ENSICAEN - 1A Matériaux et Chimie FISE

TD2 – Variations de fonctions à plusieurs variables

CORRIGE

Exercice 1. *Intégration d'équations aux dérivées partielles*

Soit f une fonction de deux variables et de classe C^2.

(i) $\frac{\partial f}{\partial x} = 0$ admet comme solutions les fonctions telles que $f(x,y) = \varphi_1(y)$

(ii) $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 0$ soit $\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = 0 => \frac{\partial f}{\partial x} = \varphi_2(y)$ et $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 0$ admet comme solutions les fonctions telles que $f(x,y) = x.\varphi_2(y) + \psi_1(y)$

(iii) $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 0$ soit $\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = 0 => \frac{\partial f}{\partial y} = \varphi_3(y)$ et $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 0$ admet comme solutions les fonctions telles que $f(x,y) = \varphi_4(y) + \psi_2(x)$ avec $\varphi'_4(y) = \varphi_3(y)$

Exercice 2. *Règle de dérivation en chaîne*

F une fonction de classe C^2(R², R). $f(x) = F(3x+1, -x) = F(u(x), v(x))$,
$u(x) = 3x + 1$ et $v(x) = -x$

a) $f'(x) = u'(x).\frac{\partial F}{\partial u}(u,v) + v'(x).\frac{\partial F}{\partial v}(u,v) = 3.\frac{\partial F}{\partial u}(u,v) + (-1).\frac{\partial F}{\partial v}(u,v)$

b) $f''(x) = u'(x).\frac{\partial}{\partial u}\left(3\frac{\partial F}{\partial u} - \frac{\partial F}{\partial v}\right) + v'(x).\frac{\partial}{\partial v}\left(3\frac{\partial F}{\partial u} - \frac{\partial F}{\partial v}\right) = 3.\frac{\partial}{\partial u}\left(3\frac{\partial F}{\partial u} - \frac{\partial F}{\partial v}\right) - \frac{\partial}{\partial v}\left(3\frac{\partial F}{\partial u} - \frac{\partial F}{\partial v}\right)$

$f''(x) = 3.\frac{\partial}{\partial u}\left(3\frac{\partial F}{\partial u} - \frac{\partial F}{\partial v}\right) - \frac{\partial}{\partial v}\left(3\frac{\partial F}{\partial u} - \frac{\partial F}{\partial v}\right) = 9\frac{\partial^2 F(u,v)}{\partial u^2} - 3\frac{\partial^2 F(u,v)}{\partial u\,\partial v} - 3\frac{\partial^2 F(u,v)}{\partial v\,\partial u} + \frac{\partial^2 F(u,v)}{\partial v^2}$ soit

$f''(x) = 3.\frac{\partial}{\partial u}\left(3\frac{\partial F}{\partial u} - \frac{\partial F}{\partial v}\right) - \frac{\partial}{\partial v}\left(3\frac{\partial F}{\partial u} - \frac{\partial F}{\partial v}\right) = 9\frac{\partial^2 F(u,v)}{\partial u^2} - 6\frac{\partial^2 F(u,v)}{\partial u\,\partial v} + \frac{\partial^2 F(u,v)}{\partial v^2}$ car $\frac{\partial^2 F(u,v)}{\partial u\,\partial v} = \frac{\partial^2 F(u,v)}{\partial v\,\partial u}$

d'après le théorème de Schwarz qui s'applique car F est de classe C^2.

Exercice 3. *EDP résolue par changement linéaire de variables*

f et F deux fonctions à valeurs réelles, de classe C ² sur R². $f(x,y) = F(u,v)$, où $u = U(x,y) = x + ay$ et $v = V(x,y) = x + by$, avec a et b des constantes réelles.

a) La matrice Jacobienne doit être inversible, son déterminant vaut b-a, il faut donc a ≠ b

b) $\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial F(u,v)}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial F(u,v)}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial F(u,v)}{\partial u} + \frac{\partial F(u,v)}{\partial v} = \frac{\partial F}{\partial u} + \frac{\partial F}{\partial v}$

$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial F(u,v)}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial F(u,v)}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y} = a\frac{\partial F(u,v)}{\partial u} + b\frac{\partial F(u,v)}{\partial v} = a\frac{\partial F}{\partial u} + b\frac{\partial F}{\partial v}$

$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\partial F}{\partial u} + \frac{\partial F}{\partial v}\right)\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\partial F}{\partial u} + \frac{\partial F}{\partial v}\right)\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial^2 F}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial u \partial v} + \frac{\partial^2 F}{\partial v \partial u} + \frac{\partial^2 F}{\partial v^2}$

$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial u}\left(a\frac{\partial F}{\partial u} + b\frac{\partial F}{\partial v}\right)\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial v}\left(a\frac{\partial F}{\partial u} + b\frac{\partial F}{\partial v}\right)\frac{\partial v}{\partial y} = a\frac{\partial}{\partial u}\left(a\frac{\partial F}{\partial u} + b\frac{\partial F}{\partial v}\right) + b\frac{\partial}{\partial v}\left(a\frac{\partial F}{\partial u} + b\frac{\partial F}{\partial v}\right)$ soit

$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = a^2\frac{\partial^2 F}{\partial u^2} + ab\frac{\partial F}{\partial u\,\partial v} + ab\frac{\partial F}{\partial v\,\partial u} + b^2\frac{\partial^2 F}{\partial v^2} = a^2\frac{\partial^2 F}{\partial u^2} + 2ab\frac{\partial^2 F}{\partial u \partial v} + b^2\frac{\partial^2 F}{\partial v^2}$

Et $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial u}\left(a\frac{\partial F}{\partial u} + b\frac{\partial F}{\partial v}\right)\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial v}\left(a\frac{\partial F}{\partial u} + b\frac{\partial F}{\partial v}\right)\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial u}\left(a\frac{\partial F}{\partial u} + b\frac{\partial F}{\partial v}\right) + \frac{\partial}{\partial v}\left(a\frac{\partial F}{\partial u} + b\frac{\partial F}{\partial v}\right)$ soit

$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = a\frac{\partial^2 F}{\partial u^2} + b\frac{\partial F}{\partial u\,\partial v} + a\frac{\partial F}{\partial v\,\partial u} + b\frac{\partial^2 F}{\partial v^2} = a\frac{\partial^2 F}{\partial u^2} + (a+b)\frac{\partial^2 F}{\partial u \partial v} + b\frac{\partial^2 F}{\partial v^2}$

c) $\frac{\partial f}{\partial x}-\frac{\partial f}{\partial y}=0$ est équivalent à $(1-a)\frac{\partial F}{\partial u}+(1-b)\frac{\partial F}{\partial v}=0$ soit en choisissant a=1 et b=-1, $2\frac{\partial F}{\partial v}=0$ qui a pour solution $F(u,v)=\varphi(u)$. Et $f(x,y)=\varphi(x+y)$

d) $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}-\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=0$ est équivalent à $(1-a^2)\frac{\partial^2 F}{\partial u^2}+2(1-ab)\frac{\partial^2 F}{\partial u\partial v}+(1-b^2)\frac{\partial^2 F}{\partial v^2}=0$. En choisissant a=1 et b=-1, on a donc $4\frac{\partial^2 F}{\partial u\partial v}=0$ ou $\frac{\partial^2 F}{\partial u\partial v}=0$ qui a pour solution $F(u,v)=\varphi(u)+\psi(v)$.

Et $f(x,y)=\varphi(x+y)+\psi(x-y)$

e) L'équation $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}-2\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y}+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=0$ est équivalente à

$(1+a^2-2a)\frac{\partial^2 F}{\partial u^2}+2(1+ab-a-b)\frac{\partial^2 F}{\partial u\partial v}+(1+b^2-2b)\frac{\partial^2 F}{\partial v^2}=0$ soit

$(1-a)^2\frac{\partial^2 F}{\partial u^2}+2(1-a)(1-b))\frac{\partial^2 F}{\partial u\partial v}+(1-b)^2\frac{\partial^2 F}{\partial v^2}=0$. En prenant a=0 et b=1 (u=x et v=x+y), on a $\frac{\partial^2 F}{\partial u^2}=0$ qui a pour solution $F(u,v)=u.\varphi(v)+\psi(v)$, et donc $f(x,y)=x.\varphi(x+y)+\psi(x+y)$

Exercice 4. *EDP résolue par changement de variables*

Soit f une fonction de deux variables x et y, de classe C^2 sur l'ouvert $U=\{(x,y)\in R^2/\,x-y>0\}$. On résoud $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)-\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)+7(x-y)f(x,y)=0$

a) $f(x,y)=g(u,v)$, où $u=x.y$ et $v=x+y$, et g est une fonction de classe C^2 sur un ouvert.

$\frac{\partial f}{\partial x}=\frac{\partial g(u,v)}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial g(u,v)}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}=y.\frac{\partial g(u,v)}{\partial u}+\frac{\partial g(u,v)}{\partial v}=y.\frac{\partial g}{\partial u}+\frac{\partial g}{\partial v}$

$\frac{\partial f}{\partial y}=\frac{\partial g(u,v)}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial g(u,v)}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y}=x.\frac{\partial g(u,v)}{\partial u}+\frac{\partial g(u,v)}{\partial v}=x.\frac{\partial g}{\partial u}+\frac{\partial g}{\partial v}$

b) $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)-\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)+7(x-y)f(x,y)=0$ est équivalent à $(y-x).\left[\frac{\partial g}{\partial u}-7g(u,v)\right]=0$ soit $\frac{\partial g}{\partial u}-7g(u,v)=0$ ou $\frac{\partial g}{\partial u}=7g(u,v)$

c) $\frac{\partial g}{\partial u}=7g(u,v)$ a pour solutions $g(u,v)=K(v).\exp(7u)$ et les solutions de l'EDP sont donc les fonctions f telles que $f(x,y)=K(x+y).\exp(7xy)$

Exercice 5. *Recherche d'extremum, nature des points critiques*

1) Soit la fonction $f(x,y,z)$ de classe C² : $f(x,y,z)=(x-1)^2+3(y+1)^2+2(y+1)\,z\,+3z^2$.

a) Dérivées partielles premières de f sur R³ : $\frac{\partial f}{\partial x}=2(x-1)$, $\frac{\partial f}{\partial y}=6\,(y+1)+2z$, $\frac{\partial f}{\partial z}=2(y+1)+6z$.

Le (ou les) point(s) critique(s) de f sont caractérisés par $\frac{\partial f}{\partial x}=2(x-1)=0$, $\frac{\partial f}{\partial y}=6(y+1)+2z=0$ et $\frac{\partial f}{\partial z}=2(y+1)+6z=0$. Il y a donc un seul point critique (x=1,y=-1,z=0).

b) On calcule les dérivées partielles secondes de f :

$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}=2$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=6$, $\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}=6$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}=\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}=0$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial z}=\frac{\partial^2 f}{\partial z\partial x}=0$ et $\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial z}=\frac{\partial^2 f}{\partial z\partial y}=2$.

La matrice hessienne vaut donc $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 2 \\ 0 & 2 & 6 \end{pmatrix}$, les valeurs propres de cette matrice sont 2 (cf. 1ère colonne), 4 et 8 (trace=14, déterminant=64) qui sont toutes positives. Il s'agit d'un minimum local.

2) Soit la fonction $g(x,y)$ définie par : $g(x,y) = \cos(x) + \cos(y)$. Etude sur l'ouvert [0, 2π[x [0, 2π[.

a) Dérivées partielles premières de g : $\frac{\partial g}{\partial x} = -\sin(x)$, $\frac{\partial g}{\partial y} = -\sin(y)$. Les points critiques de g sont caractérisés par $\frac{\partial g}{\partial x} = 0$ et $\frac{\partial g}{\partial y} = 0$. Il y a donc 4 points critiques (0,0), (0, π), (π,0) et (π, π) (sur U).

b) Les dérivées partielles secondes de g sont : $\frac{\partial^2 g}{\partial x^2} = -\cos(x)$, $\frac{\partial^2 g}{\partial y^2} = -\cos(y)$ et $\frac{\partial^2 g}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 g}{\partial y \partial x} = 0$. La matrice hessienne est $H_g(x,y) = \begin{pmatrix} -\cos(x) & 0 \\ 0 & -\cos(y) \end{pmatrix}$, il s'agit d'une matrice diagonale.

En (0,0) $H_g(0,0) = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ => les valeurs propres sont toutes strictement négatives => maximum local pour (0,0).

En (0, π), $H_g(0,\pi) = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et en (π,0), $H_g(\pi,0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, les valeurs propres sont de signes opposés => ce sont des points-selles.

En (π, π), $H_g(\pi,\pi) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ => les valeurs propres sont toutes strictement positives => minimum local pour (π, π).