

Exercice 1. Système homogène : solutions complexes et réelles

$$(a) \begin{cases} x_1'(t) = x_1(t) + 2x_2(t) \\ x_2'(t) = x_1(t) + x_2(t) \end{cases}$$

$$X'(t) = AX(t) \text{ avec } A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Le polynôme caractéristique $P_C(\lambda) = \det(A - \lambda I_2)$ vaut $P_C(\lambda) = (1 - \lambda)^2 - 2 = \lambda^2 - 2\lambda - 1$ soit $P_C(\lambda) = (1 - \lambda - \sqrt{2})(1 - \lambda + \sqrt{2}) = (\lambda - 1 - \sqrt{2})(\lambda - 1 + \sqrt{2})$. Le polynôme caractéristique $P_C(\lambda)$ admet deux racines réelles $1 - \sqrt{2}$ et $1 + \sqrt{2}$. A est diagonalisable dans $\mathbb{R}$.

On cherche les sev propres associés aux valeurs propres :

$$\text{Pour } \lambda_1 = 1 - \sqrt{2}, \text{ un vecteur propre vérifie les équations suivantes : } \begin{cases} x + 2y = (1 - \sqrt{2})x \\ x + y = (1 - \sqrt{2})y \end{cases} \text{ soit}$$

$$2y = -\sqrt{2}x \Rightarrow \text{un générateur possible est } V_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ -\sqrt{2} \end{pmatrix}, \text{ soit } \text{Ker}(A - (1 - \sqrt{2})I_2) = \text{Vect}(V_1).$$

Pour $\lambda_2 = 1 + \sqrt{2}$, les vecteurs propres de ce sev vérifient les équations suivantes :
 $\begin{cases} x + 2y = (1 + \sqrt{2})x \\ x + y = (1 + \sqrt{2})y \end{cases}$ i.e. $2y = \sqrt{2}x \Rightarrow$ un générateur possible est $V_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ \sqrt{2} \end{pmatrix}$, le sous-espace propre associé à λ_2 soit $\text{Ker}(A - (1 + \sqrt{2})I_2) = \text{Vect}(V_2)$.

La solution est donc $X_h(t) = k_1 V_1 e^{(1 - \sqrt{2})t} + k_2 V_2 e^{(1 + \sqrt{2})t}$ (où k_1 et k_2 sont des constantes) soit

$$\begin{cases} x_1(t) = 2k_1 e^{(1 - \sqrt{2})t} + 2k_2 e^{(1 + \sqrt{2})t} \\ x_2(t) = -\sqrt{2}k_1 e^{(1 - \sqrt{2})t} + k_2 \sqrt{2} e^{(1 + \sqrt{2})t} \end{cases}$$

$$(b) \begin{cases} x_1'(t) = -x_2(t) \\ x_2'(t) = 3x_1(t) \end{cases}$$

$$X'(t) = AX(t) \text{ avec } A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$$

Le polynôme caractéristique $P_C(\lambda) = \det(A - \lambda I_2)$ vaut $P_C(\lambda) = \lambda^2 + 3 = (\lambda + i\sqrt{3})(\lambda - i\sqrt{3})$ soit Le polynôme caractéristique $P_C(\lambda)$ admet deux racines complexes conjuguées $-i\sqrt{3}$ et $i\sqrt{3}$. A est diagonalisable dans $\mathbb{C}$.

On cherche le sev propre associé à une des valeurs propres $\lambda_1 = i\sqrt{3}$:

Les vecteurs propres de ce sev vérifient les équations suivantes : $\begin{cases} -y = i\sqrt{3}x \\ 3x = i\sqrt{3}y \end{cases}$ i.e. $y = -i\sqrt{3}x$ et appartiennent donc à une droite vectorielle dont un vecteur générateur est $V_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -i\sqrt{3} \end{pmatrix}$

Le sev propre associé à $\lambda_2 = \bar{\lambda}_1 = -i\sqrt{3}$ a pour générateur est $V_2 = \bar{V}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ i\sqrt{3} \end{pmatrix}$

La solution homogène complexe est donc $X_h(t) = k_1 V_1 e^{i\sqrt{3}t} + k_2 V_2 e^{-i\sqrt{3}t}$ (où k_1 et k_2 sont des constantes complexes) soit
$$\begin{cases} x_1(t) = k_1 e^{i\sqrt{3}t} + k_2 e^{-i\sqrt{3}t} \\ x_2(t) = -ik_1 \sqrt{3} e^{i\sqrt{3}t} + ik_2 \sqrt{3} e^{-i\sqrt{3}t} \end{cases}$$

Une autre base de l'ensemble des solutions associée aux solutions réelles est $\text{Re}(V_1 e^{i\sqrt{3}t})$ et $\text{Im}(V_1 e^{i\sqrt{3}t})$ soit $\text{Re}\left(\frac{e^{i\sqrt{3}t}}{-i\sqrt{3}e^{i\sqrt{3}t}}\right)$ et $\text{Im}\left(\frac{e^{i\sqrt{3}t}}{-i\sqrt{3}e^{i\sqrt{3}t}}\right) : \begin{pmatrix} \cos(\sqrt{3}t) \\ \sqrt{3}\sin(\sqrt{3}t) \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} \sin(\sqrt{3}t) \\ -\sqrt{3}\cos(\sqrt{3}t) \end{pmatrix}$,

Et les solutions réelles s'écrivent $X_h(t) = C_1 \begin{pmatrix} \cos(\sqrt{3}t) \\ \sqrt{3}\sin(\sqrt{3}t) \end{pmatrix} + C_2 \begin{pmatrix} \sin(\sqrt{3}t) \\ -\sqrt{3}\cos(\sqrt{3}t) \end{pmatrix}$

soit
$$\begin{cases} x_1(t) = C_1 \cos(\sqrt{3}t) + C_2 \sin(\sqrt{3}t) \\ x_2(t) = \sqrt{3}C_1 \sin(\sqrt{3}t) - \sqrt{3}C_2 \cos(\sqrt{3}t) \end{cases}$$

Autre possibilité : on écrit les solutions du système homogène sous la forme de combinaisons linéaires des fonctions $\cos(\sqrt{3}t)$ et $\sin(\sqrt{3}t)$ soit :
$$\begin{cases} x_1(t) = C\cos(\sqrt{3}t) + D\sin(\sqrt{3}t) \\ x_2(t) = E\cos(\sqrt{3}t) + F\sin(\sqrt{3}t) \end{cases}$$

On réinjecte dans le système et on identifie :

$$\begin{cases} -C\sqrt{3}\sin(t) + D\sqrt{3}\cos(\sqrt{3}t) = -E\cos(\sqrt{3}t) - F\sin(\sqrt{3}t) \\ -E\sqrt{3}\sin(t) + F\sqrt{3}\cos(\sqrt{3}t) = 3C\cos(\sqrt{3}t) + 3D\sin(\sqrt{3}t) \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} E = -\sqrt{3}D \\ F = \sqrt{3}C \end{cases}$$

On a donc comme solutions réelles du système :
$$\begin{cases} x_1(t) = C\cos(\sqrt{3}t) + D\sin(\sqrt{3}t) \\ x_2(t) = -\sqrt{3}D\cos(\sqrt{3}t) + \sqrt{3}C\sin(\sqrt{3}t) \end{cases} \text{ ou}$$

$X_h(t) = CX_1(t) + DX_2(t)$ avec $X_1(t) = \begin{pmatrix} \cos(\sqrt{3}t) \\ \sqrt{3}\sin(\sqrt{3}t) \end{pmatrix}$ et $X_2(t) = \begin{pmatrix} \sin(\sqrt{3}t) \\ -\sqrt{3}\cos(\sqrt{3}t) \end{pmatrix}$ (avec C et D des constantes réelles)

$$(c) \begin{cases} x'_1(t) = x_1(t) - x_2(t) \\ x'_2(t) = x_1(t) + x_2(t) \end{cases}$$

$$X'(t) = AX(t) \text{ avec } A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Le polynôme caractéristique $P_C(\lambda) = \det(A - \lambda I_2)$ vaut $P_C(\lambda) = (1 - \lambda)^2 + 1 = \lambda^2 - 2\lambda + 2$. Le polynôme caractéristique $P_C(\lambda)$ admet deux racines complexes conjuguées $1+i$ et $1-i$. A est diagonalisable dans $\mathbb{C}$.

On cherche le sev propre associé à une des valeurs propres $\lambda_1 = 1 - i : E_{1-i}$

Les vecteurs propres de ce sev vérifient les équations suivantes : $\begin{cases} ix - y = 0 \\ x + iy = 0 \end{cases}$ i.e. $y = ix$ et appartiennent donc à une droite vectorielle dont un vecteur générateur est $V_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}$

Pour le sev propre associé à $\lambda_2 = \bar{\lambda}_1 = 1 + i : E_{1+i}$, il a pour générateur est $V_2 = \bar{V}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix}$

La solution homogène complexe est donc $X_h(t) = k_1 V_1 e^{(1-i)t} + k_2 V_2 e^{(1+i)t}$ (où k_1 et k_2 sont des constantes complexes) soit
$$\begin{cases} x_1(t) = k_1 e^{(1-i)t} + k_2 e^{(1+i)t} \\ x_2(t) = ik_1 e^{(1-i)t} - ik_2 e^{(1+i)t} \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} x_1(t) = e^t(k_1 e^{-it} + k_2 e^{+it}) \\ x_2(t) = e^t(ik_1 e^{-it} - ik_2 e^{+it}) \end{cases}$$

Une autre base de l'ensemble des solutions est $\text{Re}(V_1 e^{(1-i)t})$ et $\text{Im}(V_1 e^{(1-i)t})$ soit

$$\begin{aligned} &\text{Re} \begin{pmatrix} e^t \cos(t) - ie^t \sin(t) \\ ie^t \cos(t) + e^t \sin(t) \end{pmatrix} \text{ et } \text{Im} \begin{pmatrix} e^t \cos(t) - ie^t \sin(t) \\ ie^t \cos(t) + e^t \sin(t) \end{pmatrix} \text{ soit } \begin{pmatrix} e^t \cos(t) \\ e^t \sin(t) \end{pmatrix} \text{ et } \begin{pmatrix} -e^t \sin(t) \\ e^t \cos(t) \end{pmatrix} \text{ et } X_h(t) = \\ &A_1 \begin{pmatrix} e^t \cos(t) \\ e^t \sin(t) \end{pmatrix} + A_2 \begin{pmatrix} -e^t \sin(t) \\ e^t \cos(t) \end{pmatrix} \text{ soit } \begin{cases} x_1(t) = A_1 e^t \cos(t) - A_2 e^t \sin(t) \\ x_2(t) = A_1 e^t \sin(t) + A_2 e^t \cos(t) \end{cases} \end{aligned}$$

Autre possibilité : on écrit les solutions du système homogène sous la forme de combinaisons linéaires des fonctions $e^t \cos(t)$ et $e^t \sin(t)$ soit :

$$\begin{cases} x_1(t) = C_1 e^t \cos(t) + C_2 e^t \sin(t) \\ x_2(t) = D_1 e^t \cos(t) + D_2 e^t \sin(t) \end{cases}$$

On réinjecte dans le système et on identifie :

$$\begin{cases} (C_1 + C_2) e^t \cos(t) + (-C_1 + C_2) e^t \sin(t) = (C_1 - D_1) e^t \cos(t) + (C_2 - D_2) e^t \sin(t) \\ (D_1 + D_2) e^t \cos(t) + (-D_1 + D_2) e^t \sin(t) = (C_1 + D_1) e^t \cos(t) + (C_2 + D_2) e^t \sin(t) \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} D_1 = -C_2 \\ D_2 = C_1 \end{cases}$$

On a donc comme solution du système :

$$\begin{cases} x_1(t) = C_1 e^t \cos(t) + C_2 e^t \sin(t) \\ x_2(t) = C_1 e^t \sin(t) - C_2 e^t \cos(t) \end{cases} \text{ ou } X_h(t) = C_1 X_1(t) + C_2 X_2(t) \text{ avec } X_1(t) = \begin{pmatrix} e^t \cos(t) \\ e^t \sin(t) \end{pmatrix} \text{ et } X_2(t) = \begin{pmatrix} e^t \sin(t) \\ -e^t \cos(t) \end{pmatrix} \text{ (avec } C_1 \text{ et } C_2 \text{ sont des constantes réelles)}$$

Exercice 2. Système homogène

$$(a) \begin{cases} x'(t) = 3x(t) - y(t) + z(t) \\ y'(t) = 2y(t) \\ z'(t) = x(t) - y(t) + 3z(t) \end{cases} \text{ soit } X'(t) = AX(t) \text{ où } X(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix} \text{ et } A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

On forme le polynôme caractéristique $P_C(\lambda) = \det(A - \lambda I_3)$

$$\begin{aligned} P_C(\lambda) &= (3 - \lambda)[(2 - \lambda)(3 - \lambda)] - (2 - \lambda) = (9 - 6\lambda + \lambda^2)(2 - \lambda) - 2 = -\lambda^3 + 8\lambda^2 - 20\lambda + 16 \text{ soit} \\ P_C(\lambda) &= -(\lambda - 2)(\lambda^2 - 6\lambda + 8) = -(\lambda - 2)(\lambda - 2)(\lambda - 4). A \text{ n'est diagonalisable que si le sev associé} \\ &\text{à la valeur propre 2 soit } \text{Ker}(A - 2I) \text{ est de dimension 2.} \end{aligned}$$

On cherche le sev propre associé à $\lambda = 2$: $E_2 = \text{Ker}(A - 2I)$

$$\text{Les vecteurs propres de ce sev vérifient les équations suivantes : } \begin{cases} 3x - y + z = 2x \\ 2y = 2y \\ x - y + 3z = 2z \end{cases} \text{ soit } \begin{cases} x - y + z = 0 \\ x - y + z = 0 \end{cases}$$

ils appartiennent à un plan vectoriel de dimension 2 dont une base peut être $V_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ et $V_2 =$

$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $E_2 = \text{vect}(V_1, V_2)$ (le choix des vecteurs V_1 et V_2 est non unique) ; la matrice A est donc diagonalisable.

On cherche le sev propre associé à $\lambda = 4$: $E_4 = \text{Ker}(A - 4I)$

Les vecteurs propres de ce sev vérifient les équations suivantes :
$$\begin{cases} 3x - y + z = 4x \\ 2y = 4y \\ x - y + 3z = 4z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -x - y + z = 0 \\ y = 0 \\ x - y - z = 0 \end{cases}$$

soit $\begin{cases} y = 0 \\ x = z \end{cases}$ et appartiennent à une droite vectorielle dont un générateur est $V_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$: $E_4 = \text{vect}(V_4)$

La solution générale est donnée par $\begin{pmatrix} x_h(t) \\ y_h(t) \\ z_h(t) \end{pmatrix} = k_1 \exp(2t) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + k_2 \exp(2t) \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + k_3 \exp(4t) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

(b)
$$\begin{cases} x'(t) = x(t) + 4y(t) - 2z(t) \\ y'(t) = 6y(t) - 3z(t) \\ z'(t) = -x(t) + 4y(t) \end{cases} \quad \text{soit } X'(t) = AX(t) \text{ où } X(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix} \text{ et } A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & -2 \\ 0 & 6 & -3 \\ -1 & 4 & 0 \end{pmatrix}$$

On forme le polynôme caractéristique $P_C(\lambda) = \det(A - \lambda I_3)$

$P_C(\lambda) = (1 - \lambda)[(6 - \lambda)(- \lambda) + 12] - (-12 + 2(6 - \lambda)) = (12 - 6\lambda + \lambda^2)(1 - \lambda) + 2\lambda = -\lambda^3 + 14\lambda^2 - 16\lambda + 12$ soit $P_C(\lambda) = -\lambda^3 + 7\lambda^2 - 16\lambda + 12 = -(\lambda - 2)(\lambda - 2)(\lambda - 3)$. A n'est diagonalisable que si le sev associé à la valeur propre 2 soit $\text{Ker}(A - 2I)$ est de dimension 2.

On cherche le sev propre associé à $\lambda = 2$: $E_2 = \text{Ker}(A - 2I)$

Les vecteurs propres de ce sev vérifient les équations suivantes :
$$\begin{cases} x + 4y - 2z = 2x \\ 6y - 3z = 2y \\ -x + 4y = 2z \end{cases} \quad \text{soit}$$

$$\begin{cases} -x + 4y - 2z = 0 \\ 4y - 3z = 0 \\ -x + 4y - 2z = 0 \end{cases}, \quad \begin{cases} y = \frac{3z}{4} \\ z = x \end{cases} \quad \text{ils appartiennent à une droite vectorielle (dimension 1) dont un vecteur}$$

générateur est $V_2 = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$. Le sev $E_2 = \text{vect}(V_2)$; la matrice A n'est donc pas diagonalisable mais comme

le polynôme caractéristique est scindé, A est semblable à une matrice de Jordan $J = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ reliée

à A par $A = P.J.P^{-1}$. On cherche un vecteur propre associé à $\lambda = 3$ et on complète la base associée à J avec la relation $AV_3 = 2V_3 + V_2$.

On cherche le sev propre associé à $\lambda = 3$: $E_3 = \text{Ker}(A - 3I)$

Un vecteur propre de ce sev vérifie les équations suivantes :
$$\begin{cases} x + 4y - 2z = 3x \\ 6y - 3z = 3y \\ -x + 4y = 3z \end{cases} \quad \text{soit}$$

$$\begin{cases} -2x + 4y - 2z = 0 \\ 3(y - z) = 0 \\ -x + 4y - 3z = 0 \end{cases} \quad \text{soit } \begin{cases} y = z \\ y = x \end{cases}, \quad \text{il appartient à un sev de dimension 1, de générateur } V_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}. \text{ Et le}$$

sev propre $E_3 = \text{vect}(V_1)$

On cherche un vecteur tel que $AV_3 = 2V_3 + V_2$ soit
$$\begin{cases} x + 4y - 2z = 2x + 4 \\ 6y - 3z = 2y + 3 \\ -x + 4y = 2z + 4 \end{cases} \quad \text{soit } \begin{cases} -x + 4y - 2z = 4 \\ 4y - 3z = 3 \\ -x + 4y - 2z = 4 \end{cases} \quad \text{ou}$$

$$\begin{cases} -x + 4y - 2z = 4 \\ x = z - 1 \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} 4y = 3 + 3z \\ x = z - 1 \end{cases}. \quad \text{On prend (par exemple) } V_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 3/2 \\ 1 \end{pmatrix}. \text{ La matrice de passage est}$$

donc $P = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 0 \\ 1 & 3 & 3/2 \\ 1 & 4 & 1 \end{pmatrix}$

$X'(t)=AX(t)$ devient $U'(t)=JU(t)$ ($X(t)=PU(t)$). On note $U(t) = \begin{pmatrix} u(t) \\ v(t) \\ w(t) \end{pmatrix}$, on résoud le système $U'(t)=JU(t)$

soit : $\begin{cases} u'(t) = 3u(t) \\ v'(t) = 2v(t) + w(t) \\ w'(t) = 2w(t) \end{cases}$. La résolution conduit à $\begin{cases} u(t) = k_1 e^{3t} \\ v(t) = k_2 e^{2t} + k_3 t e^{2t} \\ w(t) = k_3 e^{2t} \end{cases}$ puis à

$$\begin{cases} x(t) = u(t) + 4v(t) = k_1 e^{3t} + 4k_2 e^{2t} + 4k_3 t e^{2t} \\ y(t) = u(t) + 3v(t) + \frac{3}{2}w(t) = k_1 e^{3t} + 3k_2 e^{2t} + 3k_3 t e^{2t} + \frac{3}{2}k_3 e^{2t} \text{ ou} \\ z(t) = u(t) + 4v(t) + w(t) = k_1 e^{3t} + 4k_2 e^{2t} + 4k_3 t e^{2t} + k_3 e^{2t} \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix} = k_1 e^{3t} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + k_2 e^{2t} \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} + k_3 e^{2t} \left[\begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} t + \begin{pmatrix} 0 \\ 3/2 \\ 1 \end{pmatrix} \right]$$

$$(c) \begin{cases} x'(t) = -\frac{1}{2}x(t) + y(t) + \frac{3}{2}z(t) \\ y'(t) = -\frac{3}{2}x(t) + y(t) + \frac{1}{2}z(t) \\ z'(t) = \frac{1}{2}x(t) + y(t) + \frac{1}{2}z(t) \end{cases} \text{ soit avec } X(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix} \text{ et } A = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & 1 & \frac{3}{2} \\ -\frac{3}{2} & 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 1 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}, X'(t) = AX(t)$$

On forme le polynôme caractéristique $P_C(\lambda) = \det(A - \lambda I_3)$

$$P_C(\lambda) = \left(-\frac{1}{2} - \lambda\right) \left[(1 - \lambda) \left(\frac{1}{2} - \lambda\right) - \frac{1}{2} \right] - \left[\left(-\frac{3}{2}\right) \left(\frac{1}{2} - \lambda\right) - \frac{1}{4} \right] + \frac{3}{2} \left(-\frac{3}{2} - \frac{1}{2}(1 - \lambda)\right) \text{ soit (après calculs)}$$

$P_C(\lambda) = -\lambda^3 + \lambda^2 - 2$ ou $P_C(\lambda) = -(\lambda + 1)(\lambda^2 - 2\lambda + 2) - (\lambda + 1)(\lambda - 1 - i)(\lambda - 1 + i)$ car (-1) est racine évidente. A n'est pas diagonalisable dans $\mathbb{R}$ mais est diagonalisable dans $\mathbb{C}$.

On cherche le sev propre associé à $\lambda = -1 : E_{-1}$

Les vecteurs propres de ce sev vérifient les équations suivantes : $\begin{cases} -\frac{1}{2}x + y + \frac{3}{2}z = -x \\ -\frac{3}{2}x + y + \frac{1}{2}z = -y \\ \frac{1}{2}x + y + \frac{1}{2}z = -z \end{cases}$ soit

$$\begin{cases} \frac{1}{2}x + y + \frac{3}{2}z = 0 \\ -\frac{3}{2}x + 2y + \frac{1}{2}z = 0 \end{cases} \text{ soit } \begin{cases} x + 2y + 3z = 0 \\ -3x + 4y + z = 0 \end{cases} \text{ soit } \begin{cases} x = -z \\ y = -z \end{cases}, \text{ ils appartiennent à une droite vectorielle}$$

dont un générateur est $V_{-1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} : E_{-1} = \text{vect}(V_{-1})$

On cherche le sev propre associé à $\lambda = 1 + i : E_{1+i}$

Les vecteurs propres de ce sev vérifient les équations suivantes :

$$\begin{cases} -\frac{1}{2}x + y + \frac{3}{2}z = (1+i)x \\ -\frac{3}{2}x + y + \frac{1}{2}z = (1+i)y \\ \frac{1}{2}x + y + \frac{1}{2}z = (1+i)z \end{cases}$$

$$\begin{cases} -(\frac{3}{2} + i)x + y + \frac{3}{2}z = 0 \\ -\frac{3}{2}x - iy + \frac{1}{2}z = 0 \\ \frac{1}{2}x + y + (-\frac{1}{2} - i)z = 0 \end{cases} \quad \text{soit} \quad \begin{cases} -(\frac{3}{2} + i)x + (\frac{-iz+3ix}{2}) + \frac{3}{2}z = 0 \\ y = (-iz + 3ix)/2 \\ \frac{1}{2}x + (\frac{-iz+3ix}{2}) + (-\frac{1}{2} - i)z = 0 \end{cases} \quad \text{soit} \quad \begin{cases} (-\frac{3}{2} + \frac{i}{2})x + (\frac{3}{2} - \frac{i}{2})z = 0 \\ y = \frac{-iz+3ix}{2} \\ \frac{1}{2}x + \frac{3i}{2}x + (-\frac{1}{2} - \frac{3}{2}i)z = 0 \end{cases} \quad \text{soit}$$

$$\begin{cases} x = z \\ y = ix \end{cases} \text{ appartiennent à une droite vectorielle dont un générateur est } V_{1+i} = \begin{pmatrix} 1 \\ i \\ 1 \end{pmatrix} : E_{1+i} = \text{vect}(V_{1+i})$$

Comme les valeurs propres sont complexes conjuguées, un vecteur propre associé à $(1-i)$ peut être choisi en prenant le complexe conjugué de V_{1+i} et $E_{1-i} = \text{vect}(V_{1-i})$ avec $V_{1-i} = \overline{V_{1+i}} = \begin{pmatrix} 1 \\ -i \\ 1 \end{pmatrix}$

La solution de l'équation homogène est donnée (avec des coefficients complexes) par

$$\begin{pmatrix} x_h(t) \\ y_h(t) \\ z_h(t) \end{pmatrix} = k_1 \exp(-t) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + k_2 \exp((1+i)t) \begin{pmatrix} 1 \\ i \\ 1 \end{pmatrix} + k_3 \exp((1-i)t) \begin{pmatrix} 1 \\ -i \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Une base de l'ensemble des solutions est $(e^{-t} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, e^{(1+i)t} \begin{pmatrix} 1 \\ i \\ 1 \end{pmatrix}, e^{(1-i)t} \begin{pmatrix} 1 \\ -i \\ 1 \end{pmatrix})$ (le 3ème élément est

le conjugué du 2ème) ou on peut choisir une base constituée uniquement de fonctions réelles soit $(e^{-t} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \text{Re}(e^{(1+i)t} \begin{pmatrix} 1 \\ i \\ 1 \end{pmatrix}), \text{Im}(e^{(1+i)t} \begin{pmatrix} 1 \\ i \\ 1 \end{pmatrix}))$ car si $X_1(t)$ et $\overline{X_1(t)}$ sont des solutions linéairement

indépendantes alors $\text{Re}(X_1(t))$ et $\text{Im}(X_1(t))$ le sont aussi (ici, on a $X_1(t) = e^{(1+i)t} \begin{pmatrix} 1 \\ i \\ 1 \end{pmatrix}$) et

$(e^{-t} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, e^t \begin{pmatrix} \cos(t) \\ -\sin(t) \\ \cos(t) \end{pmatrix}, e^t \begin{pmatrix} \sin(t) \\ \cos(t) \\ \sin(t) \end{pmatrix})$ est une base possible de l'ensemble des solutions (réelles), ce

qui conduit à une solution générale de l'équation homogène :

$$\begin{pmatrix} x_h(t) \\ y_h(t) \\ z_h(t) \end{pmatrix} = k_1 e^{-t} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + k'_2 e^t \begin{pmatrix} \cos(t) \\ -\sin(t) \\ \cos(t) \end{pmatrix} + k'_3 e^t \begin{pmatrix} \sin(t) \\ \cos(t) \\ \sin(t) \end{pmatrix}$$

Autre possibilité : on cherche les solutions réelles associées aux valeurs propres complexes conjuguées sous la forme de combinaisons linéaires des fonctions $e^t \cos(t)$ et $e^t \sin(t)$. On pose :

$$X_2(t) = \begin{pmatrix} x_2(t) \\ y_2(t) \\ z_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 e^t \cos(t) + a_2 e^t \sin(t) \\ b_1 e^t \cos(t) + b_2 e^t \sin(t) \\ c_1 e^t \cos(t) + c_2 e^t \sin(t) \end{pmatrix}, \text{ il vérifie } \begin{cases} x'_2(t) = -\frac{1}{2}x_2(t) + y_2(t) + \frac{3}{2}z_2(t) \\ y'_2(t) = -\frac{3}{2}x_2(t) + y_2(t) + \frac{1}{2}z_2(t) \\ z'_2(t) = \frac{1}{2}x_2(t) + y_2(t) + \frac{1}{2}z_2(t) \end{cases}, \text{ soit}$$

$$\begin{cases} a_1 e^t (\cos(t) - \sin(t)) + a_2 e^t (\sin(t) + \cos(t)) = -\frac{e^t}{2} (a_1 \cos(t) + a_2 \sin(t)) + e^t (b_1 \cos(t) + b_2 \sin(t)) + \frac{3e^t}{2} (c_1 \cos(t) + c_2 \sin(t)) \\ b_1 e^t (\cos(t) - \sin(t)) + b_2 e^t (\sin(t) + \cos(t)) = -\frac{3e^t}{2} (a_1 \cos(t) + a_2 \sin(t)) + e^t (b_1 \cos(t) + b_2 \sin(t)) + \frac{e^t}{2} (c_1 \cos(t) + c_2 \sin(t)) \\ c_1 e^t (\cos(t) - \sin(t)) + c_2 e^t (\sin(t) + \cos(t)) = \frac{e^t}{2} (a_1 \cos(t) + a_2 \sin(t)) + e^t (b_1 \cos(t) + b_2 \sin(t)) + \frac{e^t}{2} (c_1 \cos(t) + c_2 \sin(t)) \end{cases}$$

Ou

$$\begin{cases} a_1 (\cos(t) - \sin(t)) + a_2 (\sin(t) + \cos(t)) = -\frac{1}{2}(a_1 \cos(t) + a_2 \sin(t)) + b_1 \cos(t) + b_2 \sin(t) + \frac{3}{2}(c_1 \cos(t) + c_2 \sin(t)) \\ b_1 (\cos(t) - \sin(t)) + b_2 (\sin(t) + \cos(t)) = -\frac{3}{2}(a_1 \cos(t) + a_2 \sin(t)) + b_1 \cos(t) + b_2 \sin(t) + \frac{1}{2}(c_1 \cos(t) + c_2 \sin(t)) \\ c_1 (\cos(t) - \sin(t)) + c_2 (\sin(t) + \cos(t)) = \frac{1}{2}(a_1 \cos(t) + a_2 \sin(t)) + b_1 \cos(t) + b_2 \sin(t) + \frac{1}{2}(c_1 \cos(t) + c_2 \sin(t)) \end{cases} \text{ soit}$$

$$\text{en regroupant les termes en } \cos(t) \text{ et en } \sin(t) \left\{ \begin{array}{l} a_1 + a_2 = -\frac{1}{2}a_1 + b_1 + \frac{3}{2}c_1 \\ -a_1 + a_2 = -\frac{1}{2}a_2 + b_2 + \frac{3}{2}c_2 \\ b_1 + b_2 = -\frac{3}{2}a_1 + b_1 + \frac{1}{2}c_1 \\ -b_1 + b_2 = -\frac{3}{2}a_2 + b_2 + \frac{1}{2}c_2 \\ c_1 + c_2 = \frac{1}{2}a_1 + b_1 + \frac{1}{2}c_1 \\ -c_1 + c_2 = \frac{1}{2}a_2 + b_2 + \frac{1}{2}c_2 \end{array} \right. \text{ soit } \left\{ \begin{array}{l} b_1 + \frac{3}{2}c_1 = \frac{3}{2}a_1 + a_2 \\ b_2 + \frac{3}{2}c_2 = -a_1 + \frac{3}{2}a_2 \\ b_2 - \frac{1}{2}c_1 = -\frac{3}{2}a_1 \\ -b_1 - \frac{1}{2}c_2 = -\frac{3}{2}a_2 \\ -b_1 + \frac{1}{2}c_1 + c_2 = \frac{1}{2}a_1 \\ -b_2 - c_1 + \frac{1}{2}c_2 = \frac{1}{2}a_2 \end{array} \right.$$

si on choisit d'exprimer les inconnues (b_1, b_2, c_1, c_2) en fonction des inconnues a_1, a_2 .

On peut résoudre le système (système de Cramer vis-à-vis des inconnues b_1, b_2, c_1 et c_2) :

$$\begin{cases} 2b_1 + 3c_1 = 3a_1 + 2a_2 & (E_1) \\ 2b_2 + 3c_2 = -2a_1 + 3a_2 & (E_2) \\ 2b_2 - c_1 = -3a_1 & (E_3) \\ 2b_1 + c_2 = 3a_2 & (E_4) \\ -2b_1 + c_1 + 2c_2 = a_1 & (E_5) \\ -2b_2 - 2c_1 + c_2 = a_2 & (E_6) \end{cases} \text{ soit } \begin{cases} 2b_1 + 3c_1 = 3a_1 + 2a_2 \\ 2b_2 + 3c_2 = -2a_1 + 3a_2 \\ 2b_1 - 2b_2 + c_1 + c_2 = 3(a_1 + a_2) & (E'_3 = E_4 - E_3) \\ 2b_1 + c_2 = 3a_2 \\ -2b_1 + c_1 + 2c_2 = a_1 \\ -6b_1 - 6b_2 - 3c_1 + 9c_2 = 3(a_2 + a_1) & (E'_6 = 3 * (E_6 + E_5)) \end{cases} \text{ soit}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} 2b_1 + 3c_1 = 3a_1 + 2a_2 \\ 2b_2 + 3c_2 = -2a_1 + 3a_2 \\ 2b_1 + b_2 + c_1 - 2c_2 = 0 & (E''_3 = (E'_3 - E'_6)/4) \\ 2b_1 + c_2 = 3a_2 \\ -2b_1 + c_1 + 2c_2 = a_1 \\ -6b_1 - 6b_2 - 3c_1 + 9c_2 = 3(a_2 + a_1) \end{array} \right.$$

On obtient : $c_1 = -2b_1 - b_2 + 2c_2$, puis un système pour (b_1, c_2) en comparant les équations E_4 et E_6

$$\text{soit } \begin{cases} 2b_1 + c_2 = 3a_2 \\ -2b_2 + 4b_1 + 2b_2 - 4c_2 + c_2 = a_2 \end{cases} \text{ soit } \begin{cases} 2b_1 + c_2 = 3a_2 \\ 4b_1 - 3c_2 = a_2 \end{cases} \text{ soit } \begin{cases} b_1 = a_2 \\ c_2 = a_2 \end{cases}.$$

On en déduit le système d'équations pour les inconnues (b_2, c_1) $\begin{cases} 2a_2 + 3c_1 = 3a_1 + 2a_2 \\ 2b_2 + 3a_2 = -2a_1 + 3a_2 \end{cases}$ soit $\begin{cases} c_1 = a_1 \\ b_2 = -a_1 \end{cases}$ en

réinjectant dans les équations E_1 et E_2 . Au final, on a donc comme solution associée aux valeurs

$$\text{propres complexes } X_2(t) = \begin{pmatrix} a_1 e^t \cos(t) + a_2 e^t \sin(t) \\ a_2 e^t \cos(t) - a_1 e^t \sin(t) \\ a_1 e^t \cos(t) + a_2 e^t \sin(t) \end{pmatrix} \text{ ou } X_2(t) = a_1 \begin{pmatrix} e^t \cos(t) \\ -e^t \sin(t) \\ e^t \cos(t) \end{pmatrix} + a_2 \begin{pmatrix} e^t \sin(t) \\ e^t \cos(t) \\ e^t \sin(t) \end{pmatrix}$$

$$\text{et comme solution générale } \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix} = k_1 e^{-t} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + a_1 e^t \begin{pmatrix} \cos(t) \\ -\sin(t) \\ \cos(t) \end{pmatrix} + a_2 e^t \begin{pmatrix} \sin(t) \\ \cos(t) \\ \sin(t) \end{pmatrix}, \text{ soit la même}$$

solution que précédemment (seuls les noms des constantes sont changés : $a_1 = k'_2$ et $a_2 = k'_3$)

Exercice 3. Système avec second membre

$$X(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} \text{ solution du système différentiel } \begin{cases} x'_1(t) = x_1(t) + x_2(t) + 3e^{2t} \\ x'_2(t) = 4x_1(t) + x_2(t) + 9t \end{cases}$$

$$X'(t) = AX(t) + B(t) \text{ avec } A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } B(t) = \begin{pmatrix} 3e^{2t} \\ 9t \end{pmatrix}$$

1) Solution homogène :

Le polynôme caractéristique $P_C(\lambda) = \det(A - \lambda I_2)$ vaut $P_C(\lambda) = (1 - \lambda)^2 - 4 = \lambda^2 - 2\lambda - 3$ soit

$P_C(\lambda) = (1 - \lambda - 2)(1 - \lambda + 2) = (\lambda + 1)(\lambda - 3)$. Le polynôme caractéristique $P_C(\lambda)$ admet deux racines réelles -1 et 3. A est diagonalisable dans R.

On cherche les sev propres associés aux valeurs propres :

Pour $\lambda_1 = -1$, un vecteur propre de ce sev vérifie les équations suivantes : $\begin{cases} x + y = -x \\ 4x + y = -y \end{cases}$ i.e. $y = -2x$
 $\Rightarrow$ un générateur possible est $V_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$, soit $\text{Ker}(A+I) = \text{Vect}(V_1)$.

Pour $\lambda_2 = 3$, un vecteur propre de ce sev vérifie les équations suivantes : $\begin{cases} x + y = 3x \\ 4x + y = 3y \end{cases}$ i.e. $y = 2x \Rightarrow$
 un générateur possible est $V_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, soit $\text{Ker}(A-3I) = \text{Vect}(V_2)$.

La solution est donc $X_h(t) = k_1 V_1 e^{-t} + k_2 V_2 e^{3t}$ (où k_1 et k_2 sont des constantes) soit

$$\begin{cases} x_1(t) = k_1 e^{-t} + k_2 e^{3t} \\ x_2(t) = -2k_1 e^{-t} + 2k_2 e^{3t} \end{cases}$$

2) On choisit comme solution particulière : $X_p(t) = \begin{pmatrix} at + b + \alpha e^{2t} \\ ct + d + \beta e^{2t} \end{pmatrix}$, on réinjecte dans le système différentiel et on identifie les coefficients :

$$X'_p(t) = \begin{pmatrix} a + 2\alpha e^{2t} \\ c + 2\beta e^{2t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} at + b + \alpha e^{2t} + ct + d + \beta e^{2t} \\ 4at + 4b + 4\alpha e^{2t} + ct + d + \beta e^{2t} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3e^{2t} \\ 9t \end{pmatrix} \text{ soit}$$

$$\begin{pmatrix} (a+c)t + b + d + (\alpha + \beta + 3)e^{2t} \\ (4a+c+9)t + 4b + d + (4\alpha + \beta)e^{2t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a + 2\alpha e^{2t} \\ c + 2\beta e^{2t} \end{pmatrix}, \text{ ce qui conduit à } \begin{cases} a + c = 0 \\ b + d = a \\ \alpha + \beta + 3 = 2\alpha \\ 4a + c + 9 = 0 \\ 4b + d = c \\ 4\alpha + \beta = 2\beta \end{cases} \text{ soit}$$

$$\begin{cases} c = -a \\ b + d = a \\ 4b + d = -a \\ 3a + 9 = 0 \\ \beta + 3 = \alpha \\ 4\alpha = \beta \end{cases} \text{ soit } \begin{cases} a = -3 \\ c = 3 \\ b = 2 \\ d = -5 \\ \alpha = -1 \\ \beta = -4 \end{cases}$$

On obtient comme solution particulière $X_p(t) = \begin{pmatrix} -3t + 2 - e^{2t} \\ 3t - 5 - 4e^{2t} \end{pmatrix}$ et comme solution générale du système différentiel $\begin{cases} x_1(t) = k_1 e^{-t} + k_2 e^{3t} - 3t + 2 - e^{2t} \\ x_2(t) = -2k_1 e^{-t} + 2k_2 e^{3t} + 3t - 5 - 4e^{2t} \end{cases}$

Ou méthode générale (variation des constantes) : $X_p(t) = k_1(t) \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} e^{-t} + k_2(t) \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} e^{3t}$, la relation

$X'(t) = AX(t) + B(t)$ conduit au système d'équations $k'_1(t) \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} e^{-t} + k'_2(t) \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} e^{3t} = \begin{pmatrix} 3e^{2t} \\ 9t \end{pmatrix}$. D'où

$$k'_1(t) = \frac{\begin{vmatrix} 3e^{2t} & e^{3t} \\ 9t & 2e^{3t} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} e^{-t} & e^{3t} \\ -2e^{-t} & 2e^{3t} \end{vmatrix}} = \frac{6e^{5t} - 9te^{3t}}{4e^{2t}} = \frac{3}{2}e^{3t} - \frac{9}{4}te^t \text{ et } k'_2(t) = \frac{\begin{vmatrix} e^{-t} & 3e^{2t} \\ -2e^{-t} & 9t \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} e^{-t} & e^{3t} \\ -2e^{-t} & 2e^{3t} \end{vmatrix}} = \frac{9te^{-t} + 6e^t}{4e^{2t}} = \frac{9}{4}te^{-3t} + \frac{3}{2}e^{-t}$$

Par intégration, on obtient $k_1(t) = \frac{e^{3t}}{2} - \frac{9}{4} \int^t x e^x dx$ et $k_2(t) = + \frac{9}{4} \int^t x e^{-3x} dx - \frac{3}{2}e^{-t}$

On obtient (par intégration par parties) : $\int^t x e^{ax} dx = \left[\frac{x e^{ax}}{a} \right]^t - \int^t \frac{e^{ax}}{a} dx = \frac{t e^{at}}{a} - \left[\frac{e^{ax}}{a^2} \right]^t = \frac{(at-1)e^{at}}{a^2}$

Soit (avec $a=1$ et $a=-3$) $\int^t x e^x dx = (t-1)e^t$ et $\int^t x e^{-3x} dx = \frac{(-3t-1)e^{-3t}}{9}$.

On en déduit $k_1(t) = \frac{e^{3t}}{2} - \frac{9}{4}(t-1)e^t$ et $k_2(t) = -\frac{(3t+1)e^{-3t}}{4} - \frac{3}{2}e^{-t}$ et une solution particulière est

$$X_p(t) = k_1(t) \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} e^{-t} + k_2(t) \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} e^{3t} = \left(\frac{e^{3t}}{2} - \frac{9}{4}(t-1)e^t \right) \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} e^{-t} + \left(-\frac{(3t+1)e^{-3t}}{4} - \frac{3}{2}e^{-t} \right) \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} e^{3t}$$

$$\text{soit } X_p(t) = \left(\frac{e^{2t}}{2} - \frac{9}{4}(t-1) \right) \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} + \left(-\frac{(3t+1)}{4} - \frac{3}{2}e^{2t} \right) \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = e^{2t} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} - \frac{3}{2} \\ -1 - 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\frac{9(t-1)}{4} - \frac{(3t+1)}{4} \\ \frac{9(t-1)}{2} - \frac{(3t+1)}{2} \end{pmatrix} \text{ ou}$$

$$X_p(t) = e^{2t} \begin{pmatrix} -1 \\ -4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -3t+2 \\ 3t-5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3t+2-e^{2t} \\ 3t-5-4e^{2t} \end{pmatrix}$$

Exercice 4. Système avec second membre

$$X'(t) = AX(t) + B(t) \text{ où } A = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & -3 \end{pmatrix} \text{ et } B(t) = \begin{pmatrix} t \\ 0 \end{pmatrix}$$

Solution homogène :

Le polynôme caractéristique vaut $P_C(\lambda) = (-1-\lambda)(-3-\lambda) + 1 = \lambda^2 + 4\lambda + 4 = (\lambda+2)^2$. Le polynôme caractéristique $P_C(\lambda)$ admet une racine double (-2) .

On cherche le sev propre associé à cette valeur propre : pour $\lambda = -2$, les vecteurs propres de ce sev vérifient les équations suivantes : $\begin{cases} -x - y = -2x \\ x - 3y = -2y \end{cases}$ i.e. $y = x \Rightarrow$ le sev est de dimension 1, un

générateur possible est $V_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, soit $\text{Ker}(A+2I) = \text{Vect}(V_1)$. A n'est pas diagonalisable dans $\mathbb{R}$ (ni dans $\mathbb{C}$) mais est trigonalisable et on peut trouver une matrice semblable à A : $J = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$. La base

des vecteurs de J est composée de V_1 et V_2 . On obtient $V_2 = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ par la relation $AV_2 = -2V_2 + V_1$ soit $\begin{cases} -x - y = -2x + 1 \\ x - 3y = -2y + 1 \end{cases}$ soit $\begin{cases} x - y = +1 \\ x - y = +1 \end{cases}$. On choisit $V_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ (choix arbitraire) puis on résout $U' = JU$

soit le système différentiel $\begin{cases} u_1'(t) = -2u_1(t) + u_2(t) \\ u_2'(t) = -2u_2(t) \end{cases}$ ou $\begin{cases} u_1'(t) + 2u_1(t) = k_2 e^{-2t} \\ u_2(t) = k_2 e^{-2t} \end{cases}$ qui a pour

solution $\begin{cases} u_1(t) = k_2 t e^{-2t} + k_1 e^{-2t} \\ u_2(t) = k_2 e^{-2t} \end{cases}$. Et comme $X=PU$, on obtient $X_h(t) = k_1 V_1 e^{-2t} + k_2 t V_1 e^{-2t} +$

$k_2 V_2 e^{-2t}$ (où k_1 et k_2 sont des constantes) soit $\begin{cases} x_{1h}(t) = k_1 e^{-2t} + k_2 t e^{-2t} \\ x_{2h}(t) = k_1 e^{-2t} + k_2 t e^{-2t} - k_2 e^{-2t} \end{cases}$

Solution générale : On choisit comme solution particulière : $X_p(t) = \begin{pmatrix} at + b \\ ct + d \end{pmatrix}$, on réinjecte dans le système différentiel et on identifie les coefficients : $X'_p(t) = \begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -at - b - ct - d \\ at + b - 3ct - 3d \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} t \\ 0 \end{pmatrix}$ soit

$$\begin{pmatrix} -(a+c)t + t - b - d \\ (a-3c)t + b - 3d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix}, \text{ ce qui conduit à } \begin{cases} -a - c + 1 = 0 \\ a = -b - d \\ a - 3c = 0 \\ b - 3d = c \end{cases} \text{ soit } \begin{cases} -4c + 1 = 0 \\ -b - d = 3c \\ a = 3c \\ b - 3d = c \end{cases} \text{ soit}$$

$$\begin{cases} c = \frac{1}{4} \\ a = \frac{3}{4} \\ d = -c = -\frac{1}{4} \\ b = c + 3d = -\frac{1}{2} \end{cases}. \text{ On obtient comme solution particulière } X_p(t) = \begin{pmatrix} \frac{3}{4}t - \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4}t - \frac{1}{4} \end{pmatrix} \text{ et comme solution}$$

$$\text{générale du système différentiel } \begin{cases} x_1(t) = k_1 e^{-2t} + k_2 t e^{-2t} + \frac{3}{4}t - \frac{1}{2} \\ x_2(t) = k_1 e^{-2t} + k_2 t e^{-2t} - k_2 e^{-2t} + \frac{1}{4}t - \frac{1}{4} \end{cases}$$

Exercice 5. Résoudre $f^{(3)}(t) + f''(t) - 10f'(t) + 8f(t) = 4e^{2t}$

$$1) X(t) = \begin{pmatrix} f(t) \\ f'(t) \\ f''(t) \end{pmatrix}, X'(t) = AX(t) + B(t) \text{ avec } A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -8 & 10 & -1 \end{pmatrix} \text{ et } B(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 4e^{2t} \end{pmatrix}$$

2) Solution homogène :

Le polynôme caractéristique $P_c(\lambda) = \det(A - \lambda I_3)$ vaut $P_c(\lambda) = (-\lambda)[(-\lambda)(-1-\lambda) - 10] - 8$ soit $P_c(\lambda) = -(\lambda - 2)(\lambda - 1)(\lambda + 4)$. Le polynôme caractéristique $P_c(\lambda)$ admet trois racines réelles 1, 2 et -4. A est diagonalisable dans R.

On cherche les sev propres associés aux valeurs propres :

$$\text{Pour } \lambda_1 = 1, \text{ les vecteurs propres de ce sev vérifient les équations suivantes : } \begin{cases} y = x \\ z = y \\ -8x + 10y - z = z \end{cases}$$

$$\text{i.e. } \begin{cases} y = x \\ z = y \end{cases} \Rightarrow \text{un générateur est } V_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \text{ soit } \text{Ker}(A - I) = \text{Vect}(V_1).$$

$$\text{Pour } \lambda_2 = 2, \text{ les vecteurs propres de ce sev vérifient les équations suivantes : } \begin{cases} y = 2x \\ z = 2y \\ -8x + 10y - z = 2z \end{cases}$$

$$\text{i.e. } \begin{cases} y = 2x \\ z = 2y \end{cases} \Rightarrow \text{un générateur est } V_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}, \text{ soit } \text{Ker}(A - 2I) = \text{Vect}(V_2).$$

Pour $\lambda_3 = -4$, les vecteurs propres de ce sev vérifient les équations suivantes :

$$\begin{cases} y = -4x \\ z = -4y \\ -8x + 10y - z = -4z \end{cases} \text{ i.e. } \begin{cases} y = -4x \\ z = -4y \end{cases} \Rightarrow \text{un générateur est } V_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ 16 \end{pmatrix}, \text{ soit } \text{Ker}(A + 4I) = \text{Vect}(V_3). \text{ La}$$

solution homogène est donc $X_h(t) = k_1 V_1 e^t + k_2 V_2 e^{2t} + k_3 V_3 e^{-4t}$ (où k_1, k_2 et k_3 sont des constantes) soit $X_h(t) = k_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^t + k_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} e^{2t} + k_3 \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ 16 \end{pmatrix} e^{-4t}$.

Remarque : Pour le sev propre associé à une valeur propre λ , à cause de la forme de la matrice A (position des 1 des premières lignes), le vecteur propre sera de la forme $\begin{pmatrix} 1 \\ \lambda \\ \lambda^2 \end{pmatrix}$.

Solution générale : on prend comme solution particulière $X_p(t) = \begin{pmatrix} ate^{2t} + be^{2t} \\ 2ate^{2t} + (a+2b)e^{2t} \\ 4ate^{2t} + (4a+4b)e^{2t} \end{pmatrix}$ (on

utilise le fait que la deuxième ligne est la dérivée de la première et que la troisième la dérivée de la deuxième). On prend $(at+b)e^{2t}$ et pas ae^{2t} car e^{2t} est solution de l'équation homogène.

On réinjecte dans le système différentiel, on obtient :

$$X'_p(t) = \begin{pmatrix} 2at + (a+2b) \\ 4at + (4a+4b) \\ 8at + (12a+8b) \end{pmatrix} e^{2t} = e^{2t} \begin{pmatrix} 2at + a + 2b \\ 4at + 4a + 4b \\ -8(at+b) + 10(2at+a+2b) - (4at+4a+4b) + 4 \end{pmatrix}$$

La troisième ligne donne $8at + 12a + 8b = -8at - 8b + 20at + 10a + 20b - 4at - 4a - 4b + 4$ soit

$$12a = 6a + 4 \text{ ou } a = 2/3 \Rightarrow X_p(t) = e^{2t} \begin{pmatrix} \frac{2}{3}t + b \\ \frac{4}{3}t + \frac{2}{3} + 2b \\ \frac{8}{3}t + \frac{8}{3} + 4b \end{pmatrix} \text{ où } b \text{ peut prendre n'importe quelle valeur.}$$

Avec $b=0$, la solution générale du système différentiel est :

$$X(t) = k_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^t + k_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} e^{2t} + k_3 \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ 16 \end{pmatrix} e^{-4t} + \begin{pmatrix} \frac{2}{3}te^{2t} \\ \frac{4}{3}te^{2t} + \frac{2}{3}e^{2t} \\ \frac{8}{3}te^{2t} + \frac{8}{3}e^{2t} \end{pmatrix}$$

Si on choisit la méthode de variation des constantes, on obtient la solution associée à $b=-7/9$ soit

$$X_p(t) = e^{2t} \begin{pmatrix} \frac{2}{3}t - \frac{7}{9} \\ \frac{4}{3}t - \frac{8}{9} \\ \frac{8}{3}t - \frac{4}{9} \end{pmatrix} \text{ et } X(t) = k_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^t + k_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} e^{2t} + k_3 \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ 16 \end{pmatrix} e^{-4t} + e^{2t} \begin{pmatrix} \frac{2}{3}t - \frac{7}{9} \\ \frac{4}{3}t - \frac{8}{9} \\ \frac{8}{3}t - \frac{4}{9} \end{pmatrix}$$

Méthode de variation des constantes : on cherche une solution particulière sous la forme

$$X_p(t) = k_1(t) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^t + k_2(t) \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} e^{2t} + k_3(t) \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ 16 \end{pmatrix} e^{-4t}, \text{ le système } X'(t) = AX(t) + B(t) \text{ devient}$$

$$k'_1(t) \begin{pmatrix} e^t \\ e^t \\ e^t \end{pmatrix} + k'_2(t) \begin{pmatrix} e^{2t} \\ 2e^{2t} \\ 4e^{2t} \end{pmatrix} + k'_3(t) \begin{pmatrix} e^{-4t} \\ -4e^{-4t} \\ 16e^{-4t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 4e^{2t} \end{pmatrix} \text{ ou } \begin{cases} k'_1(t)e^t + k'_2(t)e^{2t} + k'_3(t)e^{-4t} = 0 \\ k'_1(t)e^t + 2k'_2(t)e^{2t} - 4k'_3(t)e^{-4t} = 0 \\ k'_1(t)e^t + 4k'_2(t)e^{2t} + 16k'_3(t)e^{-4t} = 4e^{2t} \end{cases}$$

$$\text{On résout le système : } k'_1(t) = \frac{\begin{vmatrix} 0 & e^{2t} & e^{-4t} \\ 0 & 2e^{2t} & -4e^{-4t} \\ 4e^{2t} & 4e^{2t} & 16e^{-4t} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} e^t & e^{2t} & e^{-4t} \\ e^t & 2e^{2t} & -4e^{-4t} \\ e^t & 4e^{2t} & 16e^{-4t} \end{vmatrix}}, k'_2(t) = \frac{\begin{vmatrix} e^t & 0 & e^{-4t} \\ e^t & 0 & -4e^{-4t} \\ e^t & 4e^{2t} & 16e^{-4t} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} e^t & e^{2t} & e^{-4t} \\ e^t & 2e^{2t} & -4e^{-4t} \\ e^t & 4e^{2t} & 16e^{-4t} \end{vmatrix}} \text{ et } k'_3(t) = \frac{\begin{vmatrix} e^t & e^{2t} & 0 \\ e^t & 2e^{2t} & 0 \\ e^t & 4e^{2t} & 4e^{2t} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} e^t & e^{2t} & e^{-4t} \\ e^t & 2e^{2t} & -4e^{-4t} \\ e^t & 4e^{2t} & 16e^{-4t} \end{vmatrix}}$$

$$\text{soit } k'_1(t) = \frac{-24}{30e^{-t}}, k'_2(t) = \frac{20e^{-t}}{30e^{-t}} \text{ et } k'_3(t) = \frac{4e^{5t}}{30e^{-t}} \text{ soit } k'_1(t) = \frac{-4e^t}{5}, k'_2(t) = \frac{2}{3} \text{ et } k'_3(t) = \frac{2e^{6t}}{15}.$$

$$\text{D'où } k_1(t) = -\frac{4}{5}e^t, k_2(t) = \frac{2}{3}t \text{ et } k_3(t) = \frac{e^{6t}}{45}, X_p(t) = \begin{pmatrix} -\frac{4}{5} + \frac{2}{3}t + \frac{1}{45} \\ -\frac{4}{5} + \frac{4}{3}t - \frac{4}{45} \\ -\frac{4}{5} + \frac{8}{3}t + \frac{16}{45} \end{pmatrix} e^{2t} \text{ soit } X_p(t) = \begin{pmatrix} \frac{2}{3}t - \frac{7}{9} \\ \frac{4}{3}t - \frac{8}{9} \\ \frac{8}{3}t - \frac{4}{9} \end{pmatrix} e^{2t}.$$

3) La solution générale $f(t)$ (première ligne de $X(t)$) est donc : $f(t) = \frac{2}{3}te^{2t} + k_1e^t + k_2e^{2t} + k_3e^{-4t}$

$$\text{ou } f(t) = \frac{2}{3}te^{2t} - \frac{7}{9}e^{2t} + k_1e^t + k_2e^{2t} + k_3e^{-4t} \text{ (le } -7/9 \text{ et le } k_2 \text{ peuvent être regroupés)}$$