

TD1 - Systèmes différentiels linéaires

Ex. supplémentaire

CORRIGE

Exercice

$$\begin{cases} x'(t) = -\frac{1}{2}x(t) + y(t) + \frac{3}{2}z(t) \\ y'(t) = -\frac{3}{2}x(t) + y(t) + \frac{1}{2}z(t) \\ z'(t) = \frac{1}{2}x(t) + y(t) + \frac{1}{2}z(t) \end{cases}$$

Avec $X(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix}$, $A = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & 1 & \frac{3}{2} \\ -\frac{3}{2} & 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 1 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$ on cherche à résoudre $X'(t) = AX(t)$

On forme le polynôme caractéristique $P_C(\lambda) = \det(A - \lambda I_3)$

$P_C(\lambda) = \left(-\frac{1}{2} - \lambda\right) \left[(1 - \lambda) \left(\frac{1}{2} - \lambda\right) - \frac{1}{2} \right] - \left[\left(-\frac{3}{2}\right) \left(\frac{1}{2} - \lambda\right) - \frac{1}{4} \right] + \frac{3}{2} \left(-\frac{3}{2} - \frac{1}{2}(1 - \lambda)\right)$ soit (après calculs) $P_C(\lambda) = -\lambda^3 + \lambda^2 - 2$ ou $P_C(\lambda) = -(\lambda + 1)(\lambda^2 - 2\lambda + 2) - (\lambda + 1)(\lambda - 1 - i)(\lambda - 1 + i)$ car (-1) est racine évidente. A n'est pas diagonalisable dans \mathbb{R} mais est diagonalisable dans \mathbb{C} .

On cherche le sev propre associé à $\lambda = -1$: E_{-1}

Les vecteurs propres de ce sev vérifient les équations suivantes : $\begin{cases} -\frac{1}{2}x + y + \frac{3}{2}z = -x \\ -\frac{3}{2}x + y + \frac{1}{2}z = -y \\ \frac{1}{2}x + y + \frac{1}{2}z = -z \end{cases}$ soit

$$\begin{cases} \frac{1}{2}x + y + \frac{3}{2}z = 0 \\ -\frac{3}{2}x + 2y + \frac{1}{2}z = 0 \end{cases} \text{ soit } \begin{cases} x + 2y + 3z = 0 \\ -3x + 4y + z = 0 \end{cases} \text{ soit } \begin{cases} x = -z \\ y = -z \end{cases}, \text{ ils appartiennent à une droite}$$

vectorielle dont un générateur est $V_{-1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$: $E_{-1} = \text{vect}(V_{-1})$

On cherche le sev propre associé à $\lambda = 1 + i$: E_{1+i}

Les vecteurs propres de ce sev vérifient les équations suivantes : $\begin{cases} -\frac{1}{2}x + y + \frac{3}{2}z = (1 + i)x \\ -\frac{3}{2}x + y + \frac{1}{2}z = (1 + i)y \\ \frac{1}{2}x + y + \frac{1}{2}z = (1 + i)z \end{cases}$

$$\begin{cases} -\left(\frac{3}{2} + i\right)x + y + \frac{3}{2}z = 0 \\ -\frac{3}{2}x - iy + \frac{1}{2}z = 0 \\ \frac{1}{2}x + y + \left(-\frac{1}{2} - i\right)z = 0 \end{cases} \text{ soit } \begin{cases} -\left(\frac{3}{2} + i\right)x + \left(\frac{-iz+3ix}{2}\right) + \frac{3}{2}z = 0 \\ y = (-iz + 3ix)/2 \\ \frac{1}{2}x + \left(\frac{-iz+3ix}{2}\right) + \left(-\frac{1}{2} - i\right)z = 0 \end{cases} \text{ soit } \begin{cases} \left(-\frac{3}{2} + \frac{i}{2}\right)x + \left(\frac{3}{2} - \frac{i}{2}\right)z = 0 \\ y = \frac{-iz+3ix}{2} \\ \frac{1}{2}x + \frac{3i}{2}x + \left(-\frac{1}{2} - \frac{3}{2}i\right)z = 0 \end{cases}$$

soit $\begin{cases} x = z \\ y = ix \end{cases}$ appartiennent à une droite vectorielle dont un générateur est $V_{1+i} = \begin{pmatrix} 1 \\ i \\ 1 \end{pmatrix}$:

$E_{1+i} = \text{vect}(V_{1+i})$

Comme les valeurs propres sont complexes conjuguées, un vecteur propre associé à $(1-i)$ peut être choisi en prenant le complexe conjugué de V_{1+i} et $E_{1-i} = \text{vect}(V_{1-i})$ avec $V_{1-i} = \overline{V_{1+i}} = \begin{pmatrix} 1 \\ -i \\ 1 \end{pmatrix}$

La solution de l'équation homogène est donnée (avec des coefficients complexes) par

$$\begin{pmatrix} x_h(t) \\ y_h(t) \\ z_h(t) \end{pmatrix} = k_1 \exp(-t) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + k_2 \exp((1+i)t) \begin{pmatrix} 1 \\ i \\ 1 \end{pmatrix} + k_3 \exp((1-i)t) \begin{pmatrix} 1 \\ -i \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Une base de l'ensemble des solutions est $(e^{-t} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, e^{(1+i)t} \begin{pmatrix} 1 \\ i \\ 1 \end{pmatrix}, e^{(1-i)t} \begin{pmatrix} 1 \\ -i \\ 1 \end{pmatrix})$ (le 3ème

élément est le conjugué du 2ème) ou on peut choisir une base constituée uniquement de

fonctions réelles soit $(e^{-t} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \text{Re}(e^{(1+i)t} \begin{pmatrix} 1 \\ i \\ 1 \end{pmatrix}), \text{Im}(e^{(1+i)t} \begin{pmatrix} 1 \\ i \\ 1 \end{pmatrix}))$ car si $X_1(t)$ et $\overline{X_1}(t)$ sont des

solutions linéairement indépendantes alors $\text{Re}(X_1(t))$ et $\text{Im}(X_1(t))$ le sont aussi (ici, on a $X_1(t) =$

$e^{(1+i)t} \begin{pmatrix} 1 \\ i \\ 1 \end{pmatrix}$) et $(e^{-t} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, e^t \begin{pmatrix} \cos(t) \\ -\sin(t) \\ \cos(t) \end{pmatrix}, e^t \begin{pmatrix} \sin(t) \\ \cos(t) \\ \sin(t) \end{pmatrix})$ est une base possible de l'ensemble des

solutions (réelles), ce qui conduit à une solution générale de l'équation homogène :

$$\begin{pmatrix} x_h(t) \\ y_h(t) \\ z_h(t) \end{pmatrix} = k_1 e^{-t} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + k'_2 e^t \begin{pmatrix} \cos(t) \\ -\sin(t) \\ \cos(t) \end{pmatrix} + k'_3 e^t \begin{pmatrix} \sin(t) \\ \cos(t) \\ \sin(t) \end{pmatrix}$$