ENSICAEN - 1A Matériaux et Chimie - FISE

TD1 - Systèmes différentiels linéaires

CORRIGE

Exercice 1. *Système homogène : solutions complexes et réelles*

$(\boldsymbol{i})$ $\begin{cases} x_1'(t) = x_1(t) + 2x_2(t) \\ x_2'(t) = 2x_1(t) + x_2(t) \end{cases}$

$X'(t) = AX(t)$ avec $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$

Le polynôme caractéristique $P_C(\lambda)$ = dét(A - λI_2) vaut $P_C(\lambda) = (1-\lambda)^2 - 4 = \lambda^2 - 2\lambda - 3$ soit $P_C(\lambda) = (1-\lambda-2)(1-\lambda+2) = (\lambda+1)(\lambda-3)$. Le polynôme caractéristique $P_C(\lambda)$ admet deux racines réelles -1 et 3. A est diagonalisable dans R.

On cherche les sev propres associés aux valeurs propres :

Pour $\lambda_1 = -1$, les vecteurs propres de ce sev vérifient les équations suivantes : $\begin{cases} x + 2y = -x \\ 2x + y = -y \end{cases}$

i.e. $y = -x$ => un générateur possible est $V_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$, soit Ker(A+I)=VECT($V_1$).

Pour $\lambda_2 = 3$, les vecteurs propres de ce sev vérifient les équations suivantes : $\begin{cases} x + 2y = 3x \\ 2x + y = 3y \end{cases}$ i.e.

$y = x$ => un générateur possible est $V_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, soit Ker(A-3I)=VECT($V_2$).

La solution est donc $X_h(t) = k_1V_1e^{-t} + k_2V_2e^{3t}$ (où k_1 et k_2 sont des constantes) soit

$\begin{cases} x_1(t) = k_1e^{-t} + k_2e^{3t} \\ x_2(t) = -k_1e^{-t} + k_2e^{3t} \end{cases}$

$(\boldsymbol{ii})$ $\begin{cases} x_1'(t) = -x_2(t) \\ x_2'(t) = 3x_1(t) \end{cases}$

$X'(t) = AX(t)$ avec $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$

Le polynôme caractéristique $P_C(\lambda)$ = dét(A - λI_2) vaut $P_C(\lambda) = \lambda^2 + 3 = (\lambda + i\sqrt{3})(\lambda - i\sqrt{3})$ soit Le polynôme caractéristique $P_C(\lambda)$ admet deux racines complexes conjuguées $-i\sqrt{3}$ et $i\sqrt{3}$. A est diagonalisable dans C.

On cherche le sev propre associé à une des valeurs propres $\lambda_1 = i\sqrt{3}$:

Les vecteurs propres de ce sev vérifient les équations suivantes : $\begin{cases} -y = i\sqrt{3}x \\ 3x = i\sqrt{3}y \end{cases}$ i.e. $y = -i\sqrt{3}x$ et appartiennent donc à une droite vectorielle dont un vecteur générateur est $V_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -i\sqrt{3} \end{pmatrix}$

Le sev propre associé à $\lambda_2 = \overline{\lambda_1} = -i\sqrt{3}$ a pour générateur est $V_2 = \overline{V_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ i\sqrt{3} \end{pmatrix}$

La solution homogène complexe est donc $X_h(t) = k_1V_1e^{i\sqrt{3}t} + k_2V_2e^{-i\sqrt{3}t}$ (où k_1 et k_2 sont des constantes complexes) soit $\begin{cases} x_1(t) = k_1e^{i\sqrt{3}t} + k_2e^{-i\sqrt{3}t} \\ x_2(t) = -ik_1\sqrt{3}e^{i\sqrt{3}t} + ik_2\sqrt{3}e^{-i\sqrt{3}t} \end{cases}$.

Une autre base de l'ensemble des solutions est Re($V_1 e^{i\sqrt{3}t}$) et Im($V_1 e^{i\sqrt{3}t}$) soit Re$\begin{pmatrix} e^{i\sqrt{3}t} \\ -i\sqrt{3}e^{i\sqrt{3}t} \end{pmatrix}$ et Im$\begin{pmatrix} e^{i\sqrt{3}t} \\ -i\sqrt{3}e^{i\sqrt{3}t} \end{pmatrix}$ soit $\begin{pmatrix} \cos(\sqrt{3}t) \\ \sqrt{3}\sin(\sqrt{3}t) \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} \sin(\sqrt{3}t) \\ -\sqrt{3}\cos(\sqrt{3}t) \end{pmatrix}$,

Et la solution peut s'écrire $\mathrm{X_h(t)} = \mathrm{C_1}\begin{pmatrix} \cos(\sqrt{3}t) \\ \sqrt{3}\sin(\sqrt{3}t) \end{pmatrix} + \mathrm{C_2}\begin{pmatrix} \sin(\sqrt{3}t) \\ -\sqrt{3}\cos(\sqrt{3}t) \end{pmatrix}$

soit $\begin{cases} \mathrm{x_1(t) = C_1\cos(\sqrt{3}t) + C_2\sin(\sqrt{3}t)} \\ \mathrm{x_2(t)} = \sqrt{3}C_1\sin(\sqrt{3}\mathrm{t}) - \sqrt{3}\mathrm{C_2}\cos(\sqrt{3}\mathrm{t}) \end{cases}$.

Autre possibilité : on écrit les solutions du système homogène sous la forme de combinaisons linéaires des fonctions $\cos(\sqrt{3}t)$ et $\sin(\sqrt{3}t)$ soit :

$$\begin{cases} \mathrm{x_1(t) = C\cos(\sqrt{3}t) + D\sin(\sqrt{3}t)} \\ \mathrm{x_2(t) = E\cos(\sqrt{3}t) + F\sin(\sqrt{3}t)} \end{cases}$$

On réinjecte dans le système et on identifie :

$\begin{cases} \mathrm{-C\sqrt{3}\sin(t) + D\sqrt{3}\cos(\sqrt{3}t) = -E\cos(\sqrt{3}t) - F\sin(\sqrt{3}t)} \\ \mathrm{-E\sqrt{3}\sin(t) + F\sqrt{3}\cos(\sqrt{3}t) = 3C\cos(\sqrt{3}t) + 3D\sin(\sqrt{3}t)} \end{cases}$ ou $\begin{cases} \mathrm{E} = -\sqrt{3}\mathrm{D} \\ \mathrm{F} = \sqrt{3}\mathrm{C} \end{cases}$

On a donc comme solution du système : $\begin{cases} \mathrm{x_1(t) = C\cos(\sqrt{3}t) + D\sin(\sqrt{3}t)} \\ \mathrm{x_2(t) = -\sqrt{3}D\cos(\sqrt{3}t) + \sqrt{3}C\sin(\sqrt{3}t)} \end{cases}$ ou

$\mathrm{X_h(t) = CX_1(t) + DX_2(t)}$ avec $\mathrm{X_1(t)} = \begin{pmatrix} \cos(\sqrt{3}t) \\ \sqrt{3}\sin(\sqrt{3}t) \end{pmatrix}$ et $\mathrm{X_2(t)} = \begin{pmatrix} \sin(\sqrt{3}t) \\ -\sqrt{3}\cos(\sqrt{3}t) \end{pmatrix}$ (avec C et D des constantes réelles)

$(\boldsymbol{iii})\begin{cases} x_1'(t) = x_1(t) - x_2(t) \\ x_2'(t) = x_1(t) + x_2(t) \end{cases}$

X'(t) = AX(t) avec $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

Le polynôme caractéristique $P_C(\lambda)$ = dét(A - λI_2) vaut $\mathrm{P_C}(\lambda) = (1-\lambda)^2 + 1 = \lambda^2 - 2\lambda + 2$. Le polynôme caractéristique $P_C(\lambda)$ admet deux racines complexes conjuguées 1+i et 1-i. A est diagonalisable dans C.

On cherche le sev propre associé à une des valeurs propres $\lambda_1 = 1 - i$: E_{1-i}

Les vecteurs propres de ce sev vérifient les équations suivantes : $\begin{cases} ix - y = 0 \\ x + iy = 0 \end{cases}$ i.e. $y = ix$ et appartiennent donc à une droite vectorielle dont un vecteur générateur est $V_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}$

Pour le sev propre associé à $\lambda_2 = \overline{\lambda_1} = 1 + i$: E_{1+i}, il a pour générateur est $V_2 = \overline{V_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix}$

La solution homogène complexe est donc $\mathrm{X_h(t) = k_1V_1e^{(1-i)t} + k_2V_2e^{(1+i)t}}$ (où k_1 et k_2 sont des constantes complexes) soit $\begin{cases} \mathrm{x_1(t) = k_1e^{(1-i)t} + k_2e^{(1+i)t}} \\ \mathrm{x_2(t) = ik_1e^{(1-i)t} - ik_2e^{(1+i)t}} \end{cases}$ ou

$\begin{cases} \mathrm{x_1(t) = e^t(k_1e^{-it} + k_2e^{+it})} \\ \mathrm{x_2(t) = e^t(ik_1e^{-it} - ik_2e^{+it})} \end{cases}$.

Une autre base de l'ensemble des solutions est $\mathrm{Re}(V_1 e^{(1-i)t})$ et $\mathrm{Im}(V_1 e^{(1-i)t})$ soit
$\mathrm{Re}\begin{pmatrix} e^t\cos(t) - ie^t\sin(t) \\ ie^t\cos(t) + e^t\sin(t) \end{pmatrix}$ et $\mathrm{Im}\begin{pmatrix} e^t\cos(t) - ie^t\sin(t) \\ ie^t\cos(t) + e^t\sin(t) \end{pmatrix}$ soit $\begin{pmatrix} e^t\cos(t) \\ e^t\sin(t) \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} -e^t\sin(t) \\ e^t\cos(t) \end{pmatrix}$ et
$X_h(t) = A_1\begin{pmatrix} e^t\cos(t) \\ e^t\sin(t) \end{pmatrix} + A_2\begin{pmatrix} -e^t\sin(t) \\ e^t\cos(t) \end{pmatrix}$ soit $\begin{cases} x_1(t) = A_1\, e^t\cos(t) - A_2\, e^t\sin(t) \\ x_2(t) = A_1\, e^t\sin(t) + A_2\, e^t\cos(t) \end{cases}$.

Autre possibilité : on écrit les solutions du système homogène sous la forme de combinaisons linéaires des fonctions $e^t\cos(t)$ et $e^t\sin(t)$ soit :

$$\begin{cases} x_1(t) = C_1\, e^t\cos(t) + C_2\, e^t\sin(t) \\ x_2(t) = D_1\, e^t\cos(t) + D_2\, e^t\sin(t) \end{cases}$$

On réinjecte dans le système et on identifie :

$\begin{cases} (C_1+C_2)\, e^t\cos(t) + (-C_1+C_2)\, e^t\sin(t) = (C_1-D_1)e^t\cos(t) + (C_2-D_2)\, e^t\sin(t) \\ (D_1+D_2)e^t\cos(t) + (-D_1+D_2)\, e^t\sin(t) = (C_1+D_1)e^t\cos(t) + (C_2+D_2)\, e^t\sin(t) \end{cases}$ ou $\begin{cases} D_1 = -C_2 \\ D_2 = C_1 \end{cases}$

On a donc comme solution du système :

$\begin{cases} x_1(t) = C_1\, e^t\cos(t) + C_2\, e^t\sin(t) \\ x_2(t) = C_1\, e^t\sin(t) - C_2\, e^t\cos(t) \end{cases}$ ou $X_h(t) = C_1X_1(t) + C_2X_2(t)$ avec $X_1(t) = \begin{pmatrix} e^t\cos(t) \\ e^t\sin(t) \end{pmatrix}$ et
$X_2(t) = \begin{pmatrix} e^t\sin(t) \\ -e^t\cos(t) \end{pmatrix}$ (avec C_1 et C_2 sont des constantes réelles)

Exercice 2. *Système homogène*

(i) $\begin{cases} x'(t) = 3x(t) - y(t) + z(t) \\ y'(t) = 2y(t) \\ z'(t) = x(t) - y(t) + 3z(t) \end{cases}$ soit $X'(t)=AX(t)$ où $X(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix}$ et $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$

On forme le polynôme caractéristique $P_C(\lambda) = \mathrm{dét}(A - \lambda I_3)$
$P_C(\lambda) = (3-\lambda)[\,(2-\lambda)(3-\lambda)\,] - (2-\lambda) = (9 - 6\lambda + \lambda^2)(2-\lambda) - 2 = -\lambda^3 + 8\lambda^2 - 20\lambda + 16$
soit $P_C(\lambda) = -(\lambda-2)(\lambda^2 - 6\lambda + 8) = -(\lambda-2)(\lambda-2)(\lambda-4)$. A n'est diagonalisable que si le sev associé à la valeur propre 2 soit Ker(A-2I) est de dimension 2.

On cherche le sev propre associé à $\lambda = 2$: E_2=Ker(A-2I)

Les vecteurs propres de ce sev vérifient les équations suivantes : $\begin{cases} 3x - y + z = 2x \\ 2y = 2y \\ x - y + 3z = 2z \end{cases}$ soit $\{x - y + z = 0$, ils appartiennent à un plan vectoriel de dimension 2 dont une base peut être $V_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ et $V_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $E_2=\mathrm{vect}(V_1, V_2)$ (le choix des vecteurs V1 et V2 est non unique) ; la matrice A est donc diagonalisable.

On cherche le sev propre associé à $\lambda = 4$: E_4=Ker(A-4I)

Les vecteurs propres de ce sev vérifient les équations suivantes : $\begin{cases} 3x - y + z = 4x \\ 2y = 4y \\ x - y + 3z = 4z \end{cases}$

$\begin{cases} -x - y + z = 0 \\ y = 0 \\ x - y - z = 0 \end{cases}$ soit $\begin{cases} y = 0 \\ x = z \end{cases}$ et appartiennent à une droite vectorielle dont un générateur est $V_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$: E_4=vect(V_4)

La solution de l'équation homogène est donnée par

$$\begin{pmatrix} x_h(t) \\ y_h(t) \\ z_h(t) \end{pmatrix} = k_1 \exp(2t) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + k_2 \exp(2t) \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + k_3 \exp(4t) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

$(\boldsymbol{ii})$ $\begin{cases} x'(t) = x(t) + 4y(t) - 2z(t) \\ y'(t) = 6y(t) - 3z(t) \\ z'(t) = -x(t) + 4y(t) \end{cases}$ soit X'(t)=AX(t) où $X(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix}$ et $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & -2 \\ 0 & 6 & -3 \\ -1 & 4 & 0 \end{pmatrix}$

On forme le polynôme caractéristique $P_C(\lambda)$ = dét(A - λI_3)

$P_C(\lambda) = (1-\lambda)[\,(6-\lambda)(-\lambda) + 12] - \big(-12 + 2(6-\lambda)\big) = (12 - 6\lambda + \lambda^2)(1-\lambda) + 2\lambda = -\lambda^3 + 14\lambda^2 - 16\lambda + 12$ soit $P_C(\lambda) = -\lambda^3 + 7\lambda^2 - 16\lambda + 12 = -(\lambda-2)(\lambda-2)(\lambda-3)$. A n'est diagonalisable que si le sev associé à la valeur propre 2 soit Ker(A-2I) est de dimension 2.

On cherche le sev propre associé à $\lambda = 2$: E_2=Ker(A-2I)

Les vecteurs propres de ce sev vérifient les équations suivantes : $\begin{cases} x + 4y - 2z = 2x \\ 6y - 3z = 2y \\ -x + 4y = 2z \end{cases}$ soit

$\begin{cases} -x + 4y - 2z = 0 \\ 4y - 3z = 0 \\ -x + 4y - 2z = 0 \end{cases}$, $\begin{cases} y = \frac{3z}{4} \\ z = x \end{cases}$ ils appartiennent à une droite vectorielle (dimension 1) dont un vecteur générateur est $V_2 = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$. Le sev E_2=vect(V_2); la matrice A n'est donc pas diagonalisable mais comme le polynôme caractéristique est scindé, A est semblable à une matrice de Jordan $J = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ reliée à A par $A = P.J.P^{-1}$. On cherche un vecteur propre associé à $\lambda = 3$ et on complète la base associée à J avec la relation $AV_3 = 2V_3 + V_2$.

On cherche le sev propre associé à $\lambda = 3$: E_3=Ker(A-3I)

Les vecteurs propres de ce sev vérifient les équations suivantes : $\begin{cases} x + 4y - 2z = 3x \\ 6y - 3z = 3y \\ -x + 4y = 3z \end{cases}$

$\begin{cases} -2x + 4y - 2z = 0 \\ 3(y - z) = 0 \\ -x + 4y - 3z = 0 \end{cases}$ soit $\begin{cases} y = z \\ y = x \end{cases}$ et appartiennent à une droite vectorielle dont un générateur est $V_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$: E_3=vect(V_1)

On cherche un vecteur tel que $AV_3 = 2V_3 + V_2$ soit $\begin{cases} x + 4y - 2z = 2x + 4 \\ 6y - 3z = 2y + 3 \\ -x + 4y = 2z + 4 \end{cases}$ soit $\begin{cases} -x + 4y - 2z = 4 \\ 4y - 3z = +3 \\ -x + 4y - 2z = 4 \end{cases}$

ou $\begin{cases} -x + 4y - 2z = 4 \\ x = z - 1 \end{cases}$ ou $\begin{cases} 4y = 3 + 3z \\ x = z - 1 \end{cases}$. On prend (par exemple) $V_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 3/2 \\ 1 \end{pmatrix}$. La matrice de passage est donc $P = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 0 \\ 1 & 3 & 3/2 \\ 1 & 4 & 1 \end{pmatrix}$

X'(t)=AX(t) devient U'(t)=JU(t) (X(t)=PU(t)). On note $U(t) = \begin{pmatrix} u(t) \\ v(t) \\ w(t) \end{pmatrix}$, on résoud le système U'(t)=JU(t) soit : $\begin{cases} u'(t) = 3u(t) \\ v'(t) = 2v(t) + w(t) \\ w'(t) = 2w(t) \end{cases}$. La résolution conduit à $\begin{cases} u(t) = k_1 e^{3t} \\ v(t) = k_2 e^{2t} + k_3 t e^{2t} \\ w(t) = k_3 e^{2t} \end{cases}$ puis à

$\begin{cases} x(t) = u(t) + 4v(t) = k_1 e^{3t} + 4k_2 e^{2t} + 4k_3 t e^{2t} \\ y(t) = u(t) + 3v(t) + \frac{3}{2} w(t) = k_1 e^{3t} + 3k_2 e^{2t} + 3k_3 t e^{2t} + \frac{3}{2} k_3 e^{2t} \\ z(t) = u(t) + 4v(t) + w(t) = k_1 e^{3t} + 4k_2 e^{2t} + 4k_3 t e^{2t} + k_3 e^{2t} \end{cases}$ ou

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix} = k_1 e^{3t} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + k_2 e^{2t} \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} + k_3 e^{2t} \left[\begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} t + \begin{pmatrix} 0 \\ 3/2 \\ 1 \end{pmatrix} \right].$$

Exercice 3. *Système avec second membre*

$X(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}$ solution du système différentiel $\begin{cases} x_1'(t) = x_1(t) + x_2(t) + 3e^{2t} \\ x_2'(t) = 4x_1(t) + x_2(t) + 9t \end{cases}$

$X'(t) = AX(t) + B(t)$ avec $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$ et $B(t) = \begin{pmatrix} 3e^{2t} \\ 9t \end{pmatrix}$

1) Solution homogène :

Le polynôme caractéristique $P_C(\lambda)$ = dét(A - λI_2) vaut $P_C(\lambda) = (1 - \lambda)^2 - 4 = \lambda^2 - 2\lambda - 3$ soit $P_C(\lambda) = (1 - \lambda - 2)(1 - \lambda + 2) = (\lambda + 1)(\lambda - 3)$. Le polynôme caractéristique $P_C(\lambda)$ admet deux racines réelles -1 et 3. A est diagonalisable dans R.

On cherche les sev propres associés aux valeurs propres :

Pour $\lambda_1 = -1$, les vecteurs propres de ce sev vérifient les équations suivantes : $\begin{cases} x + y = -x \\ 4x + y = -y \end{cases}$ i.e. $y = -2x$ => un générateur possible est $V_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$, soit Ker(A+I)=VECT($V_1$).

Pour $\lambda_2 = 3$, les vecteurs propres de ce sev vérifient les équations suivantes : $\begin{cases} x + y = 3x \\ 4x + y = 3y \end{cases}$ i.e. $y = 2x$ => un générateur possible est $V_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, soit Ker(A-3I)=VECT($V_2$).

La solution est donc $X_h(t) = k_1 V_1 e^{-t} + k_2 V_2 e^{3t}$ (où k_1 et k_2 sont des constantes) soit $\begin{cases} x_1(t) = k_1 e^{-t} + k_2 e^{3t} \\ x_2(t) = -2k_1 e^{-t} + 2k_2 e^{3t} \end{cases}$

2) On choisit comme solution particulière : $X_p(t) = \begin{pmatrix} at+b+\alpha e^{2t} \\ ct+d+\beta e^{2t} \end{pmatrix}$, on réinjecte dans le système différentiel et on identifie les coefficients :

$X'_P(t) = \begin{pmatrix} a+2\alpha e^{2t} \\ c+2\beta e^{2t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} at+b+\alpha e^{2t}+ct+d+\beta e^{2t} \\ 4at+4b+4\alpha e^{2t}+ct+d+\beta e^{2t} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3e^{2t} \\ 9t \end{pmatrix}$ soit

$\begin{pmatrix} (a+c)t+b+d+(\alpha+\beta+3)e^{2t} \\ (4a+c+9)t+4b+d+(4\alpha+\beta)e^{2t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+2\alpha e^{2t} \\ c+2\beta e^{2t} \end{pmatrix}$, ce qui conduit à $\begin{cases} a+c=0 \\ b+d=a \\ \alpha+\beta+3=2\alpha \\ 4a+c+9=0 \\ 4b+d=c \\ 4\alpha+\beta=2\beta \end{cases}$ soit

$\begin{cases} c=-a \\ b+d=a \\ 4b+d=-a \\ 3a+9=0 \\ \beta+3=\alpha \\ 4\alpha=\beta \end{cases}$ soit $\begin{cases} a=-3 \\ c=3 \\ b=2 \\ d=-5 \\ \alpha=-1 \\ \beta=-4 \end{cases}$.

On obtient comme solution particulière $X_p(t) = \begin{pmatrix} -3t+2-e^{2t} \\ 3t-5-4e^{2t} \end{pmatrix}$ et comme solution générale du système différentiel $\begin{cases} x_1(t) = k_1e^{-t}+k_2e^{3t}-3t+2-e^{2t} \\ x_2(t) = -2k_1e^{-t}+2k_2e^{3t}+3t-5-4e^{2t} \end{cases}$.

Exercice 4. *Système avec second membre*

$X'(t) = AX(t) + B(t)$ où $A = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}$ et $B(t) = \begin{pmatrix} t \\ 0 \end{pmatrix}$

Solution homogène :

Le polynôme caractéristique vaut $P_C(\lambda) = (-1-\lambda)(-3-\lambda)+1 = \lambda^2+4\lambda+4 = (2+\lambda)^2$. Le polynôme caractéristique $P_C(\lambda)$ admet une racine double (-2).

On cherche le sev propre associé à cette valeur propre : pour $\lambda = -2$, les vecteurs propres de ce sev vérifient les équations suivantes : $\begin{cases} -x-y=-2x \\ x-3y=-2y \end{cases}$ i.e. $y = x$ => le sev est de dimension 1, un générateur possible est $V_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, soit Ker(A+2I)=VECT($V_1$). A n'est pas diagonalisable dans R mais est trigonalisable et on peut trouver une matrice semblable à A : $J = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$. La base des vecteurs de J est composée de V_1 et V_2. On obtient $V_2 = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ en utilisant la relation $AV_2 = -2V_2 + V_1$ soit $\begin{cases} -x-y=-2x+1 \\ x-3y=-2y+1 \end{cases}$ soit $\begin{cases} x-y=+1 \\ x-y=+1 \end{cases}$. On choisit $V_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ (choix arbitraire) puis on résout $U' = JU$ soit le système différentiel $\begin{cases} u'_1(t) = -2u_1(t)+u_2(t) \\ u'_2(t) = -2u_2(t) \end{cases}$ ou $\begin{cases} u'_1(t)+2u_1(t) = k_2e^{-2t} \\ u_2(t) = k_2e^{-2t} \end{cases}$ qui a pour solution $\begin{cases} u_1(t) = k_2t\,e^{-2t}+k_1e^{-2t} \\ u_2(t) = k_2e^{-2t} \end{cases}$. Et comme X=PU, on obtient $X_h(t) = k_1V_1e^{-2t}+k_2tV_1e^{-2t}+k_2V_2e^{-2t}$ (où k_1 et k_2 sont des constantes) soit $\begin{cases} x_{1h}(t) = k_1e^{-2t}+k_2te^{-2t} \\ x_{2h}(t) = k_1e^{-2t}+k_2te^{-2t}-k_2e^{-2t} \end{cases}$

Solution générale :

On choisit comme solution particulière : $X_p(t) = \begin{pmatrix} at+b \\ ct+d \end{pmatrix}$, on réinjecte dans le système différentiel et on identifie les coefficients :

$X'_P(t) = \begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -at-b-ct-d \\ at+b-3ct-3d \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} t \\ 0 \end{pmatrix}$ soit

$\begin{pmatrix} -(a+c)t+t-b-d \\ (a-3c)t+b-3d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix}$, ce qui conduit à $\begin{cases} -a-c+1=0 \\ a=-b-d \\ a-3c=0 \\ b-3d=c \end{cases}$ soit $\begin{cases} -4c+1=0 \\ -b-d=3c \\ a=3c \\ b-3d=c \end{cases}$ soit $\begin{cases} c=\frac{1}{4} \\ a=\frac{3}{4} \\ d=-c=-\frac{1}{4} \\ b=c+3d=-\frac{1}{2} \end{cases}$. On obtient comme solution particulière $X_p(t) = \begin{pmatrix} \frac{3}{4}t-\frac{1}{2} \\ \frac{1}{4}t-\frac{1}{4} \end{pmatrix}$ et comme solution générale du système différentiel $\begin{cases} x_1(t) = k_1e^{-2t}+k_2te^{-2t}+\frac{3}{4}t-\frac{1}{2} \\ x_2(t) = k_1e^{-2t}+k_2te^{-2t}-k_2e^{-2t}+\frac{1}{4}t-\frac{1}{4} \end{cases}$

Exercice 5. *Résolution d'une équation différentielle linéaire (EDL) d'ordre 3*

Trouver les solutions réelles f(t) de l'EDL d'ordre 3 : $f^{(3)}(t)+f''(t)-10f'(t)+8f(t)=4e^{2t}$

1) $X(t) = \begin{pmatrix} f(t) \\ f'(t) \\ f''(t) \end{pmatrix}$, $X'(t) = AX(t)+B(t)$ avec $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -8 & 10 & -1 \end{pmatrix}$ et $B(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 4e^{2t} \end{pmatrix}$le

2) Solution homogène :

Le polynôme caractéristique $P_C(\lambda)$ = dét(A - λI_3) vaut $P_C(\lambda) = (-\lambda)[(-\lambda)(-1-\lambda)-10]-8$ soit $P_C(\lambda) = -(\lambda-2)(\lambda-1)(\lambda+4)$. Le polynôme caractéristique $P_C(\lambda)$ admet trois racines réelles 1, 2 et -4. A est diagonalisable dans R.

On cherche les sev propres associés aux valeurs propres :

Pour $\lambda_1 = 1$, les vecteurs propres de ce sev vérifient les équations suivantes : $\begin{cases} y=x \\ z=y \\ -8x+10y-z=z \end{cases}$ i.e. $\begin{cases} y=x \\ z=y \end{cases}$ => un générateur est $V_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, soit Ker(A-I)=VECT($V_1$).

Pour $\lambda_2 = 2$, les vecteurs propres de ce sev vérifient les équations suivantes : $\begin{cases} y=2x \\ z=2y \\ -8x+10y-z=2z \end{cases}$ i.e. $\begin{cases} y=2x \\ z=2y \end{cases}$=> un générateur est $V_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$, soit Ker(A-2I)=VECT($V_2$).

Pour $\lambda_3 = -4$, les vecteurs propres de ce sev vérifient les équations suivantes : $\begin{cases} y=-4x \\ z=-4y \\ -8x+10y-z=-4z \end{cases}$ i.e. $\begin{cases} y=-4x \\ z=-4y \end{cases}$=> un générateur est $V_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ 16 \end{pmatrix}$, soit Ker(A+4I)=VECT($V_3$).

La solution homogène est donc $X_h(t) = k_1V_1e^t+k_2V_2e^{2t}+k_3V_3e^{-4t}$ (où k_1, k_2 et k_3 sont des constantes) soit $X_h(t) = k_1\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}e^t+k_2\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}e^{2t}+k_3\begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ 16 \end{pmatrix}e^{-4t}$.

Remarque : Pour le sev propre associé à une valeur propre λ, à cause de la forme particulière de la matrice A (la position des 1 des premières lignes), le vecteur propre sera nécessairement de la forme $\begin{pmatrix} 1 \\ \lambda \\ \lambda^2 \end{pmatrix}$.

Solution générale : on prend comme solution particulière $X_p(t) = \begin{pmatrix} ate^{2t} \\ 2ate^{2t} + ae^{2t} \\ 4ate^{2t} + 4ae^{2t} \end{pmatrix}$ (on utilise le fait que la deuxième ligne est la dérivée de la première et que la troisième la dérivée de la deuxième). On prend ate^{2t} et pas ae^{2t} car e^{2t} est solution de l'équation homogène.
On réinjecte dans le système différentiel, on obtient :

$$X'_p(t) = \begin{pmatrix} 2ate^{2t} + ae^{2t} \\ 4ate^{2t} + 4ae^{2t} \\ 8ate^{2t} + 12ae^{2t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2ate^{2t} + ae^{2t} \\ 4ate^{2t} + 4ae^{2t} \\ -8ate^{2t} + 10(2ate^{2t} + ae^{2t}) - (4ate^{2t} + 4ae^{2t}) + 4e^{2t} \end{pmatrix}$$

La troisième ligne donne $8at + 12a = -8at + 10(2at + a) - 4at - 4a + 4$ soit $12a = 6a + 4$ ou a=2/3 => $X_p(t) = \begin{pmatrix} \frac{2}{3}te^{2t} \\ \frac{4}{3}te^{2t} + \frac{2}{3}e^{2t} \\ \frac{8}{3}te^{2t} + \frac{8}{3}e^{2t} \end{pmatrix}$ et la solution générale du système différentiel est :

$$X(t) = k_1\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}e^{t} + k_2\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}e^{2t} + k_3\begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ 16 \end{pmatrix}e^{-4t} + \begin{pmatrix} \frac{2}{3}te^{2t} \\ \frac{4}{3}te^{2t} + \frac{2}{3}e^{2t} \\ \frac{8}{3}te^{2t} + \frac{8}{3}e^{2t} \end{pmatrix}$$

3) On en déduit la solution générale f(t) (première ligne de X(t)) :

$$f(t) = \frac{2}{3}te^{2t} + k_1e^{t} + k_2e^{2t} + k_3e^{-4t}$$