ENSICAEN - 1A Matériaux et Chimie FISE **2026-2027**

TD1 - Systèmes différentiels linéaires

CORRIGE

Exercice 1. *Système homogène : solutions complexes et réelles*

$(\boldsymbol{a})$ $\begin{cases} x_1'(t) = x_1(t) + 2x_2(t) \\ x_2'(t) = x_1(t) + x_2(t) \end{cases}$

$X'(t) = AX(t)$ avec $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

Le polynôme caractéristique $P_C(\lambda)$ = dét(A - λI_2) vaut $P_C(\lambda) = (1-\lambda)^2 - 2 = \lambda^2 - 2\lambda - 1$ soit $P_C(\lambda) = (1-\lambda-\sqrt{2})(1-\lambda+\sqrt{2}) = (\lambda-1-\sqrt{2})(\lambda-1+\sqrt{2})$. Le polynôme caractéristique $P_C(\lambda)$ admet deux racines réelles $1-\sqrt{2}$ et $1+\sqrt{2}$. A est diagonalisable dans R.

On cherche les sev propres associés aux valeurs propres :

Pour $\lambda_1 = 1-\sqrt{2}$, un vecteur propre vérifie les équations suivantes : $\begin{cases} x+2y = (1-\sqrt{2})x \\ x+y = (1-\sqrt{2})y \end{cases}$ soit

$2y = -\sqrt{2}x$ => un générateur possible est $V_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ -\sqrt{2} \end{pmatrix}$, soit Ker(A-(1-$\sqrt{2}$)$I_2$)=VECT($V_1$).

Pour $\lambda_2 = 1+\sqrt{2}$, les vecteurs propres de ce sev vérifient les équations suivantes : $\begin{cases} x+2y = (1+\sqrt{2})x \\ x+y = (1+\sqrt{2})y \end{cases}$ i.e. $2y = \sqrt{2}x$ => un générateur possible est $V_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ \sqrt{2} \end{pmatrix}$, le sous-espace propre associé à λ_2 soit Ker(A-(1-$\sqrt{2}$)I_2)=VECT(V_2).

La solution est donc $X_h(t) = k_1 V_1 e^{(1-\sqrt{2})t} + k_2 V_2 e^{(1+\sqrt{2})t}$ (où k_1 et k_2 sont des constantes) soit $\begin{cases} x_1(t) = 2k_1 e^{(1-\sqrt{2})t} + 2k_2 e^{(1+\sqrt{2})t} \\ x_2(t) = -\sqrt{2}k_1 e^{(1-\sqrt{2})t} + k_2\sqrt{2}\, e^{(1+\sqrt{2})t} \end{cases}$

$(\boldsymbol{b})$ $\begin{cases} x_1'(t) = -x_2(t) \\ x_2'(t) = 3x_1(t) \end{cases}$

$X'(t) = AX(t)$ avec $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$

Le polynôme caractéristique $P_C(\lambda)$ = dét(A - λI_2) vaut $P_C(\lambda) = \lambda^2 + 3 = (\lambda + i\sqrt{3})(\lambda - i\sqrt{3})$ soit Le polynôme caractéristique $P_C(\lambda)$ admet deux racines complexes conjuguées $-i\sqrt{3}$ et $i\sqrt{3}$. A est diagonalisable dans C.

On cherche le sev propre associé à une des valeurs propres $\lambda_1 = i\sqrt{3}$:

Les vecteurs propres de ce sev vérifient les équations suivantes : $\begin{cases} -y = i\sqrt{3}x \\ 3x = i\sqrt{3}y \end{cases}$ i.e. $y = -i\sqrt{3}x$ et appartiennent donc à une droite vectorielle dont un vecteur générateur est $V_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -i\sqrt{3} \end{pmatrix}$

Le sev propre associé à $\lambda_2 = \overline{\lambda_1} = -i\sqrt{3}$ a pour générateur est $V_2 = \overline{V_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ i\sqrt{3} \end{pmatrix}$

La solution homogène complexe est donc $X_h(t) = k_1 V_1 e^{i\sqrt{3}t} + k_2 V_2 e^{-i\sqrt{3}t}$ (où k_1 et k_2 sont des constantes complexes) soit $\begin{cases} x_1(t) = k_1 e^{i\sqrt{3}t} + k_2 e^{-i\sqrt{3}t} \\ x_2(t) = -ik_1\sqrt{3}e^{i\sqrt{3}t} + ik_2\sqrt{3}e^{-i\sqrt{3}t} \end{cases}$.

Une autre base de l'ensemble des solutions associée aux solutions réelles est $Re(V_1 e^{i\sqrt{3}t})$ et $Im(V_1 e^{i\sqrt{3}t})$ soit $Re\begin{pmatrix} e^{i\sqrt{3}t} \\ -i\sqrt{3}e^{i\sqrt{3}t} \end{pmatrix}$ et $Im\begin{pmatrix} e^{i\sqrt{3}t} \\ -i\sqrt{3}e^{i\sqrt{3}t} \end{pmatrix} : \begin{pmatrix} \cos(\sqrt{3}t) \\ \sqrt{3}\sin(\sqrt{3}t) \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} \sin(\sqrt{3}t) \\ -\sqrt{3}\cos(\sqrt{3}t) \end{pmatrix}$,

Et les solutions réelles s'écrivent $X_h(t) = C_1\begin{pmatrix} \cos(\sqrt{3}t) \\ \sqrt{3}\sin(\sqrt{3}t) \end{pmatrix} + C_2\begin{pmatrix} \sin(\sqrt{3}t) \\ -\sqrt{3}\cos(\sqrt{3}t) \end{pmatrix}$

soit $\begin{cases} x_1(t) = C_1\cos(\sqrt{3}t) + C_2\sin(\sqrt{3}t) \\ x_2(t) = \sqrt{3}C_1\sin(\sqrt{3}t) - \sqrt{3}C_2\cos(\sqrt{3}t) \end{cases}$.

Autre possibilité : on écrit les solutions du système homogène sous la forme de combinaisons linéaires des fonctions $\cos(\sqrt{3}t)$ et $\sin(\sqrt{3}t)$ soit : $\begin{cases} x_1(t) = C\cos(\sqrt{3}t) + D\sin(\sqrt{3}t) \\ x_2(t) = E\cos(\sqrt{3}t) + F\sin(\sqrt{3}t) \end{cases}$

On réinjecte dans le système et on identifie :

$\begin{cases} -C\sqrt{3}\sin(t) + D\sqrt{3}\cos(\sqrt{3}t) = -E\cos(\sqrt{3}t) - F\sin(\sqrt{3}t) \\ -E\sqrt{3}\sin(t) + F\sqrt{3}\cos(\sqrt{3}t) = 3C\cos(\sqrt{3}t) + 3D\sin(\sqrt{3}t) \end{cases}$ ou $\begin{cases} E = -\sqrt{3}D \\ F = \sqrt{3}C \end{cases}$

On a donc comme solutions réelles du système : $\begin{cases} x_1(t) = C\cos(\sqrt{3}t) + D\sin(\sqrt{3}t) \\ x_2(t) = -\sqrt{3}D\cos(\sqrt{3}t) + \sqrt{3}C\sin(\sqrt{3}t) \end{cases}$ ou

$X_h(t) = CX_1(t) + DX_2(t)$ avec $X_1(t) = \begin{pmatrix} \cos(\sqrt{3}t) \\ \sqrt{3}\sin(\sqrt{3}t) \end{pmatrix}$ et $X_2(t) = \begin{pmatrix} \sin(\sqrt{3}t) \\ -\sqrt{3}\cos(\sqrt{3}t) \end{pmatrix}$ (avec C et D des constantes réelles)

$(\boldsymbol{c})\begin{cases} x_1'(t) = x_1(t) - x_2(t) \\ x_2'(t) = x_1(t) + x_2(t) \end{cases}$

$X'(t) = AX(t)$ avec $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

Le polynôme caractéristique $P_C(\lambda) = dét(A - \lambda I_2)$ vaut $P_C(\lambda) = (1-\lambda)^2 + 1 = \lambda^2 - 2\lambda + 2$. Le polynôme caractéristique $P_C(\lambda)$ admet deux racines complexes conjuguées 1+i et 1-i. A est diagonalisable dans C.

On cherche le sev propre associé à une des valeurs propres $\lambda_1 = 1 - i$: E_{1-i}

Les vecteurs propres de ce sev vérifient les équations suivantes : $\begin{cases} ix - y = 0 \\ x + iy = 0 \end{cases}$ i.e. $y = ix$ et appartiennent donc à une droite vectorielle dont un vecteur générateur est $V_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}$

Pour le sev propre associé à $\lambda_2 = \overline{\lambda_1} = 1 + i$: E_{1+i}, il a pour générateur est $V_2 = \overline{V_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix}$

La solution homogène complexe est donc $X_h(t) = k_1 V_1 e^{(1-i)t} + k_2 V_2 e^{(1+i)t}$ (où k_1 et k_2 sont des constantes complexes) soit $\begin{cases} x_1(t) = k_1 e^{(1-i)t} + k_2 e^{(1+i)t} \\ x_2(t) = ik_1 e^{(1-i)t} - ik_2 e^{(1+i)t} \end{cases}$ ou $\begin{cases} x_1(t) = e^t(k_1 e^{-it} + k_2 e^{+it}) \\ x_2(t) = e^t(ik_1 e^{-it} - ik_2 e^{+it}) \end{cases}$.

Une autre base de l'ensemble des solutions est $\mathrm{Re}(V_1 e^{(1-i)t})$ et $\mathrm{Im}(V_1 e^{(1-i)t})$ soit $\mathrm{Re}\begin{pmatrix} e^t\cos(t) - ie^t\sin(t) \\ ie^t\cos(t) + e^t\sin(t) \end{pmatrix}$ et $\mathrm{Im}\begin{pmatrix} e^t\cos(t) - ie^t\sin(t) \\ ie^t\cos(t) + e^t\sin(t) \end{pmatrix}$ soit $\begin{pmatrix} e^t\cos(t) \\ e^t\sin(t) \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} -e^t\sin(t) \\ e^t\cos(t) \end{pmatrix}$ et $X_h(t) = A_1\begin{pmatrix} e^t\cos(t) \\ e^t\sin(t) \end{pmatrix} + A_2\begin{pmatrix} -e^t\sin(t) \\ e^t\cos(t) \end{pmatrix}$ soit $\begin{cases} x_1(t) = A_1\, e^t\cos(t) - A_2\, e^t\sin(t) \\ x_2(t) = A_1\, e^t\sin(t) + A_2\, e^t\cos(t) \end{cases}$.

Autre possibilité : on écrit les solutions du système homogène sous la forme de combinaisons linéaires des fonctions $e^t\cos(t)$ et $e^t\sin(t)$ soit :

$$\begin{cases} x_1(t) = C_1\, e^t\cos(t) + C_2\, e^t\sin(t) \\ x_2(t) = D_1\, e^t\cos(t) + D_2\, e^t\sin(t) \end{cases}$$

On réinjecte dans le système et on identifie :

$\begin{cases} (C_1+C_2)\, e^t\cos(t) + (-C_1+C_2)\, e^t\sin(t) = (C_1-D_1)e^t\cos(t) + (C_2-D_2)\, e^t\sin(t) \\ (D_1+D_2)e^t\cos(t) + (-D_1+D_2)\, e^t\sin(t) = (C_1+D_1)e^t\cos(t) + (C_2+D_2)\, e^t\sin(t) \end{cases}$ ou $\begin{cases} D_1 = -C_2 \\ D_2 = C_1 \end{cases}$

On a donc comme solution du système :

$\begin{cases} x_1(t) = C_1\, e^t\cos(t) + C_2\, e^t\sin(t) \\ x_2(t) = C_1\, e^t\sin(t) - C_2\, e^t\cos(t) \end{cases}$ ou $X_h(t) = C_1X_1(t) + C_2X_2(t)$ avec $X_1(t) = \begin{pmatrix} e^t\cos(t) \\ e^t\sin(t) \end{pmatrix}$ et $X_2(t) = \begin{pmatrix} e^t\sin(t) \\ -e^t\cos(t) \end{pmatrix}$ (avec C_1 et C_2 sont des constantes réelles)

Exercice 2. *Système homogène*

(a) $\begin{cases} x'(t) = 3x(t) - y(t) + z(t) \\ y'(t) = 2y(t) \\ z'(t) = x(t) - y(t) + 3z(t) \end{cases}$ soit $X'(t)=AX(t)$ où $X(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix}$ et $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$

On forme le polynôme caractéristique $P_C(\lambda) = \det(A - \lambda I_3)$
$P_C(\lambda) = (3-\lambda)[\,(2-\lambda)(3-\lambda)\,] - (2-\lambda) = (9 - 6\lambda + \lambda^2)(2-\lambda) - 2 = -\lambda^3 + 8\lambda^2 - 20\lambda + 16$ soit $P_C(\lambda) = -(\lambda-2)(\lambda^2 - 6\lambda + 8) = -(\lambda-2)(\lambda-2)(\lambda-4)$. A n'est diagonalisable que si le sev associé à la valeur propre 2 soit Ker(A-2I) est de dimension 2.

On cherche le sev propre associé à $\lambda = 2$: E_2=Ker(A-2I)

Les vecteurs propres de ce sev vérifient les équations suivantes : $\begin{cases} 3x - y + z = 2x \\ 2y = 2y \\ x - y + 3z = 2z \end{cases}$ soit $\{x - y + z = 0,$ ils appartiennent à un plan vectoriel de dimension 2 dont une base peut être $V_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ et $V_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et E_2=vect(V_1, V_2) (le choix des vecteurs V1 et V2 est non unique) ; la matrice A est donc diagonalisable.

On cherche le sev propre associé à $\lambda = 4$: E_4=Ker(A-4I)

Les vecteurs propres de ce sev vérifient les équations suivantes : $\begin{cases} 3x - y + z = 4x \\ 2y = 4y \\ x - y + 3z = 4z \end{cases}$ $\begin{cases} -x - y + z = 0 \\ y = 0 \\ x - y - z = 0 \end{cases}$

soit $\begin{cases} y = 0 \\ x = z \end{cases}$ et appartiennent à une droite vectorielle dont un générateur est $V_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$: E_4=vect(V_4)

La solution générale est donnée par $\begin{pmatrix} x_h(t) \\ y_h(t) \\ z_h(t) \end{pmatrix} = k_1 \exp(2t) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + k_2 \exp(2t) \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + k_3 \exp(4t) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

$(\boldsymbol{b})$ $\begin{cases} x'(t) = x(t) + 4y(t) - 2z(t) \\ y'(t) = 6y(t) - 3z(t) \\ z'(t) = -x(t) + 4y(t) \end{cases}$ soit X'(t)=AX(t) où $X(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix}$ et $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & -2 \\ 0 & 6 & -3 \\ -1 & 4 & 0 \end{pmatrix}$

On forme le polynôme caractéristique $P_C(\lambda)$ = dét(A - λI_3)

$P_C(\lambda) = (1-\lambda)[(6-\lambda)(-\lambda) + 12] - \big(-12 + 2(6-\lambda)\big) = (12 - 6\lambda + \lambda^2)(1-\lambda) + 2\lambda = -\lambda^3 + 14\lambda^2 - 16\lambda + 12$ soit $P_C(\lambda) = -\lambda^3 + 7\lambda^2 - 16\lambda + 12 = -(\lambda-2)(\lambda-2)(\lambda-3)$. A n'est diagonalisable que si le sev associé à la valeur propre 2 soit Ker(A-2I) est de dimension 2.

On cherche le sev propre associé à $\lambda = 2$: E_2=Ker(A-2I)

Les vecteurs propres de ce sev vérifient les équations suivantes : $\begin{cases} x + 4y - 2z = 2x \\ 6y - 3z = 2y \\ -x + 4y = 2z \end{cases}$ soit $\begin{cases} -x + 4y - 2z = 0 \\ 4y - 3z = 0 \\ -x + 4y - 2z = 0 \end{cases}$, $\begin{cases} y = \frac{3z}{4} \\ z = x \end{cases}$ ils appartiennent à une droite vectorielle (dimension 1) dont un vecteur générateur est $V_2 = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$. Le sev E_2=vect(V_2); la matrice A n'est donc pas diagonalisable mais comme le polynôme caractéristique est scindé, A est semblable à une matrice de Jordan $J = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ reliée à A par $A = P.J.P^{-1}$. On cherche un vecteur propre associé à $\lambda = 3$ et on complète la base associée à J avec la relation $AV_3 = 2V_3 + V_2$.

On cherche le sev propre associé à $\lambda = 3$: E_3=Ker(A-3I)

Un vecteur propre de ce sev vérifie les équations suivantes : $\begin{cases} x + 4y - 2z = 3x \\ 6y - 3z = 3y \\ -x + 4y = 3z \end{cases}$ soit $\begin{cases} -2x + 4y - 2z = 0 \\ 3(y - z) = 0 \\ -x + 4y - 3z = 0 \end{cases}$ soit $\begin{cases} y = z \\ y = x \end{cases}$, il appartient à un sev de dimension 1, de générateur $V_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Et le sev propre E_3=vect(V_1)

On cherche un vecteur tel que $AV_3 = 2V_3 + V_2$ soit $\begin{cases} x + 4y - 2z = 2x + 4 \\ 6y - 3z = 2y + 3 \\ -x + 4y = 2z + 4 \end{cases}$ soit $\begin{cases} -x + 4y - 2z = 4 \\ 4y - 3z = +3 \\ -x + 4y - 2z = 4 \end{cases}$ ou $\begin{cases} -x + 4y - 2z = 4 \\ x = z - 1 \end{cases}$ ou $\begin{cases} 4y = 3 + 3z \\ x = z - 1 \end{cases}$. On prend (par exemple) $V_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 3/2 \\ 1 \end{pmatrix}$. La matrice de passage est donc $P = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 0 \\ 1 & 3 & 3/2 \\ 1 & 4 & 1 \end{pmatrix}$

X′(t)=AX(t) devient U′(t)=JU(t) (X(t)=PU(t)). On note $U(t)=\begin{pmatrix} u(t) \\ v(t) \\ w(t) \end{pmatrix}$, on résoud le système U′(t)=JU(t)

soit : $\begin{cases} u'(t)=3u(t) \\ v'(t)=2v(t)+w(t). \\ w'(t)=2w(t) \end{cases}$ La résolution conduit à $\begin{cases} u(t)=k_1e^{3t} \\ v(t)=k_2e^{2t}+k_3te^{2t} \\ w(t)=k_3e^{2t} \end{cases}$ puis à

$\begin{cases} x(t)=u(t)+4v(t)=k_1e^{3t}+4k_2e^{2t}+4k_3te^{2t} \\ y(t)=u(t)+3v(t)+\frac{3}{2}w(t)=k_1e^{3t}+3k_2e^{2t}+3k_3te^{2t}+\frac{3}{2}k_3e^{2t} \\ z(t)=u(t)+4v(t)+w(t)=k_1e^{3t}+4k_2e^{2t}+4k_3te^{2t}+k_3e^{2t} \end{cases}$ ou

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix}=k_1e^{3t}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}+k_2e^{2t}\begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}+k_3e^{2t}\left[\begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}t+\begin{pmatrix} 0 \\ 3/2 \\ 1 \end{pmatrix}\right]$$

$(\boldsymbol{c})$ $\begin{cases} x'(t)=-\frac{1}{2}x(t)+y(t)+\frac{3}{2}z(t) \\ y'(t)=-\frac{3}{2}x(t)+y(t)+\frac{1}{2}z(t) \\ z'(t)=\frac{1}{2}x(t)+y(t)+\frac{1}{2}z(t) \end{cases}$ soit avec $X(t)=\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix}$ et $A=\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & 1 & \frac{3}{2} \\ -\frac{3}{2} & 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 1 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$, X′(t) = AX(t)

On forme le polynôme caractéristique $P_C(\lambda)$ = dét(A - λI_3)

$P_C(\lambda)=\left(-\frac{1}{2}-\lambda\right)\left[(1-\lambda)\left(\frac{1}{2}-\lambda\right)-\frac{1}{2}\right]-\left[\left(-\frac{3}{2}\right)\left(\frac{1}{2}-\lambda\right)-\frac{1}{4}\right]+\frac{3}{2}\left(-\frac{3}{2}-\frac{1}{2}(1-\lambda)\right)$ soit (après calculs)

$P_C(\lambda)=-\lambda^3+\lambda^2-2$ ou $P_C(\lambda)=-(\lambda+1)(\lambda^2-2\lambda+2)-(\lambda+1)(\lambda-1-i)(\lambda-1+i)$ car (-1) est racine évidente. A n'est pas diagonalisable dans R mais est diagonalisable dans C.

On cherche le sev propre associé à $\lambda=-1$: E_{-1}

Les vecteurs propres de ce sev vérifient les équations suivantes : $\begin{cases} -\frac{1}{2}x+y+\frac{3}{2}z=-x \\ -\frac{3}{2}x+y+\frac{1}{2}z=-y \\ \frac{1}{2}x+y+\frac{1}{2}z=-z \end{cases}$ soit

$\begin{cases} \frac{1}{2}x+y+\frac{3}{2}z=0 \\ -\frac{3}{2}x+2y+\frac{1}{2}z=0 \end{cases}$ soit $\begin{cases} x+2y+3z=0 \\ -3x+4y+z=0 \end{cases}$ soit $\begin{cases} x=-z \\ y=-z \end{cases}$, ils appartiennent à une droite vectorielle dont un générateur est $V_{-1}=\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$: E_{-1}=vect(V_{-1})

On cherche le sev propre associé à $\lambda=1+i$: E_{1+i}

Les vecteurs propres de ce sev vérifient les équations suivantes : $\begin{cases} -\frac{1}{2}x + y + \frac{3}{2}z = (1+i)x \\ -\frac{3}{2}x + y + \frac{1}{2}z = (1+i)y \\ \frac{1}{2}x + y + \frac{1}{2}z = (1+i)z \end{cases}$

$\begin{cases} -(\frac{3}{2}+i)x + y + \frac{3}{2}z = 0 \\ -\frac{3}{2}x - iy + \frac{1}{2}z = 0 \\ \frac{1}{2}x + y + (-\frac{1}{2}-i)z = 0 \end{cases}$ soit $\begin{cases} -(\frac{3}{2}+i)x + (\frac{-iz+3ix}{2}) + \frac{3}{2}z = 0 \\ y = (-iz+3ix)/2 \\ \frac{1}{2}x + (\frac{-iz+3ix}{2}) + (-\frac{1}{2}-i)z = 0 \end{cases}$ soit $\begin{cases} \left(-\frac{3}{2}+\frac{i}{2}\right)x + (\frac{3}{2}-\frac{i}{2})z = 0 \\ y = \frac{-iz+3ix}{2} \\ \frac{1}{2}x + \frac{3i}{2}x + (-\frac{1}{2}-\frac{3}{2}i)z = 0 \end{cases}$ soit

$\begin{cases} x = z \\ y = ix \end{cases}$ appartiennent à une droite vectorielle dont un générateur est $V_{1+i} = \begin{pmatrix} 1 \\ i \\ 1 \end{pmatrix}$: E_{1+i}=vect(V_{1+i})

Comme les valeurs propres sont complexes conjuguées, un vecteur propre associé à (1-i) peut être choisi en prenant le complexe conjugué de V_{1+i} et E_{1-i}=vect(V_{1-i}) avec $V_{1-i} = \overline{V_{1+i}} = \begin{pmatrix} 1 \\ -i \\ 1 \end{pmatrix}$

La solution de l'équation homogène est donnée (avec des coefficients complexes) par

$$\begin{pmatrix} x_h(t) \\ y_h(t) \\ z_h(t) \end{pmatrix} = k_1 \exp(-t)\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + k_2 \exp((1+i)t)\begin{pmatrix} 1 \\ i \\ 1 \end{pmatrix} + k_3 \exp((1-i)t)\begin{pmatrix} 1 \\ -i \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Une base de l'ensemble des solutions est $(e^{-t}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, e^{(1+i)t}\begin{pmatrix} 1 \\ i \\ 1 \end{pmatrix}, e^{(1-i)t}\begin{pmatrix} 1 \\ -i \\ 1 \end{pmatrix})$ (le 3ème élément est le conjugué du 2ème) ou on peut choisir une base constituée uniquement de fonctions réelles soit $(e^{-t}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \mathrm{Re}(e^{(1+i)t}\begin{pmatrix} 1 \\ i \\ 1 \end{pmatrix}), \mathrm{Im}(e^{(1+i)t}\begin{pmatrix} 1 \\ +i \\ 1 \end{pmatrix}))$ car si $X_1(t)$ et $\overline{X_1}(t)$ sont des solutions linéairement indépendantes alors Re(X_1(t)) et Im(X_1(t)) le sont aussi (ici, on a $X_1(t) = e^{(1+i)t}\begin{pmatrix} 1 \\ i \\ 1 \end{pmatrix}$) et $(e^{-t}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, e^{t}\begin{pmatrix} \cos(t) \\ -\sin(t) \\ \cos(t) \end{pmatrix}, e^{t}\begin{pmatrix} \sin(t) \\ \cos(t) \\ \sin(t) \end{pmatrix})$ est une base possible de l'ensemble des solutions (réelles), ce qui conduit à une solution générale de l'équation homogène :

$$\begin{pmatrix} x_h(t) \\ y_h(t) \\ z_h(t) \end{pmatrix} = k_1\, e^{-t}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + k'_2\, e^{t}\begin{pmatrix} \cos(t) \\ -\sin(t) \\ \cos(t) \end{pmatrix} + k'_3\, e^{t}\begin{pmatrix} \sin(t) \\ \cos(t) \\ \sin(t) \end{pmatrix}$$

Autre possibilité : on cherche les solutions réelles associées aux valeurs propres complexes conjuguées sous la forme de combinaisons linéaires des fonctions $e^t\cos(t)$ et $e^t\sin(t)$. On pose : $X_2(t) = \begin{pmatrix} x_2(t) \\ y_2(t) \\ z_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1\, e^t\cos(t) + a_2\, e^t\sin(t) \\ b_1\, e^t\cos(t) + b_2\, e^t\sin(t) \\ c_1\, e^t\cos(t) + c_2\, e^t\sin(t) \end{pmatrix}$, il vérifie $\begin{cases} x'_2(t) = -\frac{1}{2}x_2(t) + y_2(t) + \frac{3}{2}z_2(t) \\ y'_2(t) = -\frac{3}{2}x_2(t) + y_2(t) + \frac{1}{2}z_2(t) \\ z'_2(t) = \frac{1}{2}x_2(t) + y_2(t) + \frac{1}{2}z_2(t) \end{cases}$, soit

$$\begin{cases} a_1e^t(\cos(t)-\sin(t)) + a_2e^t(\sin(t)+\cos(t)) = -\frac{e^t}{2}(a_1\cos(t)+a_2\sin(t)) + e^t(b_1\cos(t)+b_2\sin(t)) + \frac{3e^t}{2}(c_1\cos(t)+c_2\sin(t)) \\ b_1e^t(\cos(t)-\sin(t)) + b_2e^t(\sin(t)+\cos(t)) = -\frac{3e^t}{2}(a_1\cos(t)+a_2\sin(t)) + e^t(b_1\cos(t)+b_2\sin(t)) + \frac{e^t}{2}(c_1\cos(t)+c_2\sin(t)) \\ c_1\, e^t(\cos(t)-\sin(t)) + c_2e^t(\sin(t)+\cos(t)) = \frac{e^t}{2}(a_1\cos(t)+a_2\sin(t)) + e^t(b_1\cos(t)+b_2\sin(t)) + \frac{e^t}{2}(c_1\cos(t)+c_2\sin(t)) \end{cases}$$

Ou

$$\begin{cases} a_1\,(\cos(t)-\sin(t))+a_2(\sin(t)+\cos(t)) = -\frac{1}{2}(a_1\cos(t)+a_2\sin(t))+b_1\cos(t)+b_2\sin(t)+\frac{3}{2}(c_1\cos(t)+c_2\sin(t)) \\ b_1\,(\cos(t)-\sin(t))+b_2(\sin(t)+\cos(t)) = -\frac{3}{2}(a_1\cos(t)+a_2\sin(t))+b_1\cos(t)+b_2\sin(t)+\frac{1}{2}(c_1\cos(t)+c_2\sin(t)) \\ c_1\,(\cos(t)-\sin(t))+c_2(\sin(t)+\cos(t)) = \frac{1}{2}(a_1\cos(t)+a_2\sin(t))+b_1\cos(t)+b_2\sin(t)+\frac{1}{2}(c_1\cos(t)+c_2\sin(t)) \end{cases}$$ soit

en regroupant les termes en cos(t) et en sin(t) $\begin{cases} a_1+a_2 = -\frac{1}{2}a_1+b_1+\frac{3}{2}c_1 \\ -a_1+a_2 = -\frac{1}{2}a_2+b_2+\frac{3}{2}c_2 \\ b_1+b_2 = -\frac{3}{2}a_1+b_1+\frac{1}{2}c_1 \\ -b_1+b_2 = -\frac{3}{2}a_2+b_2+\frac{1}{2}c_2 \\ c_1+c_2 = \frac{1}{2}a_1+b_1+\frac{1}{2}c_1 \\ -c_1+c_2 = \frac{1}{2}a_2+b_2+\frac{1}{2}c_2 \end{cases}$ soit $\begin{cases} b_1+\frac{3}{2}c_1 = \frac{3}{2}a_1+a_2 \\ b_2+\frac{3}{2}c_2 = -a_1+\frac{3}{2}a_2 \\ b_2-\frac{1}{2}c_1 = -\frac{3}{2}a_1 \\ -b_1-\frac{1}{2}c_2 = -\frac{3}{2}a_2 \\ -b_1+\frac{1}{2}c_1+c_2 = \frac{1}{2}a_1 \\ -b_2-c_1+\frac{1}{2}c_2 = \frac{1}{2}a_2 \end{cases}$

si on choisit d'exprimer les inconnues (b_1, b_2, c_1, c_2) en fonction des inconnues a_1, a_2.

On peut résoudre le système (système de Cramer vis-à-vis des inconnues b_1, b_2, c_1 et c_2) :

$$\begin{cases} 2b_1+3c_1 = 3a_1+2a_2 & (E_1) \\ 2b_2+3c_2 = -2a_1+3a_2 & (E_2) \\ 2b_2-c_1 = -3a_1 & (E_3) \\ 2b_1+c_2 = 3a_2 & (E_4) \\ -2b_1+c_1+2c_2 = a_1 & (E_5) \\ -2b_2-2c_1+c_2 = a_2 & (E_6) \end{cases}$$ soit $$\begin{cases} 2b_1+3c_1 = 3a_1+2a_2 & \\ 2b_2+3c_2 = -2a_1+3a_2 & \\ 2b_1-2b_2+c_1+c_2 = 3(a_1+a_2) & (E_3' = E_4-E_3) \\ 2b_1+c_2 = 3a_2 & \\ -2b_1+c_1+2c_2 = a_1 & \\ -6b_1-6b_2-3c_1+9c_2 = 3(a_2+a_1) & (E_6' = 3*(E_6+E_5)) \end{cases}$$ soit

$$\begin{cases} 2b_1+3c_1 = 3a_1+2a_2 & \\ 2b_2+3c_2 = -2a_1+3a_2 & \\ 2b_1+b_2+c_1-2c_2 = 0 & (E_3'' = (E_3'-E_6')/4) \\ 2b_1+c_2 = 3a_2 & \\ -2b_1+c_1+2c_2 = a_1 & \\ -6b_1-6b_2-3c_1+9c_2 = 3(a_2+a_1) & \end{cases}$$

On obtient : $c_1 = -2b_1-b_2+2c_2$, puis un système pour (b_1, c_2) en comparant les équations E_4 et E_6 soit $\begin{cases} 2b_1+c_2 = 3a_2 \\ -2b_2+4b_1+2b_2-4c_2+c_2 = a_2 \end{cases}$ soit $\begin{cases} 2b_1+c_2 = 3a_2 \\ 4b_1-3c_2 = a_2 \end{cases}$ soit $\begin{cases} b_1 = a_2 \\ c_2 = a_2 \end{cases}$.

On en déduit le système d'équations pour les inconnues (b_2, c_1) $\begin{cases} 2a_2+3c_1 = 3a_1+2a_2 \\ 2b_2+3a_2 = -2a_1+3a_2 \end{cases}$ soit $\begin{cases} c_1 = a_1 \\ b_2 = -a_1 \end{cases}$ en réinjectant dans les équations E_1 et E_2. Au final, on a donc comme solution associée aux valeurs propres complexes $X_2(t) = \begin{pmatrix} a_1\,e^t\cos(t)+a_2\,e^t\sin(t) \\ a_2\,e^t\cos(t)-a_1\,e^t\sin(t) \\ a_1e^t\cos(t)+a_2\,e^t\sin(t) \end{pmatrix}$ ou $X_2(t) = a_1\begin{pmatrix} e^t\cos(t) \\ -e^t\sin(t) \\ e^t\cos(t) \end{pmatrix}+a_2\begin{pmatrix} e^t\sin(t) \\ e^t\cos(t) \\ e^t\sin(t) \end{pmatrix}$

et comme solution générale $\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix} = k_1\,e^{-t}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}+a_1\,e^t\begin{pmatrix} \cos(t) \\ -\sin(t) \\ \cos(t) \end{pmatrix}+\ a_2\,e^t\begin{pmatrix} \sin(t) \\ \cos(t) \\ \sin(t) \end{pmatrix}$, soit la même solution que précédemment (seuls les noms des constantes sont changés : $a_1 = k'_2$ et $a_2 = k'_3$)

Exercice 3. *Système avec second membre*

$X(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}$ solution du système différentiel $\begin{cases} x_1'(t) = x_1(t)+x_2(t)+3e^{2t} \\ x_2'(t) = 4x_1(t)+x_2(t)+9t \end{cases}$

$X'(t) = AX(t)+B(t)$ avec $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$ et $B(t) = \begin{pmatrix} 3e^{2t} \\ 9t \end{pmatrix}$

1) Solution homogène :

Le polynôme caractéristique $P_C(\lambda)$ = dét(A - λI_2) vaut $P_C(\lambda) = (1-\lambda)^2 - 4 = \lambda^2 - 2\lambda - 3$ soit

$P_C(\lambda) = (1-\lambda-2)(1-\lambda+2) = (\lambda+1)(\lambda-3)$. Le polynôme caractéristique $P_C(\lambda)$ admet deux racines réelles -1 et 3. A est diagonalisable dans R.

On cherche les sev propres associés aux valeurs propres :

Pour $\lambda_1 = -1$, un vecteur propre de ce sev vérifie les équations suivantes : $\begin{cases} x+y=-x \\ 4x+y=-y \end{cases}$ i.e. $y=-2x$ => un générateur possible est $V_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$, soit Ker(A+I)=VECT($V_1$).

Pour $\lambda_2 = 3$, un vecteur propre de ce sev vérifie les équations suivantes : $\begin{cases} x+y=3x \\ 4x+y=3y \end{cases}$ i.e. $y=2x$ => un générateur possible est $V_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, soit Ker(A-3I)=VECT($V_2$).

La solution est donc $X_h(t) = k_1 V_1 e^{-t} + k_2 V_2 e^{3t}$ (où k_1 et k_2 sont des constantes) soit $\begin{cases} x_1(t) = k_1 e^{-t} + k_2 e^{3t} \\ x_2(t) = -2k_1 e^{-t} + 2k_2 e^{3t} \end{cases}$

2) On choisit comme solution particulière : $X_p(t) = \begin{pmatrix} at+b+\alpha e^{2t} \\ ct+d+\beta e^{2t} \end{pmatrix}$, on réinjecte dans le système différentiel et on identifie les coefficients :

$X'_P(t) = \begin{pmatrix} a+2\alpha e^{2t} \\ c+2\beta e^{2t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} at+b+\alpha e^{2t}+ct+d+\beta e^{2t} \\ 4at+4b+4\alpha e^{2t}+ct+d+\beta e^{2t} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3e^{2t} \\ 9t \end{pmatrix}$ soit

$\begin{pmatrix} (a+c)t+b+d+(\alpha+\beta+3)e^{2t} \\ (4a+c+9)t+4b+d+(4\alpha+\beta)e^{2t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+2\alpha e^{2t} \\ c+2\beta e^{2t} \end{pmatrix}$, ce qui conduit à $\begin{cases} a+c=0 \\ b+d=a \\ \alpha+\beta+3=2\alpha \\ 4a+c+9=0 \\ 4b+d=c \\ 4\alpha+\beta=2\beta \end{cases}$ soit

$\begin{cases} c=-a \\ b+d=a \\ 4b+d=-a \\ 3a+9=0 \\ \beta+3=\alpha \\ 4\alpha=\beta \end{cases}$ soit $\begin{cases} a=-3 \\ c=3 \\ b=2 \\ d=-5 \\ \alpha=-1 \\ \beta=-4 \end{cases}$.

On obtient comme solution particulière $X_p(t) = \begin{pmatrix} -3t+2-e^{2t} \\ 3t-5-4e^{2t} \end{pmatrix}$ et comme solution générale du système différentiel $\begin{cases} x_1(t) = k_1 e^{-t} + k_2 e^{3t} - 3t + 2 - e^{2t} \\ x_2(t) = -2k_1 e^{-t} + 2k_2 e^{3t} + 3t - 5 - 4e^{2t} \end{cases}$

Ou méthode générale (variation des constantes) : $X_p(t) = k_1(t)\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} e^{-t} + k_2(t)\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} e^{3t}$, la relation $X'(t) = AX(t) + B(t)$ conduit au système d'équations $k_1'(t)\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} e^{-t} + k_2'(t)\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} e^{3t} = \begin{pmatrix} 3e^{2t} \\ 9t \end{pmatrix}$. D'où

$k_1'(t) = \frac{\begin{vmatrix} 3e^{2t} & e^{3t} \\ 9t & 2e^{3t} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} e^{-t} & e^{3t} \\ -2e^{-t} & 2e^{3t} \end{vmatrix}} = \frac{6e^{5t} - 9\,t\,e^{3t}}{4\,e^{2t}} = \frac{3}{2}e^{3t} - \frac{9}{4}te^{t}$ et $k_2'(t) = \frac{\begin{vmatrix} e^{-t} & 3e^{2t} \\ -2e^{-t} & 9t \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} e^{-t} & e^{3t} \\ -2e^{-t} & 2e^{3t} \end{vmatrix}} = \frac{9\,t\,e^{-t} + 6e^{t}}{4\,e^{2t}} = \frac{9}{4}t\,e^{-3t} + \frac{3}{2}e^{-t}$

Par intégration, on obtient $k_1(t) = \frac{e^{3t}}{2} - \frac{9}{4}\int^t xe^x dx$ et $k_2(t) = +\frac{9}{4}\int^t xe^{-3x}dx - \frac{3}{2}e^{-t}$

On obtient (par intégration par parties) : $\int^t xe^{ax}dx = \left[\frac{xe^{ax}}{a}\right]^t - \int^t \frac{e^{ax}}{a}dx = \frac{t\,e^{at}}{a} - \left[\frac{e^{ax}}{a^2}\right]^t = \frac{(at-1)\,e^{at}}{a^2}$

Soit (avec a=1 et a =-3) $\int^t xe^x dx = (t-1)\,e^t$ et $\int^t xe^{-3x} dx = \frac{(-3t-1)\,e^{-3t}}{9}$.

On en déduit $k_1(t) = \frac{e^{3t}}{2} - \frac{9}{4}(t-1)\,e^t$ et $k_2(t) = -\frac{(3t+1)\,e^{-3t}}{4} - \frac{3}{2}e^{-t}$ et une solution particulière est

$X_p(t) = k_1(t)\begin{pmatrix}1\\-2\end{pmatrix}e^{-t} + k_2(t)\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}e^{3t} = \left(\frac{e^{3t}}{2} - \frac{9}{4}(t-1)\,e^t\right)\begin{pmatrix}1\\-2\end{pmatrix}e^{-t} + \left(-\frac{(3t+1)\,e^{-3t}}{4} - \frac{3}{2}e^{-t}\right)\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}e^{3t}$

soit $X_p(t) = \left(\frac{e^{2t}}{2} - \frac{9}{4}(t-1)\right)\begin{pmatrix}1\\-2\end{pmatrix} + \left(-\frac{(3t+1)}{4} - \frac{3}{2}e^{2t}\right)\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix} = e^{2t}\begin{pmatrix}\frac{1}{2} & -\frac{3}{2}\\ -1 & -3\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}-\frac{9(t-1)}{4} - \frac{(3t+1)}{4}\\ \frac{9(t-1)}{2} - \frac{(3t+1)}{2}\end{pmatrix}$ ou

$X_p(t) = e^{2t}\begin{pmatrix}-1\\-4\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}-3t+2\\3t-5\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-3t+2-e^{2t}\\3t-5-4e^{2t}\end{pmatrix}$

Exercice 4. *Système avec second membre*

$X'(t) = AX(t) + B(t)$ où $A = \begin{pmatrix}-1 & -1\\1 & -3\end{pmatrix}$ et $B(t) = \begin{pmatrix}t\\0\end{pmatrix}$

Solution homogène :

Le polynôme caractéristique vaut $P_C(\lambda) = (-1-\lambda)(-3-\lambda) + 1 = \lambda^2 + 4\lambda + 4 = (2+\lambda)^2$. Le polynôme caractéristique $P_C(\lambda)$ admet une racine double (-2).

On cherche le sev propre associé à cette valeur propre : pour $\lambda = -2$, les vecteurs propres de ce sev vérifient les équations suivantes : $\begin{cases}-x-y=-2x\\x-3y=-2y\end{cases}$ i.e. $y = x$ => le sev est de dimension 1, un générateur possible est $V_1 = \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$, soit Ker(A+2I)=VECT($V_1$). A n'est pas diagonalisable dans R (ni dans C) mais est trigonalisable et on peut trouver une matrice semblable à A : $J = \begin{pmatrix}-2 & 1\\0 & -2\end{pmatrix}$. La base des vecteurs de J est composée de V_1 et V_2. On obtient $V_2 = \begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ par la relation $AV_2 = -2V_2 + V_1$ soit $\begin{cases}-x-y=-2x+1\\x-3y=-2y+1\end{cases}$ soit $\begin{cases}x-y=+1\\x-y=+1\end{cases}$. On choisit $V_2 = \begin{pmatrix}0\\-1\end{pmatrix}$ (choix arbitraire) puis on résout $U' = JU$ soit le système différentiel $\begin{cases}u'_1(t) = -2u_1(t) + u_2(t)\\u'_2(t) = -2u_2(t)\end{cases}$ ou $\begin{cases}u'_1(t) + 2u_1(t) = k_2e^{-2t}\\u_2(t) = k_2e^{-2t}\end{cases}$ qui a pour solution $\begin{cases}u_1(t) = k_2t\,e^{-2t} + k_1e^{-2t}\\u_2(t) = k_2e^{-2t}\end{cases}$. Et comme X=PU, on obtient $X_h(t) = k_1V_1e^{-2t} + k_2tV_1e^{-2t} + k_2V_2e^{-2t}$ (où k_1 et k_2 sont des constantes) soit $\begin{cases}x_{1h}(t) = k_1e^{-2t} + k_2te^{-2t}\\x_{2h}(t) = k_1e^{-2t} + k_2te^{-2t} - k_2e^{-2t}\end{cases}$

Solution générale : On choisit comme solution particulière : $X_p(t) = \begin{pmatrix}at+b\\ct+d\end{pmatrix}$, on réinjecte dans le système différentiel et on identifie les coefficients : $X'_P(t) = \begin{pmatrix}a\\c\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-at-b-ct-d\\at+b-3ct-3d\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}t\\0\end{pmatrix}$ soit

$\begin{pmatrix} -(a+c)t+t-b-d \\ (a-3c)t+b-3d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix}$, ce qui conduit à $\begin{cases} -a-c+1=0 \\ a=-b-d \\ a-3c=0 \\ b-3d=c \end{cases}$ soit $\begin{cases} -4c+1=0 \\ -b-d=3c \\ a=3c \\ b-3d=c \end{cases}$ soit $\begin{cases} c=\frac{1}{4} \\ a=\frac{3}{4} \\ d=-c=-\frac{1}{4} \\ b=c+3d=-\frac{1}{2} \end{cases}$. On obtient comme solution particulière $X_p(t)=\begin{pmatrix} \frac{3}{4}t-\frac{1}{2} \\ \frac{1}{4}t-\frac{1}{4} \end{pmatrix}$ et comme solution générale du système différentiel $\begin{cases} x_1(t)=k_1e^{-2t}+k_2te^{-2t}+\frac{3}{4}t-\frac{1}{2} \\ x_2(t)=k_1e^{-2t}+k_2te^{-2t}-k_2e^{-2t}+\frac{1}{4}t-\frac{1}{4} \end{cases}$

Exercice 5. Résoudre $f^{(3)}(t)+f''(t)-10f'(t)+8f(t)=4e^{2t}$

1) $X(t)=\begin{pmatrix} f(t) \\ f'(t) \\ f''(t) \end{pmatrix}$, $X'(t)=AX(t)+B(t)$ avec $A=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -8 & 10 & -1 \end{pmatrix}$ et $B(t)=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 4e^{2t} \end{pmatrix}$

2) Solution homogène :

Le polynôme caractéristique $P_C(\lambda)$ = dét(A - λI_3) vaut $P_C(\lambda)=(-\lambda)[(-\lambda)(-1-\lambda)-10]-8$ soit $P_C(\lambda)=-(\lambda-2)(\lambda-1)(\lambda+4)$. Le polynôme caractéristique $P_C(\lambda)$ admet trois racines réelles 1, 2 et -4. A est diagonalisable dans R.

On cherche les sev propres associés aux valeurs propres :

Pour $\lambda_1=1$, les vecteurs propres de ce sev vérifient les équations suivantes : $\begin{cases} y=x \\ z=y \\ -8x+10y-z=z \end{cases}$

i.e. $\begin{cases} y=x \\ z=y \end{cases}$ => un générateur est $V_1=\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, soit Ker(A-I)=VECT($V_1$).

Pour $\lambda_2=2$, les vecteurs propres de ce sev vérifient les équations suivantes : $\begin{cases} y=2x \\ z=2y \\ -8x+10y-z=2z \end{cases}$

i.e. $\begin{cases} y=2x \\ z=2y \end{cases}$=> un générateur est $V_2=\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$, soit Ker(A-2I)=VECT($V_2$).

Pour $\lambda_3=-4$, les vecteurs propres de ce sev vérifient les équations suivantes : $\begin{cases} y=-4x \\ z=-4y \\ -8x+10y-z=-4z \end{cases}$ i.e. $\begin{cases} y=-4x \\ z=-4y \end{cases}$=> un générateur est $V_3=\begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ 16 \end{pmatrix}$, soit Ker(A+4I)=VECT($V_3$). La solution homogène est donc $X_h(t)=k_1V_1e^t+k_2V_2e^{2t}+k_3V_3e^{-4t}$ (où k_1, k_2 et k_3 sont des constantes) soit $X_h(t)=k_1\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}e^t+k_2\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}e^{2t}+k_3\begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ 16 \end{pmatrix}e^{-4t}$.

Remarque : Pour le sev propre associé à une valeur propre λ, à cause de la forme de la matrice A (position des 1 des premières lignes), le vecteur propre sera de la forme $\begin{pmatrix} 1 \\ \lambda \\ \lambda^2 \end{pmatrix}$.

Solution générale : on prend comme solution particulière $X_p(t) = \begin{pmatrix} ate^{2t} + be^{2t} \\ 2ate^{2t} + (a+2b)e^{2t} \\ 4ate^{2t} + (4a+4b)e^{2t} \end{pmatrix}$ (on utilise le fait que la deuxième ligne est la dérivée de la première et que la troisième la dérivée de la deuxième). On prend $(at+b)e^{2t}$ et pas ae^{2t} car e^{2t} est solution de l'équation homogène.
On réinjecte dans le système différentiel, on obtient :

$$X'_p(t) = \begin{pmatrix} 2at + (a+2b) \\ 4at + (4a+4b) \\ 8at + (12a+8b) \end{pmatrix} e^{2t} = e^{2t} \begin{pmatrix} 2at + a + 2b \\ 4at + 4a + 4b \\ -8(at+b) + 10(2at + a + 2b) - (4at + 4a + 4b) + 4 \end{pmatrix}$$

La troisième ligne donne $8at + 12a + 8b = -8at - 8b + 20at + 10a + 20b - 4at - 4a - 4b + 4$ soit $12a = 6a + 4$ ou a=2/3 => $X_p(t) = e^{2t} \begin{pmatrix} \frac{2}{3}t + b \\ \frac{4}{3}t + \frac{2}{3} + 2b \\ \frac{8}{3}t + \frac{8}{3} + 4b \end{pmatrix}$ où b peut prendre n'importe quelle valeur.
Avec b=0, la solution générale du système différentiel est :

$$X(t) = k_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^t + k_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} e^{2t} + k_3 \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ 16 \end{pmatrix} e^{-4t} + \begin{pmatrix} \frac{2}{3}te^{2t} \\ \frac{4}{3}te^{2t} + \frac{2}{3}e^{2t} \\ \frac{8}{3}te^{2t} + \frac{8}{3}e^{2t} \end{pmatrix}$$

Si on choisit la méthode de variation des constantes, on obtient la solution associée à b=-7/9 soit

$$X_p(t) = e^{2t} \begin{pmatrix} \frac{2}{3}t - \frac{7}{9} \\ \frac{4}{3}t - \frac{8}{9} \\ \frac{8}{3}t - \frac{4}{9} \end{pmatrix} \text{ et } X(t) = k_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^t + k_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} e^{2t} + k_3 \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ 16 \end{pmatrix} e^{-4t} + e^{2t} \begin{pmatrix} \frac{2}{3}t - \frac{7}{9} \\ \frac{4}{3}t - \frac{8}{9} \\ \frac{8}{3}t - \frac{4}{9} \end{pmatrix}$$

Méthode de variation des constantes : on cherche une solution particulière sous la forme $X_p(t) = k_1(t) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^t + k_2(t) \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} e^{2t} + k_3(t) \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ 16 \end{pmatrix} e^{-4t}$, le système X'(t)=AX(t)+B(t) devient

$$k'_1(t) \begin{pmatrix} e^t \\ e^t \\ e^t \end{pmatrix} + k'_2(t) \begin{pmatrix} e^{2t} \\ 2e^{2t} \\ 4e^{2t} \end{pmatrix} + k'_3(t) \begin{pmatrix} e^{-4t} \\ -4e^{-4t} \\ 16e^{-4t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 4e^{2t} \end{pmatrix} \text{ ou } \begin{cases} k'_1(t)e^t + k'_2(t)e^{2t} + k'_3(t)e^{-4t} = 0 \\ k'_1(t)e^t + 2k'_2(t)e^{2t} - 4k'_3(t)e^{-4t} = 0 \\ k'_1(t)e^t + 4k'_2(t)e^{2t} + 16\,k'_3(t)e^{-4t} = 4e^{2t} \end{cases}$$

On résout le système : $k'_1(t) = \frac{\begin{vmatrix} 0 & e^{2t} & e^{-4t} \\ 0 & 2e^{2t} & -4e^{-4t} \\ 4e^{2t} & 4e^{2t} & 16e^{-4t} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} e^t & e^{2t} & e^{-4t} \\ e^t & 2e^{2t} & -4e^{-4t} \\ e^t & 4e^{2t} & 16e^{-4t} \end{vmatrix}}$, $k'_2(t) = \frac{\begin{vmatrix} e^t & 0 & e^{-4t} \\ e^t & 0 & -4e^{-4t} \\ e^t & 4e^{2t} & 16e^{-4t} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} e^t & e^{2t} & e^{-4t} \\ e^t & 2e^{2t} & -4e^{-4t} \\ e^t & 4e^{2t} & 16e^{-4t} \end{vmatrix}}$ et $k'_3(t) = \frac{\begin{vmatrix} e^t & e^{2t} & 0 \\ e^t & 2e^{2t} & 0 \\ e^t & 4e^{2t} & 4e^{2t} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} e^t & e^{2t} & e^{-4t} \\ e^t & 2e^{2t} & -4e^{-4t} \\ e^t & 4e^{2t} & 16e^{-4t} \end{vmatrix}}$

soit $k'_1(t) = \frac{-24}{30\,e^{-t}}$, $k'_2(t) = \frac{20\,e^{-t}}{30\,e^{-t}}$ et $k'_3(t) = \frac{4\,e^{5t}}{30\,e^{-t}}$ soit $k'_1(t) = \frac{-4e^t}{5}$, $k'_2(t) = \frac{2}{3}$ et $k'_3(t) = \frac{2\,e^{6t}}{15}$.

D'où $k_1(t) = -\frac{4}{5}e^t$, $k_2(t) = \frac{2}{3}t$ et $k_3(t) = \frac{e^{6t}}{45}$, $X_p(t) = \begin{pmatrix} -\frac{4}{5} + \frac{2}{3}t + \frac{1}{45} \\ -\frac{4}{5} + \frac{4}{3}t - \frac{4}{45} \\ -\frac{4}{5} + \frac{8}{3}t + \frac{16}{45} \end{pmatrix} e^{2t}$ soit $X_p(t) = \begin{pmatrix} \frac{2}{3}t - \frac{7}{9} \\ \frac{4}{3}t - \frac{8}{9} \\ \frac{8}{3}t - \frac{4}{9} \end{pmatrix} e^{2t}$.

3) La solution générale f(t) (première ligne de X(t)) est donc : $f(t) = \frac{2}{3}te^{2t} + k_1e^t + k_2e^{2t} + k_3e^{-4t}$

ou $f(t) = \frac{2}{3}te^{2t} - \frac{7}{9}e^{2t} + k_1e^t + k_2e^{2t} + k_3e^{-4t}$ (le -7/9 et le k_2 peuvent être regroupés)