la matrice A (position des 1 des premières lignes), le vecteur propre sera de la forme $\begin{pmatrix} 1 \\ \lambda \\ \lambda^2 \end{pmatrix}$.

Solution générale : on prend comme solution particulière $X_p(t) = \begin{pmatrix} ate^{2t} + be^{2t} \\ 2ate^{2t} + (a + 2b)e^{2t} \\ 4ate^{2t} + (4a + 4b)e^{2t} \end{pmatrix}$ (on utilise le fait que la deuxième ligne est la dérivée de la première et que la troisième la dérivée de la deuxième). On prend $(at + b)e^{2t}$ et pas ae^{2t} car e^{2t} est solution de l'équation homogène.
On réinjecte dans le système différentiel, on obtient :

$$X'_p(t) = \begin{pmatrix} 2at + (a + 2b) \\ 4at + (4a + 4b) \\ 8at + (12a + 8b) \end{pmatrix} e^{2t} = e^{2t} \begin{pmatrix} 2at + a \\ 4at + 4a \\ -8(at + b) + 10(2at + a + 2b) - (4at + 4a + 4b) + 4 \end{pmatrix}$$

La troisième ligne donne $8at + 12a + 8b = -8at - 8b + 20at + 10a + 20b - 4at - 4a - 4b + 4$ soit $12a = 6a + 4$ ou a=2/3 => $X_p(t) = e^{2t} \begin{pmatrix} \frac{2}{3}t + b \\ \frac{4}{3}t + \frac{2}{3} + 2b \\ \frac{8}{3}t + \frac{8}{3} + 4b \end{pmatrix}$ où b peut prendre n'importe quelle valeur.

Avec b=0, la solution générale du système différentiel est :

$$X(t) = k_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^t + k_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} e^{2t} + k_3 \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ 16 \end{pmatrix} e^{-4t} + \begin{pmatrix} \frac{2}{3}te^{2t} \\ \frac{4}{3}te^{2t} + \frac{2}{3}e^{2t} \\ \frac{8}{3}te^{2t} + \frac{8}{3}e^{2t} \end{pmatrix}$$

Si on choisit la méthode de variation des constantes, on obtient la solution associée à b=-7/9 soit

$$X_p(t) = e^{2t} \begin{pmatrix} \frac{2}{3}t - \frac{7}{9} \\ \frac{4}{3}t - \frac{8}{9} \\ \frac{8}{3}t - \frac{4}{9} \end{pmatrix} \text{ et } X(t) = k_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^t + k_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} e^{2t} + k_3 \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ 16 \end{pmatrix} e^{-4t} + e^{2t} \begin{pmatrix} \frac{2}{3}t - \frac{7}{9} \\ \frac{4}{3}t - \frac{8}{9} \\ \frac{8}{3}t - \frac{4}{9} \end{pmatrix}$$

Méthode de variation des constantes pour trouver une solution particulière, on cherche une solution sous la forme $X_p(t) = k_1(t) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^t + k_2(t) \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} e^{2t} + k_3(t) \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ 16 \end{pmatrix} e^{-4t}$, on écrit le système associé à X'(t)=AX(t)+B(t) qui se réduit à

$$k_1'(t)\begin{pmatrix} e^t \\ e^t \\ e^t \end{pmatrix} + k_2'(t)\begin{pmatrix} e^{2t} \\ 2e^{2t} \\ 4e^{2t} \end{pmatrix} + k_3'(t)\begin{pmatrix} e^{-4t} \\ -4e^{-4t} \\ 16e^{-4t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 4e^{2t} \end{pmatrix} \text{ ou } \begin{cases} k_1'(t)e^t + k_2'(t)e^{2t} + k_3'(t)e^{-4t} = 0 \\ k_1'(t)e^t + 2k_2'(t)e^{2t} - 4k_3'(t)e^{-4t} = 0 \\ k_1'(t)e^t + 4k_2'(t)e^{2t} + 16\,k_3'(t)e^{-4t} = 4e^{2t} \end{cases}$$

On résout le système : $k_1'(t) = \dfrac{\begin{vmatrix} 0 & e^{2t} & e^{-4t} \\ 0 & 2e^{2t} & -4e^{-4t} \\ 4e^{2t} & 4e^{2t} & 16e^{-4t} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} e^t & e^{2t} & e^{-4t} \\ e^t & 2e^{2t} & -4e^{-4t} \\ e^t & 4e^{2t} & 16e^{-4t} \end{vmatrix}}$, $k_2'(t) = \dfrac{\begin{vmatrix} e^t & 0 & e^{-4t} \\ e^t & 0 & -4e^{-4t} \\ e^t & 4e^{2t} & 16e^{-4t} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} e^t & e^{2t} & e^{-4t} \\ e^t & 2e^{2t} & -4e^{-4t} \\ e^t & 4e^{2t} & 16e^{-4t} \end{vmatrix}}$ et $k_3'(t) = \dfrac{\begin{vmatrix} e^t & e^{2t} & 0 \\ e^t & 2e^{2t} & 0 \\ e^t & 4e^{2t} & 4e^{2t} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} e^t & e^{2t} & e^{-4t} \\ e^t & 2e^{2t} & -4e^{-4t} \\ e^t & 4e^{2t} & 16e^{-4t} \end{vmatrix}}$

soit $k_1'(t) = \frac{-24}{30\,e^{-t}}$, $k_2'(t) = \frac{20\,e^{-t}}{30\,e^{-t}}$ et $k_3'(t) = \frac{4\,e^{5t}}{30\,e^{-t}}$ soit $k_1'(t) = \frac{-4e^t}{5}$, $k_2'(t) = \frac{2}{3}$ et $k_3'(t) = \frac{2\,e^{6t}}{15}$.

D'où $k_1(t) = -\frac{4}{5}e^t$, $k_2(t) = \frac{2}{3}t$ et $k_3(t) = \frac{e^{6t}}{45}$, et $X_p(t) = \left(\begin{pmatrix} -\frac{4}{5} \\ -\frac{4}{5} \\ -\frac{4}{5} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{2}{3}t \\ \frac{4}{3}t \\ \frac{8}{3}t \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{1}{45} \\ -\frac{4}{45} \\ \frac{16}{45} \end{pmatrix}\right)e^{2t}$ soit

$$X_p(t) = \begin{pmatrix} \frac{2}{3}t - \frac{7}{9} \\ \frac{4}{3}t - \frac{8}{9} \\ \frac{8}{3}t - \frac{4}{9} \end{pmatrix} e^{2t}.$$

3) On en déduit la solution générale f(t) (première ligne de X(t)) :

$f(t) = \frac{2}{3}te^{2t} + k_1e^t + k_2e^{2t} + k_3e^{-4t}$ ou $f(t) = \frac{2}{3}te^{2t} - \frac{7}{9}e^{2t} + k_1e^t + k_2e^{2t} + k_3e^{-4t}$
(le -7/9 et le k_2 peuvent être regroupés)